

BAYERISCHE AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN
MATHEMATISCH-NATURWISSENSCHAFTLICHE KLASSE

SITZUNGSBERICHTE

JAHRGANG

1960



MÜNCHEN 1961

VERLAG DER BAYERISCHEN AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN

In Kommission bei der C. H. Beck'schen Verlagsbuchhandlung München

Dynamische, statische und geometrische Abplattung

Von Karl Ledersteger in Wien

Mit einer Figur

Vorgelegt von Herrn Max Kneiβl am 11. November 1960

Das Problem der Beziehungen zwischen der dynamischen, statischen und geometrischen Abplattung der Erde ist besonders aktuell geworden, seit man die statische Abplattung aus der Drehung der Bahnebenen der künstlichen Satelliten vermutlich mit wesentlich größerer Genauigkeit ableiten kann, als dies früher aus den Ungleichheiten der Mondbewegung möglich war. Andererseits erweist es sich als möglich, das aus den Beobachtungen der künstlichen Satelliten abgeleitete Resultat für die statische Abplattung an Hand bestimmter linearer Reihen von heterogenen sphäroidischen Gleichgewichtsfiguren mit der dynamischen Abplattung zu verbinden und so einer unabhängigen Überprüfung zu unterziehen.

Wir gehen von den Definitionen für die dynamische und statische Abplattung aus:

$$(1) \quad H = \frac{C-A}{C}; \quad K/a^2 = \frac{C-A}{Ea^2},$$

in welchen C und A das polare und äquatoriale Hauptträgheitsmoment, E die Erdmasse und a den Äquatorradius der Figur bedeuten. Die dynamische Abplattung oder „mechanische Elliptizität“ H folgt bekanntlich aus der Präzessionskonstante P . In das Verhältnis P/H geht auch die Mondmasse ein, welche aus der Mondgleichung ermittelt werden muß und die Hauptquelle für die Unsicherheit in der dynamischen Abplattung darstellt. Es seien die jüngsten Berechnungen zusammengestellt:

W. de Sitter, 1938:

$$P = 5493,157''; \quad \mu^{-1} = 81,53; \quad H = 32\,7942 \cdot 10^{-8}$$

E. C. Bullard, 1948

5493,157

81,271

32 7237

E. Rabe, 1950:

$$P = 5493,793'' \quad \mu^{-1} = 81,375 \quad H = 32\,7559$$

H. Jeffreys, 1959:

$$5493,157 \quad 81,291 \quad 32\,7293$$

Für die Berechnung des Normalsphäroides der Erde¹ habe ich Bullards Ergebnis

$$(2) \quad H = (32\,7237 \pm 59) \cdot 10^{-8} = 1 : (305,59 \pm 0,055)$$

zugrunde gelegt, welcher Wert hier aus Gründen der inneren Übereinstimmung beibehalten wird.

Die statische Abplattung, wie A. Berroth² das Verhältnis der Differenz der Hauptträgheitsmomente zu dem größtmöglichen, mit der gesamten Erdmasse gebildeten Trägheitsmoment treffend bezeichnet, spielt eine wichtige Rolle bei der Bewegung des Mondes und der künstlichen Satelliten um die ruhend gedachte, abgeplattete Erde. Eine erste Bestimmung aus Mondbeobachtungen hat P. A. Hansen (1865) versucht; aus der Diskussion der Hansenschen Werte hat dann Helmert (1884) im Mittel den Wert $10865 \cdot 10^{-7}$ abgeleitet. Neuere Bestimmungen von H. Spencer-Jones (1941) und H. Jeffreys (1948) lieferten $K/a^2 = 10\,9431$, resp. $10\,9280 \cdot 10^{-8}$. Aus der Knotenbewegung des künstlichen Satelliten Sputnik 2 hat King-Hele (1958) für die statische Abplattung den Wert $10\,867 \cdot 10^{-7}$ abgeleitet, während Buchar (1958) unter Zugrundelegung des Niveauellipsoides den Wert $10\,852 \cdot 10^{-7}$ fand. Das jüngste Ergebnis von King-Hele und Merson (1959) beruht auf der Drehung der Bahnebenen von Sputnik 2, Vanguard 1 und Explorer 4:³

$$(3) \quad K/a^2 = (10\,831 \pm 2) \cdot 10^{-7}.$$

¹ K. Ledersteger: Die heterogenen sphäroidischen Gleichgewichtsfiguren und das Normalsphäroid der Erde, *Geofisica pura e applicata*, Bd. 44, Seite 1–19, Milano 1959.

