BAYERISCHE AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN
MATHEMATISCH-NATURWISSENSCHAFTLICHE KLASSE

SITZUNGSBERICHTE

JAHRGANG

1962

MÜNCHEN 1963

VERLAG DER BAYERISCHEN AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN

In Kommission bei der C. H. Beck'schen Verlagsbuchhandlung München

Differentialgleichungen in allgemeinen Räumen

Von Hans Hornich in Wien

Vorgelegt von Herrn Josef Lense am 12. Januar 1962

Der Begriff einer Differentialgleichung läßt sich auch in einem allgemeinen metrischen Raum definieren, wenn man etwa in den Punkten eines solchen Raumes eine Richtung und die Ableitung einer Funktion in einer Richtung erklärt. Das Hauptproblem einer solchen Verallgemeinerung aber besteht darin, auch die Existenztheoreme der mit Koordinaten arbeitenden Theorie der gewöhnlichen und der partiellen Differentialgleichungen auf solche allgemeine Räume zu übertragen. Die kürzlich aufgestellten Existenzsätze für lineare partielle Differentialgleichungen in einem beschränkten Gebiet des R_n mit stetigen Koeffizienten[1] enthalten nun in ihrem im wesentlichen koordinatenlosen Beweis bereits die Grundelemente für eine Erweiterung dieser Sätze auf allgemeine metrische Räume, wobei wir diese als kompakt, zusammenhängend und im kleinen zusammenhängend annehmen, uns also auf stetige Streckenbilder beschränken, in denen bekanntlich je zwei Punkte durch Bogen verbindbar sind. Es ist bemerkenswert, daß die sinngemäße Verallgemeinerung der Existenzsätze im R_n nicht auf lineare Räume, sondern auf stetige Streckenbilder erfolgt.

In dieser Arbeit soll die Theorie der Differentialgleichungen in diesen Räumen in derselben Allgemeinheit skizziert werden wie in den Gebieten eines R_n. Zum Unterschied von diesen wird hier ein in sich kompakter Raum zugrunde gelegt, was eine gewisse Vereinfachung mit sich bringt: die Einführung von Lösungskomponenten ist hiedurch überflüssig geworden.

---

[1] Monatsh. f. Math. 66 (1962) 152–160.

I

Sei R ein metrischer Raum, in sich kompakt, zusammenhängend und im kleinen zusammenhängend. Dann sind je zwei Punkte aus R durch Bogen in R verbindbar.[1]

Die Entfernung zweier Punkte p, q in R sei pq; für drei paarweise verschiedene Punkte p, q, r setzen wir

$$(q, r; p) = \frac{pq^2 + pr^2 - qr^2}{2pq \cdot pr}; \tag{1}$$

es ist stets

$$|(q, r; p)| \leq 1. \tag{2}$$

Eine Menge M aus R heiße im Punkt $p \in M$ gerichtet, wenn zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $\delta(\varepsilon)$ existiert, so daß für alle $q, r \in M$, $p \neq q, p \neq r$ und $pq < \delta(\varepsilon)$, $pr < \delta(\varepsilon)$ gilt:

$$1 - (q, r; p) < \varepsilon \tag{3}$$

Zwei Mengen M' und M'', die im selben Punkt $p \varepsilon (M' \frown M'')$ gerichtet sind, sollen in p gleichgerichtet heißen, wenn die Vereinigung $M' \smile M''$ in p gerichtet ist.

Zwei Mengen M' und M'' sollen im Punkt $p \in (M' \frown M'')$ entgegengesetzt gerichtet heißen, wenn sowohl M' als M'' in p gerichtet ist und wenn weiter für jedes $\varepsilon > 0$ ein $\delta(\varepsilon)$ existiert, so daß für alle Punkte $p' \in M'$, $p'' \in M''$, $pp' < \delta(\varepsilon)$, $pp'' < \delta(\varepsilon)$ gilt:

$$1 + (p', p''; p) < \varepsilon \tag{4}$$

Sei (M_n) eine Folge von Mengen aus R und M der untere abgeschlossene Limes $\underline{Fl}\ M_n$, d. i. die Menge aller Punkte, die Limes von Punkten $a_n \in M_n$ sind. Sei ferner M_n gerichtet in $p_n \in M_n$ und die p_n mögen gegen $p \in M$ konvergieren; die M_n seien dabei gleichgradig gerichtet, nämlich mit demselben $\delta(\varepsilon)$ für jedes $\varepsilon > 0$. Dann ist auch M gerichtet in p.

