

BAYERISCHE AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN
MATHEMATISCH-NATURWISSENSCHAFTLICHE KLASSE

SITZUNGSBERICHTE

JAHRGANG

1962

MÜNCHEN 1963

VERLAG DER BAYERISCHEN AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN

In Kommission bei der C. H. Beck'schen Verlagsbuchhandlung München

Über die Homotopieklassen holomorpher Abbildungen in homogene komplexe Mannigfaltigkeiten

Von Karl Josef Ramspott in München

Vorgelegt von Herrn Georg Aumann am 6. Juli 1962

Es sei X ein komplexer Raum, L eine komplexe Liesche Gruppe und $L(X, L^*)$ ein komplex analytisches Faserbündel mit der Basis X , der Faser L und der Strukturgruppe L^* , die automorph auf L wirkt ([4], § 3). Jede Homotopieklasse holomorpher Schnitte von $L(X, L^*)$ ist in natürlicher Weise in einer Homotopieklasse stetiger Schnitte enthalten. H. Grauert [5] hat 1957 bewiesen, daß diese Zuordnung bijektiv ist, falls der komplexe Raum X holomorph vollständig ist. In diesem Fall ist also jeder stetige Schnitt von $L(X, L^*)$ zu einem holomorphen Schnitt homotop, und zwei holomorphe Schnitte von $L(X, L^*)$, die stetig homotop sind, sind auch holomorph homotop, d. h. über lauter holomorphe Schnitte ineinander deformierbar.

In dieser Note wird mitgeteilt, daß die Aussagen richtig bleiben für Schnitte in einem Faserbündel, dessen Faser homogen bezüglich der Strukturgruppe ist (zur genauen Formulierung vgl. Abschnitt 1). Zum Beweise werden die Resultate von H. Grauert in [5] benutzt; die Beweismethode ist in mancher Hinsicht der in [7] verwendeten analog.

Ist X eine zweidimensionale holomorph vollständige Mannigfaltigkeit, so lassen sich mit Hilfe der üblichen Sätze der Hindernistheorie die Homotopieklassen der meromorphen Funktionen ohne Unbestimmtheitsstellen auf X genau klassifizieren (Satz 3).

In [9] wurde ein hinreichendes Kriterium für die kompakte Approximierbarkeit meromorpher Funktionen ohne Unbestimmtheitsstellen hergeleitet. Satz 1 stellt sicher, daß diese Bedingung auch notwendig ist (Satz 4).

Auf die ausführliche Begründung und Ausdehnung der Ergebnisse beabsichtigt der Verfasser an anderer Stelle einzugehen.

1. Es sei M eine komplexe Mannigfaltigkeit. Die komplexe Liesche Gruppe L wirkt holomorph auf M , wenn es eine holomorphe Abbildung $\mu: L \times M \rightarrow M$ gibt mit folgenden Eigenschaften:

a) $\mu(l_1 \circ l_2, y) = \mu(l_1, \mu(l_2, y))$, $l_1, l_2 \in L, y \in M$, dabei bezeichne \circ die Gruppenverknüpfung in L .

b) $\mu(e, y) = y$, e ist das neutrale Element in L .

L wirkt holomorph und transitiv auf M , wenn es zu je zwei Punkten $y_1, y_2 \in M$ ein $l \in L$ gibt, so daß $\mu(l, y_1) = y_2$ ist. Wir schreiben für $\mu(l, y)$ auch $l \cdot y$.

Im folgenden sei stets vorausgesetzt, daß L abzählbare Topologie hat. G sei eine abgeschlossene komplexe Untergruppe von L . Mit $\mathfrak{B} = (B, p, X, M, G)$ werde ein komplex analytisches Faserbündel [10, 8, 6] bezeichnet, das B als Bündelraum, X als Basis, $p: B \rightarrow X$ als Projektion, M als Faser und G als (effektiv wirkende) Strukturgruppe hat. Dabei sei X stets ein komplexer Raum im Sinne von J. P. Serre (siehe hierzu [3] und [6], Fußnote 2).