² A. Berroth: Numerische Werte für die Masse und Dichte der Erde sowie ihrer Trägheitsmomente, *Zeitschrift f. Geophysik*, Jg. 18, Würzburg 1943.

Für die Diskussion dieser numerischen Ergebnisse gehen wir von jener linearen Reihe (ω, H) von einparametrischen, heterogenen Gleichgewichtsfiguren aus, in der die Rotationsgeschwindigkeit und die dynamische Abplattung konstant sind. Es läßt sich zeigen, daß in dieser Reihe auch die Trägheitsmomente konstant sind, was auf die Identität der Reihen

$$(4) \quad (\omega, K) \equiv (\omega, C) \equiv (\omega, H)$$

hinausläuft.⁴ Diese Identität besagt mit anderen Worten, daß ω eine eindeutige Funktion der beiden Trägheitsmomente C und A ist. Sie ist übrigens fast selbstverständlich; denn jede Änderung nur eines der beiden Trägheitsmomente bedingt notwendigerweise eine Änderung der Rotationsgeschwindigkeit. Also muß in der linearen Reihe (ω, C) auch das zweite Trägheitsmoment A konstant sein.

Hat das homogene Ausgangsellipsoid einer Reihe (ω, C) die Äquatorachse a_h und beachtet man, daß für jedes homogene Ellipsoid gilt

$$(5) \quad C = \frac{2}{5} E a_h^2,$$

so findet man für das wichtige Verhältnis der statischen zur dynamischen Abplattung

$$(6) \quad q = \left(\frac{K}{a^2} \right) : H = \frac{C}{E a^2} = \frac{2}{5} \left(\frac{a_h}{a} \right)^2.$$

Man kann auch mit Hilfe der transformierten MacLaurinschen Bedingung

$$(7) \quad \frac{\omega^2 a_h^3}{k^2 E} = \frac{4}{5} a_h + \frac{22}{35} a_h^2 + \dots$$

aus der Gleichung

$$(6a) \quad K = \frac{2}{5} H a_h^2$$

³ A. H. Cook: Developments in Dynamical Geodesy, Geophysical Journal of the Royal Astr. Society, Vol. 2, No. 3, London 1959.

⁴ K. Ledersteger: Zur Frage des Dichtegesetzes der einparametrischen heterogenen Gleichgewichtsfiguren, Schweiz. Zeitschrift f. Vermessung, Kulturtechnik u. Photogrammetrie, Winterthur 1960.

die Äquatorachse a_h eliminieren und findet unter Beachtung von

$$(8) \quad H = a_h - \frac{1}{2} a_h^2$$

leicht

$$(9) \quad \frac{K}{H} = \frac{C}{E} = \frac{2}{5} \left[\frac{4}{5} \frac{k^2 E}{\omega^2} \left(H + \frac{9}{7} H^2 \right) \right]^{2/3} = \frac{2}{5} a_h^2.$$

Das Verhältnis q muß in jeder Reihe (4), beginnend mit dem Wert 0,4 für das homogene Ausgangsellipsoid, mit wachsendem a ständig abnehmen, um in der Grenzfigur, also in der Hüllfläche der einparametrischen Gleichgewichtsfiguren, das Minimum 0,231 zu erreichen. Mithin ist q ein charakteristisches Maß für die jeweils erreichte Massenkonzentration. Hält man umgekehrt E , ω und a fest, bildet also eine Figurenreihe (ω, a) , so muß in dieser q gleichfalls bei Annäherung an die Hüllfläche abnehmen. Es muß also in dieser Reihe von Figur zu Figur die Äquatorachse a_h des homogenen Ausgangsellipsoides der jeweils zugehörigen Reihe (ω, H) ständig sinken. Da nun dabei gemäß (6) und (9)

$$(10) \quad \frac{dq}{dH} = \frac{4}{15} \frac{1}{a^2} \left(\frac{4}{5} \frac{k^2 E}{\omega^2} \right)^{2/3} \frac{\left(1 + \frac{18}{7} H \right)}{\sqrt[3]{H + \frac{9}{7} H^2}} > 0,$$

$$\frac{d}{dH} \left(\frac{K}{a^2} \right) = q + H \frac{dq}{dH} > 0,$$

sinkt q gleichzeitig mit der statischen und dynamischen Abplattung.

