BAYERISCHE AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN
MATHEMATISCH-NATURWISSENSCHAFTLICHE KLASSE

SITZUNGSBERICHTE

JAHRGANG

1960

MÜNCHEN 1961

VERLAG DER BAYERISCHEN AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN

In Kommission bei der C. H. Beck'schen Verlagsbuchhandlung München

Gekoppelte Richtungsübertragungen auf Flächenpaaren

Von **Frank Löbell** in München

Vorgelegt am 9. Dezember 1960

Herrn Josef Lense zum 70. Geburtstag gewidmet

1. Auf einer Fläche $\mathfrak{F}$ sei eine *Richtungsübertragung* dadurch gegeben, daß in jedem ihrer Punkte P jedem tangentialen Einheitsvektor $\mathfrak{t}$ der Wert Ψ der Winkelgeschwindigkeit zugeordnet sei, mit der sich die Berührebene beim Fortschreiten des Berührpunktes P mit der Geschwindigkeit $\mathfrak{t}$ in sich drehen soll.[1] Die hierdurch erklärte Linienelementfunktion $\Psi(P, \mathfrak{t})$, die „*Kennfunktion*" der Übertragung, erlaubt es, für jeden die Bewegung mitmachenden Vektor $\mathfrak{e}$ der Berührebene die *tangentiale Geschwindigkeitskomponente* zu bestimmen; diese drückt sich mit Hilfe des Einheitsvektors $\mathfrak{n}$ der Normalen der orientierten Fläche $\mathfrak{F}$ in P und der Bogenlänge s einer beliebigen Flächenkurve mit der Tangente $(P, \mathfrak{t})$ folgendermaßen aus:

$$\mathfrak{n} \times \frac{d\mathfrak{e}}{ds} \times \mathfrak{n} = \Psi \mathfrak{n} \times \mathfrak{e}. \tag{1}$$

Wir wollen voraussetzen, daß die Kennfunktionen, mit denen wir es zu tun haben werden, in allen Linienelementen, höchstens mit Ausnahme einzelner sog. singulärer Stellen der Übertragung, stetig seien.

[1] Vgl. des Verf. Arbeit über „Richtungsübertragungen auf einer Fläche", Jahresbericht d. DMV, Bd. 55 (1952), S. 89 ff. – Man beachte, daß zu der Drehung der über $\mathfrak{F}$ hingleitenden Berührebene in sich (dem „spinning") noch eine Drehung um eine tangentiale Drehachse (ein „rolling") hinzukommt; l. c. S. 93 f. Bekanntlich hat William Thomson, der spätere Lord Kelvin, schon im Jahr 1867 die infinitesimale Parallelverschiebung als ein „rolling without spinning" der Tangentialebene betrachtet; l. c. S. 103, Fußnote.

2. Es werde nun eine umkehrbar eindeutige und zweimal stetig differenzierbare *Abbildung der Punkte von* $\mathfrak{F}$ *auf die Punkte einer anderen Fläche* $\bar{\mathfrak{F}}$ betrachtet;[2] sie involviert auch eine umkehrbar eindeutige und stetig differenzierbare Abbildung der Linienelemente von $\mathfrak{F}$ auf die von $\bar{\mathfrak{F}}$. Jede einer Größe vermöge dieser Abbildung entsprechende Größe werde durch einen Querstrich gekennzeichnet.

3. Es erhebt sich dann die *Frage, ob kraft des Abbildungsgesetzes* $\mathfrak{F} \rightarrow \bar{\mathfrak{F}}$ *jede Richtungsübertragung auf* $\mathfrak{F}$ *wieder in eine solche auf* $\bar{\mathfrak{F}}$ *übergeht.* Das können wir, obwohl die Abbildung in entsprechenden Berührebenen eine Affinität induziert, die im allgemeinen nicht längentreu, nicht einmal winkeltreu ist, tatsächlich erreichen, wenn wir folgendes festsetzen: Ein Linienelement $(P, \mathfrak{t})$ der Fläche $\mathfrak{F}$ beschreibt bei ständiger Verschiebung in seiner eigenen Richtung $\mathfrak{t}$, wenn es sich dabei gemäß der durch die Funktion Ψ festgelegten Übertragungsvorschrift dreht, eine Gleitbewegung längs einer durch das Ausgangselement in ihrem ganzen weiteren Verlauf bestimmten Flächenkurve c, einer „*Kennlinie*" der Übertragung.[3] Ihr entspricht vermöge der Abbildung $\mathfrak{F} \rightarrow \bar{\mathfrak{F}}$ eindeutig eine Bewegung des Bildelementes $(\bar{P}, \bar{\mathfrak{t}})$, die dieses längs der von ihm dauernd berührten Bildkurve $\bar{c}$ von c vollführt; die Abbildung $\mathfrak{F} \rightarrow \bar{\mathfrak{F}}$ ist ja als Punkttransformation zugleich eine Berührungstransformation. Durch diese Bildbewegung kann man aber wiederum eine Richtungsübertragung auf $\bar{\mathfrak{F}}$ definieren; sie ist es, die wir im folgenden in erster Linie als die vermöge der Abbildung $\mathfrak{F} \rightarrow \bar{\mathfrak{F}}$ der ursprünglich auf $\mathfrak{F}$ gegebenen Übertragung entsprechende ansehen wollen.