Es sei $I = [0, 1]$ das Einheitsintervall der reellen Achse. Ist f_0 ein Schnitt von \mathfrak{B} , ferner $F: X \times I \rightarrow B$ eine stetige Abbildung mit $pF(x, t) = x$ für $t \in I$ und $F(x, 0) = f_0(x)$, so heißt die Abbildung F eine Homotopie von f_0 . Die Schnitte $f_0(x)$ und $f_1(x) := F(x, 1)$ heißen stetig homotop. Sind $f_0(x)$ und $f_1(x)$ holomorphe Schnitte und ist $f_t(x) := F(x, t)$ für jedes $t \in I$ ein holomorpher Schnitt von \mathfrak{B} , so heißen f_0 und f_1 holomorph homotop.

2. Es gelten die beiden folgenden Aussagen:

Satz 1: Es sei X ein holomorph vollständiger komplexer Raum, $\mathfrak{B} = (B, p, X, M, G)$ ein komplex analytisches Faserbündel, auf dessen Faser M eine komplexe Liesche Gruppe L mit $L \supset G$ holomorph und transitiv wirkt. Dann ist jeder stetige Schnitt $s: X \rightarrow B$ zu einem holomorphen Schnitt $f: X \rightarrow B$ stetig homotop.

Satz 2: X, \mathfrak{B} mögen die gleiche Bedeutung haben wie in Satz 1. Sind dann zwei holomorphe Schnitte $f_0, f_1: X \rightarrow B$ stetig homotop, so sind sie auch holomorph homotop. Außerdem kann die Homotopie $F(x, t)$ so gewählt werden, daß die Abhängigkeit von t reell analytisch ist.

Wir beschränken uns im folgenden auf das triviale Bündel. Für diesen Fall wird Satz 1 vollständig bewiesen, der Beweis von Satz 2 wird nur skizziert.

Es sei $y_0 \in M$ fest gewählt. Durch $\pi(l) := l \cdot y_0$ wird eine surjektive holomorphe Abbildung $\pi: L \rightarrow M$ definiert. $L_1 := \{l \in L: l \cdot y_0 = y_0\}$ ist eine abgeschlossene komplexe Untergruppe von L . Der Raum der Linksnebenklassen L/L_1 läßt sich mit der Struktur einer komplexen Mannigfaltigkeit versehen, so daß die natürliche Projektion $\pi': L \rightarrow L/L_1$ holomorph und die durch π induzierte Abbildung $\tilde{\pi}: L/L_1 \rightarrow M$ biholomorph ist. Es ist $\pi(l) = \tilde{\pi}\pi'(l)$. Zu jedem Punkt $y \in M$ gibt es eine Umgebung V_y und eine holomorphe Abbildung $\varrho_y: V_y \rightarrow L$ mit $\pi\varrho_y(y') = y'$ für $y' \in V_y$ ([8], Satz 3. 4. 3).

Die stetige Abbildung $s: X \rightarrow M$ sei vorgegeben. Es gibt eine offene Überdeckung $\{U_i, i \in J\}$ von X , die so fein ist, daß stetige Abbildungen $s_i: U_i \rightarrow L$ existieren mit der Eigenschaft: $s|U_i = \pi s_i$. Wir dürfen außerdem annehmen, daß die U_i holomorph konvex sind.