Legt man die Daten des Normalsphäroides der Erde zugrunde (1):

$$(11) \quad \begin{array}{ll} E = 5976,259 \cdot 10^{24} \text{ g}; & H = 32\,7237 \cdot 10^{-8}; \\ K/a^2 = 10\,8960 \cdot 10^{-8}; & a = 6\,378\,290 \text{ m}; \\ \omega^2 = 5,317\,496 \cdot 10^{-9}; & a_h = 5\,819\,382 \text{ m}; \end{array}$$

so findet man

$$(12) \quad \begin{array}{ll} q = 0,3329\,697; & dq = +68,1181 \, dH; \\ d\left(\frac{K}{a^2}\right) = 0,5559 \, dH; & dH = 1,7989 \, d\left(\frac{K}{a^2}\right). \end{array}$$

Daß das Verhältnis q für das Normalsphäroid der Erde sehr nahe bei $\frac{1}{3}$ liegt, ist schon lange bekannt. Wichtiger erscheint die Tatsache, daß sich in der Umgebung des Normalsphäroides in der Reihe (ω, a) die dynamische Abplattung fast doppelt so rasch wie die statische Abplattung ändert. Wir rechnen einige Figuren mit äquidistanten Werten von H :

H	$32\,7200 \cdot 10^{-8}$	$32\,7400 \cdot 10^{-8}$	$32\,7600 \cdot 10^{-8}$	$32\,7800 \cdot 10^{-8}$
a_h	$32\,7737 \cdot 10^{-8}$	$32\,7938 \cdot 10^{-8}$	$32\,8138 \cdot 10^{-8}$	$32\,8339 \cdot 10^{-8}$
a_h	5 819 160 m	5 820 348 m	5 821 538 m	5 822 729 m
$(a_h : a)^2$	0,832 362	0,832 702	0,833 042	0,833 383
q	0,332 945	0,333 081	0,333 216	0,333 353
K/a_h^2	$13\,0880 \cdot 10^{-8}$	$13\,0960 \cdot 10^{-8}$	$13\,1040 \cdot 10^{-8}$	$13\,1120 \cdot 10^{-8}$
K/a^2	$10\,8940 \cdot 10^{-8}$	$10\,9051 \cdot 10^{-8}$	$10\,9162 \cdot 10^{-8}$	$10\,9273 \cdot 10^{-8}$
C	$80948,74 \cdot 10^{40}$	$80981,79 \cdot 10^{40}$	$81014,90 \cdot 10^{40}$	$81048,06 \cdot 10^{40}$
$C - A$	$264,86 \cdot 10^{40}$	$265,13 \cdot 10^{40}$	$265,40 \cdot 10^{40}$	$265,68 \cdot 10^{40}$
a	$33\,6243 \cdot 10^{-8}$	$33\,6409 \cdot 10^{-8}$	$33\,6576 \cdot 10^{-8}$	$33\,6743 \cdot 10^{-8}$
$1 : a$	297,40	297,26	297,11	296,96

Die Abplattung kann mit der Gleichung

$$(13) \quad 2a = \left[\frac{3K}{a^2} + \bar{\varepsilon} - \frac{25}{56} \bar{\varepsilon}^2 \right] + a^2 - \frac{13}{14} a \bar{\varepsilon}$$

berechnet werden, welche man leicht aus dem Formelsystem der sphäroidischen Gleichgewichtsfiguren (1) gewinnt und in welcher die Größe $\bar{\varepsilon}$ innerhalb der Reihe (ω, a) konstant ist

$$(13a) \quad \bar{\varepsilon} = \frac{\omega^2 a^3}{k^2 E} = 346150 \cdot 10^{-8}.$$

Wir sehen also, daß den bisher aus der Präzessionskonstante abgeleiteten Werten für die dynamische Abplattung durchwegs beträchtlich größere Werte für die statische Abplattung zugeordnet sind, als sie jüngst aus den Beobachtungen der künstlichen Satelliten abgeleitet wurden. Hierin erblickt Cook³ einen klaren Hinweis auf die Tatsache, daß sich der Erdkörper nicht im hydrostatischen Gleichgewicht befindet.