Es ist zu beachten, daß die getroffene Festsetzung nur eine unter vielen möglichen Vereinbarungen darstellt, nach denen einer Übertragung zuzuordnende Übertragungen erklärt werden können.

---

[2] Vgl. d. Verf. Arbeit über die „Allgemeine Theorie der Flächenabbildungen" in den Nachrichten aus dem Reichsvermessungsdienst, Jahrgang 1942, S. 299 ff.

[3] Vgl. die in Fußnote [1] genannte Arbeit S. 95 f.

Besonders hervorgehoben sei, daß der Richtungsübertragung auf $\bar{\mathfrak{F}}$, die nach unserer Erklärung einer Richtungsübertragung auf $\mathfrak{F}$ als zugeordnet gelten soll, vermöge der inversen Abbildung $\bar{\mathfrak{F}} \rightarrow \mathfrak{F}$ nach dem gleichen Prinzip wieder die ursprüngliche Übertragung auf $\mathfrak{F}$ entspricht, so daß diese Abbildung der Übertragungen ebenfalls umkehrbar eindeutig ist.

Zwei Richtungsübertragungen auf einem Paar punktweise aufeinander abgebildeter Flächen, die einander in der beschriebenen Weise entsprechen, mögen miteinander „*gekoppelt*" heißen.

Nach dem Gesagten haben *gekoppelte Übertragungen* des Flächenpaares $\mathfrak{F} \rightarrow \bar{\mathfrak{F}}$ einander *entsprechende Systeme von Kennlinien* $c \rightarrow \bar{c}$; diese sind als die Lösungen der Differentialgleichung für den Ortsvektor $\mathfrak{r}$ der Kurvenpunkte

$$\mathfrak{n} \times \frac{d^2\mathfrak{r}}{ds^2} \times \mathfrak{n} = \Psi \mathfrak{n} \times \frac{d\mathfrak{r}}{ds} \tag{2}$$

bestimmt, die aus (1) folgt, wenn $\mathfrak{e}$ durch $\mathfrak{t} = \frac{d\mathfrak{r}}{ds}$ ersetzt wird, sofern noch die Forderung hinzugefügt wird, daß $\mathfrak{r}$ allezeit der Ortsvektor eines Flächenpunktes sei.

4. *Wir fragen uns nun, in welchem Zusammenhang die Kennfunktionen Ψ und $\bar{\Psi}$ gekoppelter Übertragungen miteinander stehen.*

Zur Vereinfachung der sich als nötig erweisenden Rechnungen wollen wir unseren weiteren Überlegungen geeignete Bezugsnetze auf $\mathfrak{F}$ und $\bar{\mathfrak{F}}$ zugrunde legen, nämlich ein Paar von „*Hauptnetzen*" für die Abbildung $\mathfrak{F} \rightarrow \bar{\mathfrak{F}}$, d. s. einander entsprechende orthogonale Netze von Koordinatenlinien;[4] bekanntlich gibt es, wenn die Abbildung nicht winkeltreu ist, unter den oben gemachten Voraussetzungen stets genau ein solches Paar, während bei Vorliegen von Winkeltreue jedes beliebige orthogonale Netz auf $\mathfrak{F}$ und das ihm entsprechende auf $\bar{\mathfrak{F}}$ als Paar von Bezugsnetzen gewählt werden kann. Die einzelnen Kurvenscharen dieser Netze mögen ebenso wie die auf sie bezüglichen Skalare und Vektoren durch die Indizes 1 und 2 unterschieden werden.

[4] Vgl. die in [2] genannte Arbeit S. 302.

Mit Hilfe der *linearen Abbildungsmaßstäbe* für die durch die Netzlinien festgelegten „*Hauptrichtungen*" $\mathfrak{t}_1$, $\mathfrak{t}_2$ auf $\mathfrak{F}$ und $\bar{\mathfrak{t}}_1$, $\bar{\mathfrak{t}}_2$ auf $\bar{\mathfrak{F}}$, der „*Hauptmaßstäbe*" $m_1 = \frac{d\bar{s}_1}{d s_1}$ und $m_2 = \frac{d\bar{s}_2}{d s_2}$, läßt sich der Maßstab $m = \frac{d\bar{s}}{d s}$ für eine beliebige, durch den Richtungswinkel φ gegen die erste Hauptrichtung gegebene Tangentenrichtung

$$\mathfrak{t} = \mathfrak{t}_1 \cos\varphi + \mathfrak{t}_2 \sin\varphi, \tag{3}$$