Es sei $s_{ij}(x) := (s_i(x))^{-1} \circ s_j(x)$ für $x \in U_i \cap U_j$. s_{ij} ist eine stetige Abbildung von $U_i \cap U_j$ in L_1 , es gilt: $s_{ij}(x) \circ s_{jk}(x) = s_{ik}(x)$ für $x \in U_i \cap U_j \cap U_k$. Nach [5], Satz 12, gibt es stetige Abbildungen $r_i: U_i \rightarrow L_1$, so daß $h_{ij} := r_i \circ s_{ij} \circ r_j^{-1}$ in $U_i \cap U_j$ holomorph ist. Interpretiert man h_{ij} als Abbildung $U_i \cap U_j \rightarrow L$, so gilt: $h_{ij} = (r_i \circ s_i^{-1}) \circ (r_j \circ s_j^{-1})^{-1}$. Nach [5], Satz 11, gibt es holomorphe Abbildungen $h_i: U_i \rightarrow L$, so daß gilt: $h_{ij} = h_i \circ h_j^{-1}$. Also ist $s_i \circ r_i^{-1} \circ h_i = s_j \circ r_j^{-1} \circ h_j$ im Durchschnitt $U_i \cap U_j$. Daher definiert die Kollektion der $s_i \circ r_i^{-1} \circ h_i, i \in J$, eine stetige Abbildung $\psi: X \rightarrow L$. Nach [5], Satz 6, gibt es eine holomorphe Abbildung $\varphi: X \rightarrow L$, die vermöge einer stetigen Homotopie $\Psi: X \times I \rightarrow L$ zu ψ homotop ist: $\Psi(x, 0) = \psi(x), \Psi(x, 1) = \varphi(x)$.

Es sei $\tilde{h}_i(x, t) := h_i(x)$, dann ist $\tilde{S}_i := \Psi \circ \tilde{h}_i^{-1}$ eine stetige Abbildung $U_i \times I \rightarrow L$. Wegen $\tilde{S}_i^{-1} \circ \tilde{S}_j = \tilde{h}_i \circ \tilde{h}_j^{-1} = h_i \circ h_j^{-1} = h_{ij} \in L_1$ ist $\pi \tilde{S}_i = \pi \tilde{S}_j$. Daher wird durch $S|U_i \times I := \pi \tilde{S}_i$ eine stetige Abbildung $S: X \times I \rightarrow M$ definiert. Es ist $S(x, 0)|U_i = \pi \tilde{S}_i(x, 0) = \pi(\Psi(x, 0) \circ (h_i(x))^{-1}) = \pi(\psi(x) \circ (h_i(x))^{-1}) = \pi(s_i(x) \circ (r_i(x))^{-1} \circ h_i(x) \circ (h_i(x))^{-1}) = \pi(s_i(x) \circ (r_i(x))^{-1}) = \pi s_i(x) = s(x)|U_i$. Die Abbildung $f(x) := S(x, 1)$ ist wegen $S(x, 1)|U_i = \pi(\varphi(x) \circ (h_i(x))^{-1})$ holomorph; f und s sind stetig homotop.

3. Zum Beweis von Satz 2 denke man sich die stetige Abbildung $S: X \times I \rightarrow M$ mit $S(x, 0) = f_0(x)$, $S(x, 1) = f_1(x)$ stetig auf $X \times D$ fortgesetzt, dabei ist $D := \{z \in C : |z - \frac{1}{2}| < 1\}$. $X \times D$ ist holomorph vollständig; A sei die in $X \times D$ analytische Menge $(X \times \{0\}) \cup (X \times \{1\})$. Zu einer geeigneten Überdeckung $\{U_i, i \in J\}$ von $X \times D$ gibt es stetige Abbildungen $s_i: U_i \rightarrow L$ mit $S = \pi s_i$. Die Beschränkung $s_i|_{U_i \cap A}$ darf als holomorph angenommen werden. Es sei wieder $s_{ij} := s_i^{-1} \circ s_j$. Dann ist $s_{ij} \circ s_{jk} = s_{ik}$. Nach [5], Satz 12, gibt es stetige Abbildungen $r_i: U_i \rightarrow L_1$, so daß $h_{ij} := r_i \circ s_{ij} \circ r_j^{-1}$ holomorph ist. Der wesentliche Punkt des Beweises ist jetzt, daß man die r_i sogar so wählen kann, daß $r_i|_{U_i \cap A}$ holomorph ist. Ein Spezialfall dieser Aussage wird weiter unten bewiesen.