Bevor wir auf die Kritik dieser Deutung eingehen, seien noch jene Gleichgewichtsfiguren berechnet, welche mit der gegebenen Erdmasse $E = 5976,259 \cdot 10^{24}$ g aus den empirischen Daten:

$$(14) \quad \begin{aligned} \omega^2 &= 5,317496 \cdot 10^{-8}; & H &= 32\,7237 \cdot 10^{-8}; \\ K/a^2 &= 108310 \cdot 10^{-8} \end{aligned}$$

gebildet werden können. Mit $a = 6378290$ m ergibt sich sofort

$$(14a) \quad K = \frac{C-A}{E} = 44063,306 \cdot 10^{10} \text{ cm}^2,$$

woraus

$$EK = 263,334 \cdot 10^{40} \text{ g cm}^2 = (C - A) = CH$$

und weiter

$$(14b) \quad C = 80471,86 \cdot 10^{40}; \quad A = 80208,53 \cdot 10^{40}$$

folgt. Damit findet man folgende vier, durch E und a sowie durch je zwei physikalische Größen eindeutig bestimmte Figuren, von denen die ersten drei der Reihe (ω, a) angehören und die zweite und dritte als „Normalsphäroid“ in Frage kämen:

	$[E, a, \omega, C]$	$[E, a, \omega, K]$	$[E, a, \omega, H]$	$[E, a, K, H]$
a_h	5 801 995 m;	5 812 407 m;	5 819 382 m;	5 801 995 m
a_h	$32\,4853 \cdot 10^{-8}$	$32\,6599 \cdot 10^{-8}$	$32\,7773 \cdot 10^{-8}$	$32\,7773 \cdot 10^{-8}$
$(a_h:a)^2$	0,827458	0,830431	0,832425	0,827458
H	$32\,4326 \cdot 10^{-8}$	$32\,6066 \cdot 10^{-8}$	$32\,7237 \cdot 10^{-8}$	$32\,7237 \cdot 10^{-8}$
K/a_h^2	$12\,9730 \cdot 10^{-8}$	$13\,0426 \cdot 10^{-8}$	$13\,0895 \cdot 10^{-8}$	$13\,0895 \cdot 10^{-8}$
K	$43671,29 \cdot 10^{10}$	$44063,31 \cdot 10^{10}$	$44327,64 \cdot 10^{10}$	$44063,31 \cdot 10^{10}$
C	$80471,86 \cdot 10^{40}$	$80760,96 \cdot 10^{40}$	$80954,90 \cdot 10^{40}$	$80471,86 \cdot 10^{40}$
$C-A$	$260,99 \cdot 10^{40}$	$263,33 \cdot 10^{40}$	$264,91 \cdot 10^{40}$	$263,33 \cdot 10^{40}$
ω^2	$5,317496 \cdot 10^{-9}$	$5,317496 \cdot 10^{-9}$	$5,317496 \cdot 10^{-9}$	$5,365419 \cdot 10^{-9}$
α	$33\,3848 \cdot 10^{-8}$	$33\,5296 \cdot 10^{-8}$	$33\,6267 \cdot 10^{-8}$	$33\,6849 \cdot 10^{-8}$
1 : α	299,54	298,25	297,38	296,87

Die gegenseitige Lage der homogenen Ausgangsellipsoide der zugehörigen Reihen $(\omega, K) = (\omega, C)$ ist in Fig. 1 dargestellt. Das Ellipsoid $[E, K, H]$ liegt natürlich im Schnittpunkt der Parallelen zu den beiden Koordinatenachsen α und α , welche man