wie ebenfalls als bekannt vorausgesetzt werde, aus der Gleichung

$$m^2 = m_1^2 \cos^2\varphi + m_2^2 \sin^2\varphi \tag{4}$$

bestimmen. Ferner gilt

$$\bar{\mathfrak{t}} = \bar{\mathfrak{t}}_1 \cos\bar{\varphi} + \bar{\mathfrak{t}}_2 \sin\bar{\varphi}; \tag{$\bar{3}$}$$

da die den Vektoren $\mathfrak{t}_1$, $\mathfrak{t}_2$ und $\mathfrak{t}$ vermöge der Abbildung $\mathfrak{F} \to \bar{\mathfrak{F}}$ entsprechenden Vektoren – weil wir auch unter $\bar{\mathfrak{t}}_1$, $\bar{\mathfrak{t}}_2$ und $\bar{\mathfrak{t}}$ Einheitsvektoren verstehen wollen – $m_1\bar{\mathfrak{t}}_1$, $m_2\bar{\mathfrak{t}}_2$ und $m\bar{\mathfrak{t}}$ sind, also wegen der zwischen den Berührebenen der Flächen $\mathfrak{F}$ und $\bar{\mathfrak{F}}$ in P und $\bar{P}$ bestehenden Affinität

$$m\bar{\mathfrak{t}} = m_1\bar{\mathfrak{t}}_1 \cos\varphi + m_2\bar{\mathfrak{t}}_2 \sin\varphi \tag{5}$$

gilt, so folgt

$$\cos\bar{\varphi} = \frac{m_1}{m}\cos\varphi, \quad \sin\bar{\varphi} = \frac{m_2}{m}\sin\varphi, \tag{6}$$

mithin

$$\operatorname{tg}\bar{\varphi} = \frac{m_2}{m_1}\operatorname{tg}\varphi. \tag{6'}$$

5. Um nun $\bar{\Psi}$ durch Ψ auszudrücken, können wir uns auf den unmittelbar aus (2) fließenden Ausdruck

$$\Psi = \mathfrak{n}\,\mathfrak{t}\,\frac{d\mathfrak{t}}{ds} \tag{7}$$

und den entsprechenden

$$\bar{\Psi} = \bar{\mathfrak{n}}\,\bar{\mathfrak{t}}\,\frac{d\bar{\mathfrak{t}}}{d\bar{s}} \tag{$\bar{7}$}$$

stützen.

In (7) steht auf der rechten Seite ein bekannter Ausdruck für die *geodätische Krümmung g;*[5] es sei daran erinnert, daß sich dies am einfachsten durch Anwendung der Grundformel der Flächentheorie

$$\frac{d\mathfrak{q}}{ds} = \mathfrak{d} \times \mathfrak{q} \tag{8}$$

ergibt, in der $\mathfrak{q}$ einen beliebigen, mit dem begleitenden Dreibein der Flächenkurve starr verbundenen Vektor und

$$\mathfrak{d} = \mathfrak{g} + g\mathfrak{n} \tag{8'}$$

den Darboux-Cesàroschen Vektor des Begleitkörpers bedeutet, dessen Tangentialkomponente, die vektorielle Linienelementfunktion $\mathfrak{g} = \mathfrak{n} \times \frac{d\mathfrak{n}}{ds}$, die Normalwindung und -krümmung für die Richtung $\mathfrak{t}$ als Längs- und Querkomponentenbeträge besitzt: man braucht nur $\mathfrak{q} = \mathfrak{t}$ zu setzen und beide Seiten von (8) mit $\mathfrak{n} \times \mathfrak{t}$ skalar zu multiplizieren. Die Gleichung (7) besagt demnach, daß der Wert der Kennfunktion gleich dem der geodätischen Krümmung g der das Argumentelement $(P, \mathfrak{t})$ von Ψ enthaltenden Kennlinie an der Stelle P ist.[5]

Nach dieser Überlegung muß sich *die Kennfunktion* Ψ vermöge der Flächentransformation $\mathfrak{F} \to \bar{\mathfrak{F}}$ *wie die geodätische Krümmung* ändern. Das Gesetz dieser Änderung wurde aber schon in früheren Jahren von mehreren Autoren nach verschiedenen Verfahren aufgestellt;[6] wir wollen des weiteren die für unsere Zwecke geeignetste Darstellung benützen:

$$\bar{\Psi} = (m_1 m_2 \Psi + \Phi) : m^3, \tag{9}$$

wo Φ eine *kubische Form* in $\cos\varphi$ und $\sin\varphi$ ist, deren Koeffizienten rational von den Hauptmaßstäben m_i und ihren partiellen Ableitungen 1. O. nach den Bogenlängen der Netzlinien, $\frac{\partial m_i}{\partial s_k} =$

[5] Dieser Ausdruck für die „Seitenkrümmung" wurde schon von Gauß gefunden (Werke VIII, S. 390); vgl. die in [1] genannte Arbeit S. 95.