---

[1] Vgl. K. Menger, Kurventheorie S. 59.

Seien q, r zwei verschiedene und von p verschiedene Punkte aus M und etwa $q = \lim q_n$, $q_n \in M_n$, $r = \lim r_n$, $r_n \in M_n$. Wir können q_n, r_n, p_n paarweise verschieden für jedes n annehmen. Dann ist für hinreichend großes n bei einem $\varepsilon > 0$ stets

$$1 - (q_n, r_n; p_n) < \varepsilon \tag{5}$$

und daher auch

$$1 - (q, r; p) \leq \varepsilon \tag{6}$$

Ein Bogen b in R heiße **glatt**, wenn er rektifizierbar ist[1] und wenn b für jeden Endpunkt von b gerichtet ist und für jeden von den Endpunkten verschiedenen Punkt p von b die beiden durch p begrenzten Teilbogen von b in p entgegengesetzt gerichtet sind.

Wir beschränken uns dabei auf die glatten Bogen b von R, für welche $\delta(\varepsilon)$ gleichmäßig und für alle Punkte fest gewählt werden kann.

Sei nun $(p_n(t))$, $0 \leq t \leq 1$, eine Folge von glatten Bogen mit beschränkter Länge und konvergent: $p_n(t) \to p(t)$, wobei $p(t)$, $0 \leq t \leq 1$, wieder ein Bogen sei; dann ist dieser Bogen wieder ein glatter.

Denn er ist, wie sofort ersichtlich, rektifizierbar. Weiter ist für jedes $0 < \tau < 1$ jeder der Teilbogen $p(t)$, $0 \leq t \leq \tau$ und $\tau \leq t \leq 1$ gerichtet in $p(\tau)$ und diese beiden Bogen sind, wie wieder sofort ersichtlich, entgegengesetzt gerichtet in $p(\tau)$.

Eine Menge $\mathfrak{A}$ von glatten Bogen aus R heiße ein **Richtungsfeld**, wenn

1. jeder Punkt aus R in wenigstens einem Bogen aus $\mathfrak{A}$ liegt,

2. für zwei Bogen b' und b'' aus $\mathfrak{A}$ durch einen Punkt p auch die Vereinigungsmenge $b' \cup b''$ entweder selbst in p gerichtet ist oder aus zwei Teilmengen sich zusammensetzen läßt, die in p entgegengesetzt gerichtet sind;

3. mit jeder gegen einen Bogen b konvergenten Folge (b_n) von Bogen beschränkter Länge aus $\mathfrak{A}$ der (nach dem obigen

[1] D. h. daß $\sup \sum_{i=1}^{n-1} p_i p_{i+1}$ für alle endlichen Punktmengen $(p_1, p_2, \cdots p_n)$ aus b endlich ist, wenn bei einer Durchlaufung von b die Punkte $p_1, p_2, \cdots p_n$ in dieser Ordnung aufeinanderfolgen.

wieder glatte) Bogen b wieder zu $\mathfrak{A}$ gehört (Stetigkeit des Richtungsfeldes).

Durch ein Richtungsfeld $\mathfrak{A}$ ist in jedem Punkt p von R eine Richtung bestimmt als die Gesamtheit aller Bogen aus $\mathfrak{A}$, die p enthalten.