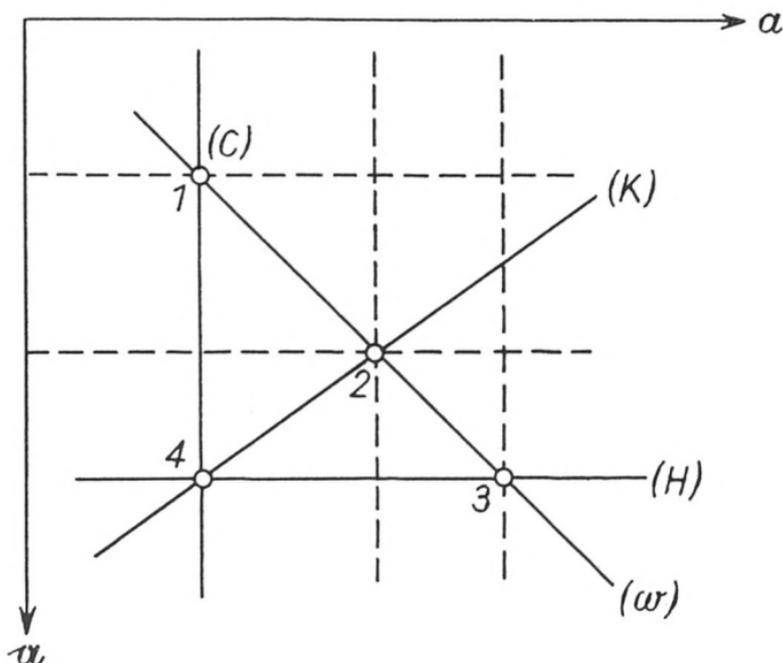


Fig. 1

durch die Ellipsoide $[E, \omega, C]$ und $[E, \omega, H]$ ziehen kann. Die Ellipsoide 1, 2 und 3 gehören der linearen Reihe (ω) , 1 und 4 der Reihe (C) und schließlich 2 und 4 der Reihe (K) an. Würden die empirischen Werte für die dynamische und statische Abplattung „zusammenstimmen“, d. h. wären die beiden obigen „Normalsphäroide“ identisch, so würden die vier Ellipsoide zusammenfallen. So aber unterscheiden sich die Ellipsoide 1 (4) und 2 einerseits und 2 und 3 andererseits im Hauptträgheitsmoment C um die Rotationsachse um die überraschend großen Beträge $\Delta C = 289,10$, resp. $193,94 \cdot 10^{40} \text{ g cm}^2$.

Wir wenden uns der Diskussion der Ergebnisse zu:

1. Läßt man in der empirischen Bestimmung der statischen Abplattung eine Unsicherheit von einer Einheit der 6. Dezimale

zu – es ist dies der fünffache Betrag des in (3) angegebenen mittleren Fehlers –

$$(15a) \quad K/a^2 = (108310 \pm 100) \cdot 10^{-8},$$

so folgt gemäß der oben berechneten Figur $[E, \omega, a, K]$ und (12) für die dynamische Abplattung

$$(15b) \quad H = (326066 \pm 180) \cdot 10^{-8},$$

ein Resultat, das trotz der weiteren Fehlerschranken weit außerhalb der eingangs zusammengestellten, aus der Präzessionskonstante abgeleiteten Werte liegt. Die Diskrepanz zwischen den empirischen Werten von K/a^2 und H deutet daher entweder auf eine systematische Fehlerquelle hin oder beweist im Sinne Cooks, daß man die für die Gleichgewichtsfiguren geltenden Beziehungen nicht auf die Massefunktionen der wirklichen Erde anwenden darf.

2. Da K/a^2 und H empirisch vorgegeben sind, eröffnen sich anscheinend zwei Möglichkeiten für die Definition des Normal-sphäroides. Es sei dieses obige zweite Figur $[E, a, \omega, K]$. Das homogene Ausgangsellipsoid der zugehörigen Reihe (ω, K) ist in Fig. 1 durch den Punkt 2 repräsentiert. In dieser Reihe sind neben K auch

$$(16) \quad C_2 = 80760,96 \cdot 10^{40}; \quad H_2 = 326066 \cdot 10^{-8}$$

konstant, wobei selbstverständlich $(C - A) = C_2 H_2 = CH$ sein muß. Vergleich mit den Werten (14) zeigt, daß

$$(16a) \quad C_2 = C + \lambda \text{ mit } \lambda = 289,10 \cdot 10^{40} \text{ g cm}^2.$$

Wir betrachten nun eine äußere Niveaufläche der wirklichen Erde, die so hoch gewählt sei, daß sich in ihr die Massenunregelmäßigkeiten der Erdkruste nur mehr sehr gering auswirken, und zwar derart, daß diese Niveaufläche vom zugehörigen Helmertschen Niveausphäroid 4. Ranges beliebig wenig abweicht. Das gedachte Niveausphäroid ist aber bis auf Größen 6. O. eine äußere Niveaufläche der streng eindeutig definierten einparametrischen heterogenen Gleichgewichtsfigur $[E, \omega, K, D_4]$, wobei

die Massefunktionen K und D_4 , d. h. die Differenz der Trägheitsmomente $(C - A)$ und die Massefunktion von 4. O., als echte Stokessche Konstanten mit den entsprechenden Massefunktionen der wirklichen Erde identisch sein müssen. Die wirkliche und die regularisierte Erde sind dann zwei mögliche Massenordnungen im Innern der beiden hoch gelegenen, fast völlig zusammenfallenden Niveauflächen, und es ist daher offensichtlich gänzlich ausgeschlossen, daß sich bei der Regularisierung der Erdkruste, d. h. bei der Herstellung des vollkommenen hydrostatischen Gleichgewichtes, die Trägheitsmomente C und $(A + B) : 2$ der wirklichen Erde um den gewaltigen Betrag von $289,10 \cdot 10^{40} \text{ g cm}^2 = 0,0036 C$ ändern, der größer ist als die Differenz $(C - A)$, während D_4 gänzlich unverändert bleibt.