[6] Einige dieser Autoren sind aufgeführt in d. Verf. Note „Der Einfluß einer Flächentransformation auf die geodätischen Krümmungen", Sitz.-Ber. d. Bayer. Ak. d. Wiss., Math.-nat. Kl., 1957, S. 15 ff.; in der hier erforderlichen Form steht das Ergebnis dort auf S. 19.

$= m_{ik}$, abhängen, also biegungsinvariante Ortsfunktionen sind:

$$\begin{aligned} \Phi = {} & \frac{m_1}{m_2}\left((m_1^2 - m_2^2)\, g_1 - m_1 m_{12}\right) \cos^3\varphi + \\ & + \frac{m_2}{m_1}\left((m_2^2 - m_1^2)\, g_2 + m_2 m_{21}\right) \sin^3\varphi + \\ & + (2\, m_1 m_{21} - m_2 m_{11}) \cos^2\varphi \sin\varphi - \\ & - (2\, m_2 m_{12} - m_1 m_{22}) \cos\varphi \sin^2\varphi . \end{aligned} \tag{9'}$$

Die Linienelementfunktion Φ hängt ersichtlich nur vom Gesetz der Abbildung $\mathfrak{F} \to \bar{\mathfrak{F}}$ ab und ist vom Übertragungsgesetz, das sich in der Kennfunktion Ψ manifestiert, vollkommen unabhängig.

6. Wir wollen uns jedoch nicht mit diesem Hinweis auf ein früheres Ergebnis begnügen, sondern uns seine Herleitung in den Hauptzügen vor Augen führen.

Die geodätische Krümmung läßt sich mit Hilfe der Linienelementfunktion

$$\Omega = g_1 \cos\varphi + g_2 \sin\varphi \tag{10}$$

ausdrücken; es ist nämlich nach Bonnet und Liouville

$$g = \Omega + \frac{d\varphi}{ds}. \tag{11}$$

Natürlich ist, allgemein gesehen, die *geodätische Krümmung keine Linienelementfunktion*; dies kommt in dem Glied $\frac{d\varphi}{ds}$ zum Ausdruck, das für eine beliebig ausgewählte, bestimmte Richtung φ noch jeden Wert annehmen kann. Daß wir oben durch Gleichsetzen von Ψ und g eine Linienelementfunktion erhielten, lag daran, daß dort g jeweils nur die geodätische Krümmung der in der Richtung $\mathfrak{t}$ durch P laufenden Kennlinie der Übertragung bedeutete; in der Gleichung

$$\Psi = \Omega + \frac{d\varphi}{ds} \tag{12}$$

hat denn auch $\frac{d\varphi}{ds}$ den Wert, der dadurch bestimmt ist, daß φ in jedem Punkt der Kurve c den Richtungswinkel der Tangente dieser bestimmten Kurve bedeutet und daher eine wohlbestimmte Funktion der Bogenlänge s dieser Kurve ist. – Es sei daran erinnert, daß wir in (12) die Differentialgleichung der Kennlinien als Kurven auf der Fläche vor uns haben.[7]

Nach (6') wird nun

$$\frac{d\bar{\varphi}}{d\bar{s}} = \frac{m_1 m_2}{m^3}\,\frac{d\varphi}{d s} + \left(m_1 \frac{d m_2}{d s} - m_2 \frac{d m_1}{d s}\right) \frac{\cos\varphi \sin\varphi}{m^3}$$

oder, wenn wir uns des bekannten Operators

$$\frac{d}{d s} = \cos\varphi \frac{\partial}{\partial s_1} + \sin\varphi \frac{\partial}{\partial s_2} \tag{13}$$

bedienen:

$$\frac{d\bar{\varphi}}{d\bar{s}} = \left(m_1 m_2 \frac{d\varphi}{d s} + \Phi'\right) : m^3 \tag{14}$$

mit

$$\Phi' = (m_1 m_{21} - m_2 m_{11}) \cos^2\varphi \sin\varphi + \\ + (m_1 m_{22} - m_2 m_{12}) \cos\varphi \sin^2\varphi . \tag{14'}$$

Als Transformationsgesetz für Ω finden wir, wenn wir zunächst aus den bekannten Ausdrücken für die geodätischen Krümmungen orthogonaler Parameterlinien die Übergangsgleichungen für diese Größen herleiten:[8]

$$\bar{g}_1 = (m_1 g_1 - m_{12}) : m_1 m_2, \quad \bar{g}_2 = (m_2 g_2 + m_{21}) : m_1 m_2, \tag{15'}$$

bei Berücksichtigung von (6)

$$\bar{\Omega} = \frac{m_1 g_1 - m_{12}}{m_2 m} \cos\varphi + \frac{m_2 g_2 + m_{21}}{m_1 m} \sin\varphi . \tag{15}$$

Durch Addition von (14) und (15) ergibt sich, nachdem mit Hilfe von (12) noch $\frac{d\varphi}{d s}$ eliminiert sowie (4) und (10) berücksichtigt wurde, die Beziehung (9).