Sei p ein Punkt und sei b ein p enthaltender Bogen aus $\mathfrak{A}$ und $\bar{b}$ ein in p endender Teilbogen von b; $\bar{b}$ ist nach Definition eine in p gerichtete Menge. Wir bezeichnen die Gesamtheit aller in p endenden Teilbogen der durch $\mathfrak{A}$ bestimmten Richtung in p, die mit $\bar{b}$ gleichgerichtet sind, als eine orientierte Richtung $\mathfrak{a}(p)$; die Gesamtheit aller in p endenden Teilbogen der durch $\mathfrak{A}$ bestimmten Richtung in p, die zu $\bar{b}$ entgegengesetzt gerichtet sind, sei die orientierte Richtung $-\mathfrak{a}(p)$.

Ein Richtungsfeld $\mathfrak{A}$ heißt orientierbar, wenn für jeden Punkt p eine orientierte Richtung $\mathfrak{a}(p)$ und für jeden Bogen aus $\mathfrak{A}$ eine Durchlaufungsrichtung eindeutig so festgelegt werden kann, daß zu jedem Punkt p jeder in diesem Sinn durchlaufene und in p endende Teilbogen aus $\mathfrak{A}$ zu $\mathfrak{a}(p)$ gehört.

Ferner sei für jede gegen einen Bogen b aus $\mathfrak{A}$ konvergente Folge (b_n) von Bogen aus $\mathfrak{A}$ der Durchlaufungssinn der b_n und b so festgelegt, daß für eine Punktfolge (p_n) mit $p_n \in b_n$, $p_n \to p$, $p \in b$ die Folge der in dem festgelegten Sinn durchlaufenen und in p_n endenden Teilbogen $\bar{b}_n$ von b_n gegen den in p endenden Teilbogen $\bar{b}$ von b konvergiert.

Ein Richtungsfeld ist i. a. nicht orientierbar. Wir bezeichnen ein orientierbares Richtungsfeld mit einer solchen Orientierung als orientiertes Richtungsfeld.

Sei $\mathfrak{A}$ ein orientiertes Richtungsfeld. Ist u eine reellwertige Funktion auf R, so heiße u im Punkt p nach der orientierten Richtung $\mathfrak{a}(p)$ differenzierbar, wenn u für jeden Teilbogen von $\mathfrak{a}(p)$ dieselbe (einseitige) Ableitung nach der Bogenlänge hat:

$$\lim_{p' \to p} \frac{u(p') - u(p)}{s(p'p)} = \frac{\partial u}{\partial \mathfrak{a}} \tag{7}$$

($s(p'p)$ Bogenlänge von p nach p').

Analog ist die Ableitung nach $-\mathfrak{a}(p)$ zu definieren, indem man die Teilbogen aus $-\mathfrak{a}(p)$ heranzieht:

$$\lim_{p'' \to p} \frac{u(p'') - u(p)}{s(p''p)} = \frac{\partial u}{\partial(-\mathfrak{a})}. \tag{8}$$

Ist nun f eine in R definierte und dort stetige Funktion, so bezeichnen wir mit einem in R orientierten Richtungsfeld $\mathfrak{A}$ die Gleichung

$$\frac{\partial u}{\partial \mathfrak{a}} = -\frac{\partial u}{\partial(-\mathfrak{a})} = f \tag{9}$$

als Differentialgleichung in R. Als Lösungsfunktion u von (9) werde jede in R stetige Funktion u bezeichnet, für welche überall die Ableitung nach $\mathfrak{a}(p)$ und $-\mathfrak{a}(p)$ existiert und gleich f bzw. $-f$ ist.

II.

Wir stellen die Frage nach den (hinreichenden) Bedingungen für ein in R orientiertes Richtungsfeld $\mathfrak{A}$, so daß die Differentialgleichung (9) für jede in R stetige Funktion f eine Lösung hat.

Wir führen den Begriff eines Lösungsweges ein:

Als Lösungsweg (in bezug auf ein orientiertes Richtungsfeld) werde eine stetige, rektifizierbare Kurve $p(s)$ (s Bogenlänge als Parameter) bezeichnet, so daß für fast alle s die beiden durch $p(s)$ begrenzten Teilkurven $p(\sigma)$, $\sigma \leq s$ und $\sigma \geq s$ in $p(s)$ entgegengesetzt gerichtet sind, und zwar seien diese Teilkurven gleichgerichtet den Bogen von $\mathfrak{a}\big(p(s)\big)$ oder von $-\mathfrak{a}\big(p(s)\big)$.