3. Wollte man umgekehrt das Normalsphäroid durch $[E, a, \omega, H]$, also durch obige dritte Figur definieren, so sind in der zugehörigen Reihe $(\omega, H) \equiv (\omega, C) \equiv (\omega, K)$ die Massefunktionen

$$(17) \quad C_3 = 80954,90 \cdot 10^{40}; \quad K_3 = 44327,64 \cdot 10^{10}$$

konstant, wobei wegen des unveränderten Wertes der dynamischen Abplattung

$$(17a) \quad C_3 = \beta C; \quad A_3 = \beta A; \quad K_3 = \beta K; \quad \beta = 1,0060$$

wird. Die Änderung von C wird noch größer: $\Delta C = +483,04 \cdot 10^{40}$, in Übereinstimmung mit dem Abstand der beiden auf der Linie (H) liegenden Punkte 4 und 3 in Fig. 1. Da sich aber auch die Stokessche Konstante $(C - A)$ ändert: $\Delta(C - A) = +1,58 \cdot 10^{40}$, erkennt man, daß im vorliegenden Falle die dynamische Abplattung nicht für die Definition des Normalsphäroides herangezogen werden dürfte.

4. Der Vergleich der dritten und vierten Figur ist aber auch noch in anderer Hinsicht interessant. Die zugehörigen Ellipsoide haben wegen der gleichen geometrischen Abplattung nicht nur dieselbe dynamische, sondern auch dieselbe statische Abplattung. Es gilt daher neben (17a) auch noch

$$(17b) \quad (a_{h,3})^2 = \beta (a_{h,4})^2$$

und in weiterer Folge im Hinblick auf die transformierte MacLaurin-Bedingung

$$\bar{\varepsilon} = \frac{\omega^2 a_h^3}{k^2 E} = f(a_h)$$

auch

$$(17c) \quad \omega_3^2 = \beta^{-3/2} \omega_4^2.$$

Jede völlig gleichförmige Expansion ($\beta > 1$) oder Kontraktion ($\beta < 1$) einer beliebigen Gleichgewichtsfigur hat eine im Verhältnis $\beta^{-3/4}$ geänderte Rotationsgeschwindigkeit zur Folge. Es gibt nun sicher unendlich viele sphäroidische Gleichgewichtsfiguren mit denselben Trägheitsmomenten, wie sie die wirkliche Erde besitzt. Alle diese Figuren haben dieselbe Rotationsgeschwindigkeit, welche am bequemsten aus dem MacLaurinschen Ellipsoid $[E, K, C] \equiv [E, C, H] \equiv [E, K, H]$ berechnet werden kann. Damit aber erhebt sich die Frage, ob diese Rotationsgeschwindigkeit mit der Rotationsgeschwindigkeit der wirklichen Erde identisch sein muß oder nicht.

Dies scheint der vollständige Tatbestand zu sein. In Punkt 1 konnte gezeigt werden, daß die Diskrepanz zwischen dynamischer und statischer Abplattung zwei Deutungsmöglichkeiten zuläßt. In Punkt 2 ergeben sich derart große Änderungen der Trägheitsmomente, daß die Cooksche Auslegung zumindest nicht allein zur Erklärung herangezogen werden darf. Die definitive Entscheidung hängt daher von der Beantwortung der letzten Frage ab, nämlich ob es zur gegebenen Rotationsgeschwindigkeit eine lineare Reihe von Gleichgewichtsfiguren mit den Trägheitsmomenten der wirklichen Erde gibt.