---

[7] Vgl. die in [1] genannte Arbeit S. 97. – Die Differentialgleichung der Kennlinien als Raumkurven lautet (vgl. (2) auf S. 265):

$$\frac{d^2 \mathfrak{r}}{d s^2} = (\mathfrak{g} + \Psi \mathfrak{n}) \times \frac{d \mathfrak{r}}{d s} .$$

[8] Vgl. die in [6] genannte Arbeit S. 18.

Wir bemerken, daß der zwischen $\frac{d\varphi}{ds}$ und $\frac{d\bar{\varphi}}{d\bar{s}}$ bestehende Zusammenhang, der sich in (14) ausdrückt, sich von der zwischen Ψ und $\bar{\Psi}$ geltenden Beziehung (9) nur dadurch unterscheidet, daß an die Stelle von Φ eine andere kubische Form, Φ', tritt.

Auch zwischen Ω und $\bar{\Omega}$ kann eine Relation aufgestellt werden, die formal wie (9) gebaut ist, die aber an Stelle von Φ wieder eine andere kubische Form, und zwar

$$\Phi'' = \Phi - \Phi' \tag{16}$$

enthält: man hat nur die auf der rechten Seite von (15) stehenden Glieder mit $\frac{m_1^2 \cos^2\varphi + m_2^2 \sin^2\varphi}{m^2} \equiv 1$ zu multiplizieren und $\frac{m_1 m_2}{m^3}\,\Omega - \frac{m_1 m_2}{m^3}\,(g_1 \cos\varphi + g_2 \sin\varphi)\cdot(\cos^2\varphi + \sin^2\varphi) \equiv 0$ hinzuzufügen.

Man mag sich fragen, warum sich Ω nicht wie Ψ transformiert, obwohl Ω doch auch als Kennfunktion einer Richtungsübertragung – die sogar für das Netz unter allen Übertragungen eine besondere Rolle spielt – benützt werden kann. Das liegt jedoch daran, daß die Kennlinien dieser Übertragung die isogonalen Trajektorien der Netzlinien sind, diese aber im allgemeinen durch die Abbildung $\mathfrak{F} \to \bar{\mathfrak{F}}$ nicht in die Isogonaltrajektorien der Netzlinien auf $\bar{\mathfrak{F}}$ übergehen; d. h. aber doch: Der Übergang der Übertragung mit der Kennfunktion Ω in die mit der Kennfunktion $\bar{\Omega}$ geht im allgemeinen nicht nach der am Anfang (in Abschnitt 3) getroffenen Abmachung vor sich; dies tritt vielmehr nur dann ein, wenn die Zahl $m_1 : m_2$ konstant ist, in welchem Fall in der Tat gemäß (14') $\Phi' = 0$ ist.

7. Das Ergebnis, das sich in (9) ausspricht, ermöglicht es uns, eine *geometrische Deutung der kubischen Form* Φ zu geben, und zwar dadurch, daß wir $\Psi = 0$ setzen: Eine identisch verschwindende Übertragungsfunktion Ψ kennzeichnet die infinitesimale Parallelverschiebung oder, kurz, die „geodätische Verschiebung oder Übertragung" auf der Fläche $\mathfrak{F}$;[1] die dieser auf $\bar{\mathfrak{F}}$ entsprechende Übertragung hat also nach (9) die Kennfunktion

$$\bar{\Psi} = \Phi : m^3. \tag{17}$$

Eine analoge Betrachtung kann für die inverse Abbildung $\bar{\mathfrak{F}} \to \mathfrak{F}$ durchgeführt werden; sie läßt uns erkennen, daß der Übertragung mit der Kennfunktion

$$\Psi = -\Phi : m_1 m_2 \tag{$\overline{17}$}$$

auf $\mathfrak{F}$ die infinitesimale Parallelverschiebung auf $\bar{\mathfrak{F}}$ entspricht. Damit haben wir den Satz bewiesen:

Vermöge der Abbildung $\mathfrak{F} \leftrightarrows \bar{\mathfrak{F}}$ sind miteinander gekoppelt einerseits die geodätische Richtungsübertragung auf $\mathfrak{F}$ und die Übertragung mit der Kennfunktion $\Phi : m^3$ auf $\bar{\mathfrak{F}}$, andererseits die Übertragung mit der Kennfunktion $-\Phi : m_1 m_2$ auf $\mathfrak{F}$ und die geodätische Verschiebung auf $\bar{\mathfrak{F}}$.

