BAYERISCHE AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN
MATHEMATISCH-NATURWISSENSCHAFTLICHE KLASSE

SITZUNGSBERICHTE

JAHRGANG

1959

MÜNCHEN 1960

VERLAG DER BAYERISCHEN AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN

In Kommission bei der C. H. Beck'schen Verlagsbuchhandlung München

Über das simultane Teilen von Mengen mittels Linearscharen meßbarer Funktionen

Von **Hermann Dinges** in Göttingen

Vorgelegt von Herrn Georg Aumann am 11. Dezember 1959

1. Resultate. Herr Hugo Steinhaus [Lit.: (1)] hat folgende Sätze bewiesen: Gegeben seien drei beschränkte Punktmengen A, B, C im Raum (in der Ebene) mit den Lebesguemaßen a, b, c. Jedem Halbraum (jeder Kreisscheibe) seien die Maße der Durchschnitte mit A, B, C als geordnetes Tripel von Zahlen $[\alpha, \beta, \gamma]$ $(0 \leq \alpha \leq a, \ldots)$ zugeordnet. Dafür, daß zu einem beliebigen solchen Tripel ein Halbraum (eine Kreisscheibe) existiert, dem (der) dieses Tripel zugeordnet ist, ist hinreichend, daß es drei Halbräume (Halbebenen) gibt, welchen die Tripel $[a, 0, 0]$ bzw. $[0, b, 0]$ bzw. $[0, 0, c]$ zugeordnet sind.

Die vorliegende Arbeit verallgemeinert diese Sätze auf den Fall, daß n meßbare Mengen von einer n-parametrigen linearen Schar von $(k-1)$-dimensionalen Hyperflächen eines k-dimensionalen Raumes geschnitten werden. Ja, es zeigt sich, daß die Dimensionszahl k ganz unwesentlich ist und die Verallgemeinerung weitergeführt werden kann: Vorgegeben sind eine Grundmenge Ω, auf der ein Maß erklärt ist, weiter eine $(n+1)$-parametrige Linearschar L von meßbaren reellen Funktionen f auf Ω und schließlich n Teilmengen A_ν von Ω mit endlichem positivem Maß. Für jedes ν, $\nu = 1, \ldots, n$, zerlegt jedes f aus $L A_\nu$ in die Teile $A_\nu \cap \{x: f(x) < 0\}$ und $A_\nu \cap \{x: f(x) \geq 0\}$. Gefragt wird nach Bedingungen dafür, daß es zu beliebig vorgegebenen Verhältniszahlen $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ ein $f \in L$ gibt, das A_ν im Sinne des Maßes im Verhältnis α_ν teilt.

In **5.** wird bewiesen, daß hierfür die folgende Trennbarkeitseigenschaft hinreichend ist (trivialerweise ist sie auch notwendig): Zu jeder Teilmenge T von $\{1, 2, \ldots, n\}$ gibt es ein f aus L so, daß f auf A_τ negativ ist für $\tau \in T$, während es auf den übrigen A_ν nicht negativ ist, eventuell mit Ausnahme von Nullmengen. Aus dieser Trennbarkeitseigenschaft folgt dann weiter: Die Menge der ein bestimmtes System $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ von Verhältniszahlen erzeugenden f aus L zerfällt in genau zwei Zusammenhangs-Komponenten, wenn keine der Verhältniszahlen extremal ist.

In **6.** beweisen wir für den Fall, wo die A_ν die Trennbarkeitseigenschaft nicht besitzen, daß es zwar immer ein f aus L gibt, welches jedes A_ν halbiert, daß es jedoch zu anderen vorgegebenen Verhältniszahlen nicht immer ein erzeugendes f zu geben braucht.

2. Hilfsmittel. Zur Behandlung dieser Fragen benützen wir die folgenden bekannten Sätze aus der Topologie:

I. Satz von Ulam und Borsuk.

Jede stetige Abbildung der n-Sphäre in den n-dimensionalen euklidischen Raum R^n ordnet mindestens einem Paar von Antipoden denselben Punkt des R^n als Bild zu [Lit.: (3)].

II. Alexanderscher Dualitätssatz.

Sei K^r ein endlicher r-dimensionaler Komplex, der in der n-Sphäre S^n liegt. Mit $S^n - K^r$ sei die Komplementärmenge von K^r in S^n bezeichnet, die als offene Punktmenge von S^n ebenfalls ein Komplex, und zwar ein unendlicher ist. Ist p^k die k-te Bettische Zahl von K^r und $\bar{p}^k$ diejenige von $S^n - K^r$, so ist $p^k = \bar{p}^{n-k-1}$, $k \neq 0$, $k \neq n-1$ und in den beiden Ausnahmefällen $p^0 = \bar{p}^{n-1} + 1$, $p^{n-1} = \bar{p}^0 - 1$ [Lit.: (3)].