Wir greifen wieder die Überlegung von Punkt 2 auf, betrachten jetzt aber sofort eine sphäroidische Gleichgewichtsfigur $[E, \omega, K, D_4, D_6 \dots]$ mit beliebig vielen Formparametern f_4, f_6 , welche mit der wirklichen Erde nicht nur die Differenz der Trägheitsmomente, sondern beliebig viele der höheren Massefunktionen $D_4, D_6 \dots$ gemeinsam hat. Ihre äußeren Niveauflächen werden mit wachsender Erhebung über die freie Oberfläche immer besser mit den Niveauflächen der wirklichen Erde übereinstimmen. Die Trägheitsmomente C und A sind nun nicht echte Stokesche Konstanten im Sinne von Integralinvarianten für alle

jeweils überhaupt möglichen Massenarrangements, wohl aber dank der Eindeutigkeit des Dichtegesetzes der Gleichgewichtsfiguren selbst eindeutige Funktionen der Stokesschen Elemente E , ω und $S(a, \alpha, f_4, f_6, \dots)$. Je mehr der höheren Massefunktionen D man aber heranzieht, umso deutlicher erkennt man, daß auch die Trägheitsmomente der Gleichgewichtsfigur mit den Trägheitsmomenten der wirklichen Erde übereinstimmen müssen. Denn die Übereinstimmung in K und den höheren Massefunktionen D_4, D_6, \dots schließt die Möglichkeit, daß sich die Trägheitsmomente um den gleichen Betrag λ von den Trägheitsmomenten der tatsächlichen Erde unterscheiden, vollends aus. Bei der Regularisierung der Erdkruste entsteht also eine Gleichgewichtsfigur, welche mit der wirklichen Erde das Hauptträgheitsmoment C um die Rotationsachse gemeinsam hat, während in Anbetracht der notwendigen Rotationssymmetrie ein äquatoriales Hauptträgheitsmoment A resultiert, das mit dem arithmetischen Mittel der beiden äquatorialen Trägheitsmomente $(A + B)/2$ der wirklichen Erde zusammenfällt. Die so erhaltene Gleichgewichtsfigur ist die bestens und streng eindeutig definierte Normalfigur der Erde. Es läßt sich jedoch nicht unmittelbar feststellen, ob dieses Normalsphaeroid eine ein- oder mehrparametrische Gleichgewichtsfigur ist.

Diese Überlegung wirft auch ein neues Licht auf das Problem der Regularisierung der Erdkruste durch einen Massenausgleich im Sinne der Airyschen Isostasie. Die Ausgleichsfläche des Druckes wird in der Basis der mächtigsten Sialscholle liegen, die am tiefsten ins Sima eintaucht. Ihre Tiefe ist so zu bestimmen, daß bei den isostatischen Massenverschiebungen in vertikalen Säulen die Trägheitsmomente C und $(A + B)/2$ und damit der Drehimpuls oder das Rotationsmoment $\omega \cdot C$ erhalten bleiben. Gleichzeitig muß bei diesen Massenverschiebungen zumindest die Massefunktion 4. O. unverändert bleiben. In diesem Sinne ist es sehr aufschlußreich festzustellen, daß eine Berechnung der durch die isostatischen Massenverschiebungen bewirkten Änderung des Hauptträgheitsmomentes C aus 14 schematisierten Schollen bei W. de Sitter⁵ $\Delta C = -3,4 \cdot 10^{-7} C = -0,03 \cdot 10^{40}$

⁵ W. de Sitter: On the flattening and the constitution of the earth, Bulletin of Astron. Inst. of the Netherlands, Vol. 2, S. 97–108, 1924.

g cm² ergeben hat, was sich vom Sollwert Null wesentlich weniger unterscheidet als der schon oben als unmöglich bezeichnete Betrag $\Delta C = 0,0036 C$.

In diesem Zusammenhang dürfte noch eine wichtige Bemerkung am Platze sein. Die wirkliche Erde und die Gleichgewichtsfigur mit denselben Trägheitsmomenten und einigen weiteren gemeinsamen Massefunktionen haben in der Nähe ihrer Oberfläche merklich verschiedene Niveauflächen und auch in großer Höhe nur beliebig nahe zusammenfallende, jedoch nicht streng identische Niveauflächen. Tatsächlich gibt es zu den Stokesschen Elementen $E, \omega, S(a, a, f_4, f_6 \dots)$ einer beliebigen Gleichgewichtsfigur neben der einzigen, durch ein streng individuelles Dichtegesetz gekennzeichneten Gleichgewichts-anordnung wohl noch unendlich viele, nicht im Gleichgewicht befindliche Massen-anordnungen, die aber alle denselben Schwerpunkt und dieselben Massefunktionen $K, D_4, D_6 \dots$ besitzen müssen und demnach aus der gegebenen Gleichgewichtsfigur einzig und allein durch beliebige Massenverschiebungen in konzentrischen, homogenen Kugelschalen hervorgehen können. Die notwendige Erhaltung des Potentials der Fliehkraft erfordert übrigens auch bei der Regularisierung der Erdkruste die strenge Erhaltung des Schwerpunktes in der Rotationsachse, womit für die isostatischen Massenverschiebungen neben der Konstanz des Trägheitsmomentes C eine weitere Bedingung vorliegt.