Diese Aussage steht im Einklang mit der folgenden Bemerkung, die den Zusammenhang zwischen der Form Φ und der in der Umkehrung der Gleichung (9) an die Stelle von Φ tretenden Form $\bar{\Phi}$ betrifft; diese Umkehrung lautet ja:

$$\Psi = (\bar{m}_1 \bar{m}_2 \bar{\Psi} + \bar{\Phi}) : \bar{m}^3 .$$

Da allgemein $\bar{m} = 1 : m$ ist, folgt daraus

$$\Psi = \left(\frac{1}{m_1 m_2} \bar{\Psi} + \bar{\Phi}\right) \cdot m^3 ,$$

also

$$\bar{\Psi} = \frac{m_1 m_2}{m^3} \Psi - m_1 m_2 \bar{\Phi} .$$

Durch Vergleich mit (9) finden wir

$$\bar{\Phi} : \bar{m}^3 = -\Phi : m_1 m_2 \tag{18}$$

oder

$$\Phi : m^3 = -\bar{\Phi} : \bar{m}_1 \bar{m}_2 . \tag{$\overline{18}$}$$

Das gleiche Ergebnis könnte man auch, allerdings mit größerem Aufwand an Mühe, aus (9') unter Berücksichtigung von (15') durch Rechnung erhalten.

Zu beachten ist, daß im Falle der Winkeltreue der Abbildung $\mathfrak{F} \to \bar{\mathfrak{F}}$ die geodätische Richtungsübertragung auf der einen Fläche mit einer „linearen" Übertragung – deren Kennfunktion die allgemeine Gestalt $\Psi(P, t) = \Psi_1(P) \cos\varphi + \Psi_2(P) \sin\varphi$ hat –[9] auf der andern Fläche gekoppelt ist; denn bei Vorliegen von Winkeltreue ist $\Phi : m$ eine Linearform in $\cos\varphi$ und $\sin\varphi$.[10]

8. Zwei naheliegende Fragen seien hier aufgeworfen, obwohl sie noch nicht vollständig beantwortet werden können:

a) *Kann eine lineare Übertragung*[9] *auf* $\mathfrak{F}$ *wieder in eine solche auf* $\bar{\mathfrak{F}}$ *übergehen?*

Sicher zu bejahen ist diese Frage im Falle einer winkeltreuen Abbildung $\mathfrak{F} \to \bar{\mathfrak{F}}$;[10] denn dann ist Φ eine lineare Form in $\cos\varphi$ und $\sin\varphi$ und m für alle von einem Punkt ausstrahlenden Richtungen in der Fläche konstant, mit andern Worten eine reine Ortsfunktion $\left(\frac{\partial m}{\partial \varphi} = 0\right)$.

Einen weiteren hierher gehörenden Fall erhalten wir, wenn $m_1 \neq m_2$ ist und eine geodätische Abbildung vorliegt, die durch das identische Verschwinden von Φ charakterisiert ist;[11] dann wird die Linearität des Verteilungsgesetzes von Ψ durch die Art der Veränderlichkeit von m um jeden einzelnen Punkt herum nur dann nicht gestört, wenn auch $\Psi = 0$ ist, d. h. wenn die Übertragung die geodätische ist, und zwar auf $\mathfrak{F}$ wie auf $\bar{\mathfrak{F}}$.

b) *Wann entspricht einer integrablen Richtungsübertragung*[12] *auf* $\mathfrak{F}$ *wieder eine solche auf* $\bar{\mathfrak{F}}$?

Diese Übertragungen bilden einen Sonderfall der linearen. Die Übertragung mit der Kennfunktion Ω bietet ein Beispiel dafür.

Die integrablen Richtungsübertragungen sind dadurch ausgezeichnet, daß das System ihrer Kennlinien aus einem Feld von Kennlinien, d. h. einer Schar von Kurven, von denen durch jeden Punkt auf $\mathfrak{F}$ genau eine hindurchgeht, durch Hinzufügen ihrer sämtlichen isogonalen Trajektorien aufgebaut werden

---

[9] Die Linienelementfunktion Ψ hat in diesem Fall ein „lineares Verteilungsgesetz"; vgl. die in [1] genannte Arbeit S. 98 ff.

[10] Vgl. die in [6] genannte Arbeit S. 20.

[11] Vgl. die in [6] genannte Arbeit S. 21.

[12] Vgl. die in [1] genannte Arbeit S. 105 ff., auch diese Sitz.-Ber. 1953, S. 141 ff.

kann.[13] Damit nicht nur die Kennlinien auf $\mathfrak{F}$, sondern auch die ihnen entsprechenden auf $\bar{\mathfrak{F}}$ diese Eigenschaft besitzen, ist notwendig und hinreichend, daß entweder die Abbildung $\mathfrak{F} \to \bar{\mathfrak{F}}$ winkeltreu ist, oder aber, daß die Netzlinien zum System der Kennlinien gehören, d. h. die Kennfunktion der Übertragung Ω ist,[13] und zugleich das Verhältnis $m_1 : m_2 \neq 1$ konstant ist. Dies beweisen wir durch die folgende Überlegung, die nur den nicht trivialen Fall $m_1 \neq m_2$ zum Gegenstand hat:

Damit die charakteristische Bedingung der Integrabilität einer Richtungsübertragung auch für die Bildübertragung erfüllt sei, muß einem über die Fläche $\mathfrak{F}$ bewegten Büschel von Berührenden, das seiner Ausgangslage immer kongruent bleibt, vermöge der Abbildung $\mathfrak{F} \to \bar{\mathfrak{F}}$ ein über $\bar{\mathfrak{F}}$ bewegtes Tangentenbüschel entsprechen, das ebenfalls seiner Ausgangslage dauernd kongruent bleibt, obwohl es wegen der Verschiedenheit der Größen m_1 und m_2 dem über $\mathfrak{F}$ hingleitenden Büschel, dessen Bild es ist, nicht kongruent sein kann. Fassen wir nun insbesondere die Kennlinie auf $\mathfrak{F}$ ins Auge, die im Ausgangspunkt der Bewegung die Richtung der Netzlinie der ersten Schar besitzt. Betrachten wir zudem die Tangente, die die Netzlinie der zweiten Schar im Ausgangspunkt berührt. Diese Tangente bildet während der weiteren Bewegung der Berührebene längs der Kennlinie mit dieser ständig einen rechten Winkel. Ihre Bildtangente auf $\bar{\mathfrak{F}}$ muß mit der Kennlinie auf $\bar{\mathfrak{F}}$ einen konstanten Winkel bilden, der gleich dem Anfangswinkel, also ebenfalls ein Rechter bleiben muß. Nehmen wir nun an, die Kennlinie falle in ihrem weiteren Verlauf nicht mit der Netzlinie, die sie am Anfang berührte, zusammen, so würde das zu dem Widerspruch führen, daß einem rechten Winkel auf $\mathfrak{F}$, dessen Schenkel nicht in die Hauptrichtungen weisen, ein rechter Winkel auf $\bar{\mathfrak{F}}$ entspräche, was mit unserer Voraussetzung $m_1 \neq m_2$ nicht in Einklang stünde. Die Netzlinien gehören demnach zu den Kennlinien; jede Kennlinie muß folglich isogonale Trajektorie der Netzlinien sein. Damit aber jeder solchen Linie auf $\mathfrak{F}$ eine Isogonaltrajektorie des Netzes auf $\bar{\mathfrak{F}}$ entspricht, müssen sich die untereinander gleichen Winkel, die die Tangenten von $\mathfrak{F}$ mit der ersten Netzlinie einschließen, in allen Punkten

[13] Vgl. die in [1] genannte Arbeit S. 110.

in untereinander gleiche Tangentenwinkel auf $\bar{\mathfrak{F}}$ transformieren. Das ist nur möglich, wenn das Verhältnis $m_1 : m_2$, zunächst längs der Netzlinien der ersten Schar, konstant ist. Die analoge Überlegung kann für die Netzlinien der zweiten Schar durchgeführt werden. Das führt zu dem Schluß, daß über die ganze Fläche hin $m_1 : m_2 = \text{const.}$ sein muß.

9. *Gibt es auf* $\mathfrak{F} \leftrightarrows \bar{\mathfrak{F}}$ *gekoppelte Richtungsübertragungen mit übereinstimmenden Kennfunktionen* $\bar{\Psi} = \Psi$?

Aus (9) folgt, daß dann

$$\Psi = \Phi : (m^3 - m_1 m_2) \tag{19}$$

sein muß.

Wegen der oben (in Abschnitt 5) hervorgehobenen Bedeutung von Ψ sind die *Kennlinien dieser Übertragung* die von Herrn Sauer kürzlich untersuchten „*geodätisch invarianten Kurven*" der Abbildung $\mathfrak{F} \to \bar{\mathfrak{F}}$,[14] deren Differentialgleichung wir demnach in (12) vor uns haben, sobald wir dort den aus (19) entnommenen Ausdruck für Ψ einsetzen.

Speziell für eine winkeltreue Abbildung ist die in diesem Sinn „invariante Kennfunktion", wie sich aus der aus (9) folgenden Formel von Schols[10] ergibt, wenn in ihr g und $\bar{g}$ durch $\Psi = \bar{\Psi}$ ersetzt wird,

$$\Psi = \frac{\partial m}{\partial s^*} : m\,(1 - m), \tag{19'}$$

wobei $\frac{\partial}{\partial s^*}$ die geometrische Ableitung in der Richtung $\mathfrak{t}^* = \mathfrak{n} \times \mathfrak{t}$ bedeutet, die in der üblichen Weise aus dem Gradienten der Ortsfunktion m gebildet werden kann.

Ein Beispiel für eine gegenüber der Abbildung $\mathfrak{F} \to \bar{\mathfrak{F}}$ „invariante Richtungsübertragung" bietet, wie ein Blick auf (19) zeigt, die in anderem Zusammenhang (in Abschnitt 8) schon besprochene infinitesimale Parallelverschiebung bei geodätischer Abbildung.

Im Falle der Längentreue der Abbildung liegen triviale Verhältnisse vor.

---

[14] Robert Sauer, „Geodätisch invariante Kurven bei beliebigen Abbildungen von Flächen", Zeitschr. f. angew. Math. u. Mech. Bd. 40 (1960), S. 47 ff.