Ist nun C ein Lösungsweg, sind p, q zwei Punkte aus C und ist u eine Lösungsfunktion von (9), so gilt:

$$u(p) - u(q) = (c)\int_q^p \frac{\partial u}{\partial s}\, ds = (c)\int_q^p \pm \frac{\partial u}{\partial \mathfrak{a}}\, ds = (c)\int_q^p \pm f\, ds \tag{10}$$

wobei das Vorzeichen $+$ oder $-$ zu setzen ist, je nachdem der Lösungsweg $p(\sigma)$ mit $\sigma \leq s$ mit $\mathfrak{a}\big(p(s)\big)$ gleichgerichtet ist oder mit $-\mathfrak{a}\big(p(s)\big)$.

Hieraus folgt sofort eine notwendige Bedingung für die Lösbarkeit unseres Problems:

(A) Es soll in R keinen Lösungsweg geben, der ein topologischer Kreis ist.

Wäre nämlich C ein solcher Lösungsweg, so müßte nach (10) für jede stetige Funktion f das Integral

$$(c)\int \pm f\,ds = 0 \tag{11}$$

sein, was unmöglich ist.

Wir nehmen fortan die Bedingung (A) als erfüllt an.

Wir bestimmen zu jedem Punkt p die Menge aller Punkte, die mit p durch einen Lösungsweg verbunden werden können; diese Menge heiße der zu p gehörige Lösungskomplex $L(p)$. Je zwei Lösungskomplexe sind entweder identische oder zueinander fremde Mengen. R ist eindeutig als Vereinigungsmenge von Lösungskomplexen darstellbar. Eine Lösungsfunktion u von (9) läßt sich durch (10) eindeutig auf dem ganzen Lösungskomplex $L(p)$ bestimmen, wenn u in einem Punkt von $L(p)$ vorgegeben ist. Allerdings braucht die so bestimmte Funktion auf dem Lösungskomplex nicht auch stetig zu sein.

Ein Lösungskomplex ist natürlich stets eine zusammenhängende Menge.

Wir machen weiter die folgende Voraussetzung:

(B): Die Längen der Lösungswege in R sind beschränkt.

Dann können wir zeigen:

Ein Lösungskomplex ist eine abgeschlossene Menge.

Zum Beweis bringen wir zunächst das weitergehende

Lemma: Seien (p_n) und (q_n) zwei konvergente Punktfolgen, $p_n \to p$, $q_n \to q$, und für jedes n die Punkte p_n und q_n auf demselben Lösungskomplex L_n gelegen; p liege auf dem Lösungskomplex L. Sei ferner u eine nach (10) auf den Lösungskomplexen L_n und L bestimmte Lösungsfunktion von (9) und zwar so daß

$$u(p_n) \to u(p). \tag{12}$$

Es liegen dann p und q auf demselben Lösungskomplex L und es ist auch

$$u(q_n) \to u(q). \tag{13}$$

Sei zum Beweis C_n der zwischen p_n und q_n in L_n verlaufende Lösungsweg, etwa $p_n(t)$, $0 \leq t \leq 1$, wo t bis auf einen konstanten Faktor die von p_n nach q_n gezählte Bogenlänge sei. Es genügt, $p \neq q$ vorauszusetzen. Nach (B) liegen dann die Längen der Kurven C_n für hinreichend großes n zwischen zwei positiven Zahlen. Nach dem Satz von Arzelà gibt es eine gleichgradig konvergente Teilfolge der C_n, etwa C_{n_1}, $C_{n_2}, \ldots$, so daß $p_{n_k}(t) \to p(t)$, $0 \leq t \leq 1$, wo $p(t)$ eine stetige, sicher rektifizierbare Kurve zwischen p und q ist.