Wie beim Beweis von Satz 1 bekommt man holomorphe Abbildungen $h_i: U_i \rightarrow L$ mit $h_{ij} = h_i \circ h_j^{-1}$. Durch $\psi|_{U_i} := s_i \circ r_i^{-1} \circ h_i$ wird eine stetige Abbildung $\psi: X \times D \rightarrow L$ definiert, deren Beschränkung auf A holomorph ist. Nach [3], Corollaire du Théorème 1 bis, gibt es eine holomorphe Abbildung $f: X \times D \rightarrow L$ mit $f|_A = \psi|_A$. Es sei $\tilde{F}_i := f \circ h_i^{-1}$, dann ist $\pi \tilde{F}_i = \pi \tilde{F}_j$. Durch $F|_{U_i} := \pi \tilde{F}_i$ wird eine holomorphe Abbildung $F: X \times D \rightarrow M$ definiert. Man rechnet leicht nach, daß die Beschränkung von F auf $X \times I$ eine gewünschte Homotopie liefert.

Die oben angedeutete Aussage über die Abbildungen r_i soll noch für folgenden Spezialfall bewiesen werden: Es gibt stetige Abbildungen $c_i: U_i \rightarrow L_1$ mit $s_{ij} = c_i^{-1} \circ c_j$. Wenn wir stetige Abbildungen $r_i: U_i \rightarrow L_1$ mit $s_{ij} = r_i^{-1} \circ r_j$ finden können, so daß $r_i|_{U_i \cap A}$ holomorph ist, sind wir offenbar fertig. Nach [5], Satz 11, gibt es holomorphe Abbildungen $t_i: U_i \cap A \rightarrow L_1$ mit $s_{ij} = t_i \circ t_j^{-1}$ in $U_i \cap U_j \cap A$. Es ist $c_i \circ t_i = c_j \circ t_j$ in $U_i \cap U_j \cap A$. Also wird durch $s|_{U_i \cap A} := c_i \circ t_i$ eine stetige Abbildung $s: A \rightarrow L_1$ definiert. Nach [5], Satz 6, gibt es eine holomorphe Abbildung $g: A \rightarrow L_1$, die zu s homotop ist. $g \circ s^{-1}$ läßt sich zu einer stetigen Abbildung $v: X \times D \rightarrow L_1$ fortsetzen. Es sei $r_i := v \circ c_i$, dann ist $r_i|_{U_i \cap A} = g \circ s^{-1} \circ c_i = g \circ t_i^{-1} \circ c_i^{-1} \circ c_i = g \circ t_i^{-1}$ holomorph und $r_i^{-1} \circ r_j = c_i^{-1} \circ c_j = s_{ij}$. Der allgemeine Fall läßt sich durch einige zusätzliche Überlegungen auf diesen Spezialfall zurückführen (vgl. dazu in [5] die Beweise von Satz 11 und Satz 11 a).

4. Wir betrachten in diesem Abschnitt meromorphe Funktionen ohne Unbestimmtheitsstellen auf X , d. h. wir wählen für M die Riemannsche Zahlenkugel S^2 . Die charakteristische Klasse $\sigma(s)$ einer stetigen Abbildung $s: X \rightarrow S^2$ sei wie in [2], Exp. 3, erklärt: $H^2(S^2, H_2(S^2))$ und $(\text{Hom} H_2(S^2), H_2(S^2))$ sind in natürlicher Weise isomorph. Dem identischen Endomorphismus von $H_2(S^2)$ möge dabei das Element $\sigma(S^2) \in H^2(S^2, H_2(S^2))$ entsprechen. Die Abbildung s definiert einen Homomorphismus $s^*: H^2(S^2, H_2(S^2)) \rightarrow H^2(X, H_2(S^2))$. Es ist $\sigma(s) := s^*(\sigma(S^2))$.

Satz 3: Ist X eine holomorph vollständige Mannigfaltigkeit der komplexen Dimension zwei, so entsprechen die Homotopieklassen der auf X meromorphen Funktionen ohne Unbestimmtheitsstellen eineindeutig den Elementen der Cohomologiegruppe $H^2(X, H_2(S^2))$. Der Homotopieklassen der Funktion f ist dabei das Element $\sigma(f)$ zugeordnet.