Allgemein aber ist zu beachten: Wenn wir, wie bisher immer, von der Kennfunktion Stetigkeit in der dreidimensionalen Mannigfaltigkeit der Linienelemente fordern, können wir (19) nur dann als Antwort auf unsere Frage gelten lassen, wenn der Ausdruck $m^3 - m_1 m_2$ für keine Richtung verschwindet, d. h. nur für solche Bereiche des Flächenpaares, für die der Wert des Flächenmaßstabes $m_1 m_2$ nicht zwischen den Extremwerten m_1^3 und m_2^3 von m^3 liegt, wo also

$$(m_1 - m_2^2)\,(m_2 - m_1^2) > 0 \tag{19''}$$

ist. Und für Linienelemente, für die sowohl Φ als auch $m^3 - m_1 m_2$ verschwinden – ein Fall, der bei lokaler Längentreue vorkommen kann –, erhalten wir nur dann eine reguläre Richtungsübertragung, wenn Ψ beim Hineinrücken in das Linienelement einem Grenzwert zustrebt. – Die Behandlung der hiermit zusammenhängenden Fragen, die auch von den Gestaltsverhältnissen der Hauptnetze in der Umgebung der zu betrachtenden Stelle abhängt, sei einer eigenen Untersuchung vorbehalten.

10. Schließlich möge noch folgende Fragestellung berührt werden:

Es seien $\Psi_1, \Psi_2, \ldots . \Psi_n$ die Kennfunktionen von n Richtungsübertragungen auf $\mathfrak{F}$; $c_1, c_2, \ldots . c_n$ seien konstante Zahlen. Dann ist auch

$$\Psi = \sum_1^n c_i \Psi_i$$

eine Übertragungsfunktion, von der wir sagen, sie sei aus den Ψ_i durch *Superposition* mit Hilfe der Koeffizienten c_i gebildet. Das beruht darauf, daß die einzige Bedingung, die eine Linienelementfunktion erfüllen muß, um als Kennfunktion einer Übertragung brauchbar zu sein, die ist, daß ihr Verteilungsgesetz in jedem Punkt der Fläche antisymmetrisch ist,[15] und eben diese

[15] Vgl. die in [1] genannte Arbeit S. 95. – Die c_i können auch Ortsfunktionen, ja sogar Linienelementfunktionen mit symmetrischem Verteilungsgesetz sein – wofür der lineare Abbildungsmaßstab m oder die Normalwindung oder -krümmung Beispiele wären –. Die Antisymmetrie des Verteilungsgesetzes ist eine wesentliche Eigenschaft der kubischen Form Φ.

Eigenschaft der Ψ_i bleibt bei der vollzogenen Superposition erhalten.

Wie drückt sich nun $\overline{\Psi}$ durch die Funktionen $\overline{\Psi}_i$ aus?

Da

$$\overline{\Psi}_i = (m_1 m_2 \Psi_i + \Phi) : m^3$$

ist, so gilt

$$\sum_1^n c_i \overline{\Psi}_i = \left(m_1 m_2 \sum_1^n c_i \Psi_i + \sum_1^n c_i \Phi\right) : m^3.$$

Aber es ist

$$\overline{\Psi} = (m_1 m_2 \Psi + \Phi) : m^3 = \left(m_1 m_2 \sum_1^n c_i \Psi_i + \Phi\right) : m^3.$$

Daraus folgt:

$$\overline{\sum_1^n c_i \Psi_i} = \sum_1^n c_i \overline{\Psi}_i + \left(1 - \sum_1^n c_i\right) \Phi : m^3. \tag{20}$$

Speziell gilt also z. B.:

$$\overline{c\Psi} = c\overline{\Psi} + (1 - c)\, \Phi : m^3$$

und

$$\overline{\Psi_1 + \Psi_2} = \overline{\Psi}_1 + \overline{\Psi}_2 - \Phi : m^3.$$

Die Transformierte der Kennfunktion einer Übertragung, die durch Superposition einer endlichen Anzahl von Übertragungen entstanden ist, ist demnach, wenn $\Phi \neq 0$ ist, dann und nur dann gleich der durch die analoge Superposition aus den transformierten Kennfunktionen entstehenden Funktion, wenn $\sum_1^n c_i = 1$ ist. Es fällt auf, daß dies die gleiche Bedingung ist wie die, unter der auf einer Einzelfläche die Superposition integrabler Richtungsübertragungen wieder auf eine integrable Übertragung führt.[16]

Hervorzuheben ist die Tatsache, daß der Superposition von Drehungen der Berührebene in sich an einer Stelle von $\mathfrak{F}$ im allgemeinen nicht einmal im Fall einer winkeltreuen Abbildung $\mathfrak{F} \rightarrow \overline{\mathfrak{F}}$ die Superposition der entsprechenden Drehungen an der Bildstelle auf $\overline{\mathfrak{F}}$ entspricht.

[16] Vgl. die in [1] genannte Arbeit S. 118.