Diese ist nun auch ein Lösungsweg: es ist für fast alle t und für $\tau', \tau'' < t$ mit $\tau', \tau'' \to t$ wieder $\big(p(\tau'), p(\tau''); p(t)\big) \to 1$, ebenso für $\tau', \tau'' > t$, während für $\tau' < t < \tau''$ und $\tau', \tau'' \to t$ gilt: $\big(p(\tau'), p(\tau''); p(t)\big) \to -1$. Endlich sind die Teilkurven mit $p(\tau)$ und $\tau \leq t$ und $p(\tau)$ mit $\tau \geq t$ entweder mit $\mathfrak{a}\big(p(t)\big)$ oder mit $-\mathfrak{a}\big(p(t)\big)$ gleichgerichtet, wie wieder aus den entsprechenden Formeln für die C_{n_k} folgt.

Weil nun nach (A) höchstens ein Lösungsweg zwischen p und q existiert, so streben alle C_n gegen C; insbesondere liegen p und q auf demselben Lösungskomplex.

Wegen der gleichgradigen Konvergenz der C_n folgt endlich aus

$$u(p_n) - u(q_n) = (C_n) \int_{q_n}^{p_n} \pm f\, ds$$

und

$$u(p) - u(q) = (C) \int_{q}^{p} \pm f\, ds$$

auch

$$u(q_n) \to u(q).$$

Aus der Tatsache, daß eine konvergente Folge von Lösungswegen wieder gegen einen Lösungsweg strebt, folgt sofort, daß jeder Lösungskomplex eine abgeschlossene Menge ist.[1]

---

[1] Die Lösungskomplexe in einem Gebiet G des R_n sind in G nicht abgeschlossen, da hier die Lösungswege innerhalb von G betrachtet werden und G nicht kompakt ist.

Weiter folgt sofort, daß eine nach (10) in einem Lösungskomplex gebildete Funktion dort auch stetig ist: lassen wir alle L_n sowie L zusammenfallen und setzen $p_1 = p_2 = \cdots = p$, so haben wir für jede konvergente Punktfolge (q_n) aus L auch $u(q_n) \to u(q)$.

Wir wollen nun die Funktion u über einen speziellen Lösungskomplex L hinaus fortsetzen und im ganzen Raum R definieren.

Sei A eine abgeschlossene Menge, die von jedem Lösungskomplex höchstens einen Punkt enhält. Auf A sei φ eine stetige Funktion. Wir bilden die Menge M aller Lösungskomplexe, die mit A einen Punkt gemein haben. Auf allen diesen Lösungskomplexen bestimmen wir nach (10) eine Funktion u derart, daß diese an dem zu A gehörigen Punkt den Wert φ annimmt. Dann ist u auf M eine stetige Funktion: sei nämlich p ein Punkt von M und (p_n) eine konvergente Punktfolge aus M mit $p_n \to p$. Ist nun L_n der Lösungskomplex aus M mit $p_n \in L_n$ und sei q_n der Punkt $L_n \cap A$. Nach dem Lemma gibt es nur einen Lösungskomplex L, gegen dessen Punkte eine Punktfolge aus den L_n konvergieren kann, und daher nur einen Punkt q auf A, der Limes der q_n ist. Wegen

$$\varphi(q) = \lim \varphi(q_n)$$

ist nach dem Lemma wieder

$$u(p) = \lim u(p_n)$$

also u auf M stetig.

Damit ist der folgende Existenzsatz gezeigt:

Ist auf R ein orientiertes Richtungsfeld $\mathfrak{A}$ gegeben, so daß es keine Lösungswege gibt, die topologische Kreise sind, und so daß die Längen der Lösungswege in R beschränkt sind, dann ist die Differentialgleichung

$$\frac{\partial u}{\partial \mathfrak{a}} = -\frac{\partial u}{\partial(-\mathfrak{a})} = f$$

für jede in R stetige Funktion f in R lösbar.

Dabei kann man die Werte von u auf einer abgeschlossenen Menge A, die von jedem Lösungskomplex höchstens einen Punkt enthält, beliebig stetig vorgeben.