Die Reihen $(\omega, C) \equiv (\omega, K) \equiv (\omega, H)$ darf man als „genetische“ Reihen bezeichnen, weil sie wegen der Konstanz des Drehimpulses möglicherweise Entwicklungsreihen darstellen. Ob sich im Laufe der Entwicklungsgeschichte der Erde seit dem Beginn der Bildung der festen Erdkruste die Rotationsgeschwindigkeit geändert hat, dürfte sich kaum mit voller Sicherheit feststellen lassen. Es ist also ungewiß, ob das soeben definierte Normalsphäroid eine tatsächliche Entwicklungsstufe der Erde darstellt. Doch berührt dies nicht unser Ergebnis. Vielmehr dürfen wir schließen, daß es zu jeder Entwicklungsstufe hydrostatische Gleichgewichtsfiguren mit beliebig vielen gemeinsamen Massefunktionen und derselben Rotationsgeschwindigkeit gibt.

Mit diesem Ergebnis scheidet aber die Deutung von Cook aus und die Diskrepanz zwischen den empirischen Werten für die

statische und dynamische Abplattung kann nur aus systematischen Fehlerquellen erklärt werden. Nun haben wir der numerischen Analyse gerade den kleinsten Wert für die dynamische Abplattung zugrunde gelegt, welcher mit der zugehörigen Figurenreihe (ω, H) bereits auf die statische Abplattung $108960 \cdot 10^{-8}$ des Normalsphäroides führt. Mit wachsendem H wächst aber die statische Abplattung gemäß $d(K/a^2) = 0,5559 dH$ weiter an. Dies zwingt zu dem Schlusse, daß die aus den künstlichen Satelliten errechnete statische Abplattung $108310 \cdot 10^{-8}$ trotz der guten inneren Übereinstimmung zu klein ist, was möglicherweise auf einen Mangel in den theoretischen Grundlagen der Bahnberechnungen hindeutet.

Die vorstehende Diskussion dürfte den durch die Figurenreihe $(\omega, H) \equiv (\omega, K)$ vermittelten theoretischen Zusammenhang zwischen den drei Abplattungen hinreichend erhärtet haben. Es besteht derzeit also noch nicht der geringste Anlaß, die Ableitung des Normalsphäroides aus der besser bekannten dynamischen Abplattung (die dritte Figur der letzten Tabelle) einer Revision zu unterziehen. Die geometrische Abplattung dieser Normalfigur, $1 : 297,38$, verdient demnach den Vorzug vor dem Werte $1 : 298,25$, der auf der zu kleinen statischen Abplattung beruht. Es ist aber zu hoffen, daß eine sorgfältige Revision der Satellitentheorie in naher Zukunft ein verlässliches Resultat für die statische Abplattung zeitigen und damit die Möglichkeit eröffnen wird, die Mondmasse einwandfrei zu überprüfen und so die Unsicherheit in der Bestimmung der dynamischen Abplattung zu beheben. Die mit der Massefunktion D_4 zusammenhängenden Fragen seien einer gesonderten Untersuchung vorbehalten.

Zusammenfassung

Ausgehend von der Identität der Figurenreihen $(\omega, K) \equiv (\omega, H)$ wird nachgewiesen, daß die aus den Beobachtungen der künstlichen Satelliten abgeleitete statische Abplattung zu klein ist. Die Deutung der Diskrepanz zwischen den empirischen Werten für die statische und dynamische Abplattung aus der Tatsache, daß sich die Erde nicht im hydrostatischen Gleichgewicht

befindet, ist unmöglich, weil es eine Gleichgewichtsfigur gibt, welche mit der wirklichen Erde in der Rotationsgeschwindigkeit und in sämtlichen Massefunktionen $C, K, D_4, D_6 \dots$ übereinstimmt.

Summary:

Starting from the identity of the series of figures of equilibrium $(\omega, K) \equiv (\omega, H)$ it is proved that the static flattening derived from the observations of artificial satellites is too small. The interpretation of the discrepancy between the empirical values for the static and dynamic flattening out of the fact, that the earth is not in hydrostatic equilibrium is impossible; for a figure of equilibrium exists with the same velocity of rotation and with the same mass-functions $C, K, D_4, D_6 \dots$ belonging to the real earth.