Die Behauptung folgt aus den Sätzen 1 und 2 und Aussagen der Hindernistheorie (vgl. [2], Exp. 3, Théorème 2), wenn nachgewiesen ist, daß die Cohomologiegruppen $H^i(X, \pi_i(S^2))$ und $H^{i+1}(X, \pi_i(S^2))$ für $i > 2$ verschwinden. Es ist $H^3(X, \pi_3(S^2)) \cong H^3(X, Z) \cong \text{Hom}(H_3(X), Z) \oplus \text{Ext}(H_2(X), Z)$. Da X holomorph vollständig ist, ist $H_3(X) = 0$ ([1], Theorem 1). $H_2(X)$ ist torsionsfrei [1] und nach einer mündlichen Mitteilung von A. Andreotti sogar eine freie abelsche Gruppe. Folglich ist $\text{Ext}(H_2(X), Z) = 0$. Die übrigen Gruppen verschwinden ebenfalls nach [1], Theorem 1.

5. Ein geordnetes Paar (X, Y) von zusammenhängenden, holomorph vollständigen Mannigfaltigkeiten heißt ein Runge'sches Paar, wenn X Teilgebiet von Y ist und jede in X holomorphe Funktion durch in Y holomorphe Funktionen kompakt approximiert werden kann. Für Runge'sche Paare im C^2 wurde in [9] eine hinreichende Bedingung dafür hergeleitet, daß sich jede in X meromorphe Funktion ohne Unbestimmtheitsstelle durch in Y meromorphe Funktionen ohne Unbestimmtheitsstellen kompakt approximieren läßt. Diese Bedingung ist wegen Satz 1 auch notwendig. Ferner kann man auf die in [9] gemachte Voraussetzung, daß (X, Y) ein Runge'sches Paar im C^2 ist, verzichten. Es gilt:

Satz 4: Es sei (X, Y) ein Rungesches Paar; die komplexe Dimension von X und Y sei zwei. $H_2(Y)$ sei endlich erzeugt. Dann läßt sich jede in X meromorphe Funktion ohne Unbestimmtheitsstelle genau dann durch in Y meromorphe Funktionen ohne Unbestimmtheitsstellen kompakt approximieren, wenn $\text{Coker}(H^2(Y, Z) \rightarrow H^2(X, Z))$ divisibel ist.

Dabei ist $H^2(Y, Z) \rightarrow H^2(X, Z)$ der durch die Inklusion $X \subset Y$ induzierte natürliche Homomorphismus.

Literatur

- [1] A. Andreotti u. T. Frankel, The Lefschetz theorem on hyperplane sections. *Ann. of Math.* 69 (1959), 713-717.
- [2] H. Cartan, Séminaire E. N. S. 1949/50 (hektographiert).
- [3] H. Cartan, Espaces fibrés analytiques. Symposium Internacional de Topologia Algebraica. Mexico (1958).
- [4] H. Grauert, Approximationssätze für holomorphe Funktionen mit Werten in komplexen Räumen. *Math. Ann.* 133 (1957), 139-159.
- [5] H. Grauert, Holomorphe Funktionen mit Werten in komplexen Lieschen Gruppen. *Math. Ann.* 133 (1957), 450-472.
- [6] H. Grauert, Analytische Faserungen über holomorph vollständigen Räumen. *Math. Ann.* 135 (1958), 263-273.
- [7] H. Grauert u. H. Kerner, Approximation von holomorphen Schnittflächen in Faserbündeln mit homogener Faser. Erscheint im *Arch. Math.*
- [8] F. Hirzebruch, Neue topologische Methoden in der algebraischen Geometrie. *Erg. d. Math.* 9 (1956).
- [9] K. J. Ramspott u. K. Stein, Über Rungesche Paare komplexer Mannigfaltigkeiten. *Math. Ann.* 145 (1962), 444-463.
- [10] N. Steenrod, The topology of fibre bundles. Princeton (1951).