III. Die einfachsten Sätze aus der Maßtheorie [Lit.: (2)].

IV. Ein Satz aus der Cohomologietheorie über den Nerv eines Mengensystems, der als 5. Hilfssatz formuliert ist.

3. Unsere Fragestellung geht aus von den folgenden Voraussetzungen: Es sei gegeben

A) ein Maß $\mu|\mathfrak{M}$ auf dem σ-Körper $\mathfrak{M}$ von Teilmengen der Grundmenge Ω,

B) n Teilmengen $A_1, \ldots, A_n \in \mathfrak{M}$ mit endlichem positiven μ; wir definieren zu jedem $M \in \mathfrak{M}$ folgende Funktionen

$$\tilde{m}_\nu M = 2 \cdot \frac{\mu(M \cap A_\nu)}{\mu(A_\nu)} - 1, \quad \nu = 1, \ldots, n,$$

und fassen diese zusammen zum „*Maß-n-tupel*"

$$\tilde{\mathfrak{m}} = [\tilde{m}_1, \ldots, \tilde{m}_n].$$

Für eine meßbare Funktion f auf Ω heißt

$$\mathfrak{m}(f) = \tilde{\mathfrak{m}}\{x: f(x) < 0\}$$

das der Funktion f zugeordnete Maß-n-tupel.

(Additionen sowie Ungleichungen mit Maß-n-tupeln sind stets komponentenweise zu verstehen.)

C) $n + 1$ meßbare Funktionen $f_0, \ldots, f_n$ auf Ω, welche auf jeder Teilmenge M von $\bigcup_{\nu=1}^{n} A_\nu$ mit positivem $\mu(M)$ linear unabhängig sind; d. h. für $\sum_0^n \alpha_\nu^2 > 0$ ist

$$\tilde{\mathfrak{m}}\left\{x: \sum_0^n \alpha_\nu f_\nu(x) = 0\right\} = [-1, \ldots, -1].$$

D) 2^n spezielle Linearkombinationen $g_1, \ldots, g_{2^n}$ von $f_0, \ldots, f_n$ mit den Maß-n-tupeln $[\delta_1, \ldots, \delta_n]$, wobei die δ_ν unabhängig voneinander die Werte ± 1 annehmen.

Wir studieren jetzt die durch

$$(\alpha_0, \ldots, \alpha_n) \longrightarrow \mathfrak{m}\left(\sum_0^n \alpha_\nu \cdot f_\nu\right)$$

gegebene Abbildung des $(n + 1)$-dimensionalen Zahlenraumes in den n-dimensionalen.

4. Hilfssätze.

Wir verschaffen uns zunächst einige Hilfssätze, die uns später nützlich sein werden:

1. Hilfssatz.

$$\mathfrak{m}(c \cdot f) = (\operatorname{sign} c) \cdot \mathfrak{m}(f) \quad \text{für reelles } c \neq 0.$$

In der Tat: Für $c > 0$ stimmen die Mengen

$$A_\nu \cap M = A_\nu \cap \{x : f(x) < 0\} \quad \text{und}$$
$$A_\nu \cap M' = A_\nu \cap \{x : c \cdot f(x) < 0\} \quad \text{überein;}$$

für $c < 0$ sind sie zueinander komplementär in A_ν bis auf eine Nullmenge wegen C); und aus

$$m_\nu(f) \cdot \mu(A_\nu) = 2 \cdot \mu(A_\nu \cap M) - \mu(A_\nu),$$
$$m_\nu(-f) \cdot \mu(A_\nu) = 2 \cdot \mu(A_\nu \cap \bar{M}) - \mu(A_\nu)$$

folgt

$$(m_\nu(f) + m_\nu(-f))\, \mu(A_\nu) = 2\big(\mu(A_\nu \cap M) + \mu(A_\nu \cap \bar{M}) - \\ - \mu(A_\nu)\big).$$

Da wegen der Meßbarkeit von f die rechte Seite verschwindet, gilt $m_\nu(f) = -m_\nu(-f)$, q. e. d.

2. Hilfssatz.

Wenn $\delta = \pm 1$, dann folgt aus $|m_\nu(f) - \delta| \leq 2 \cdot \varepsilon$ und $|m_\nu(g) - \delta| \leq 2\varepsilon'$ und $\lambda_1, \lambda_2 > 0$, daß $|m_\nu(\lambda_1 f + \lambda_2 g) - \delta| \leq \leq 2(\varepsilon + \varepsilon')$.

Beweis: Sei z. B. $\delta = +1$, so besagt die Voraussetzung, daß der Teil von A_ν, auf welchem $f \geq 0$, höchstens das Maß $\varepsilon \cdot \mu(A_\nu)$ hat, und der Teil von A_ν, auf welchem $g \geq 0$, höchstens das Maß $\varepsilon' \cdot \mu(A_\nu)$. Daher ist der Teil von A_ν, auf welchem $\lambda_1 f + \lambda_2 g \geq 0$, höchstens vom Maß $(\varepsilon + \varepsilon') \cdot \mu(A_\nu)$, und daraus folgt die Behauptung.

Uns interessieren im folgenden hauptsächlich Eigenschaften von Linearkombinationen h der $f_0, \ldots, f_n$, welche sich nicht ändern, wenn wir h durch $c \cdot h$ ersetzen ($c > 0$). Wir führen daher für die Klassen von solchen Linearkombinationen, welche sich nur um einen positiven Faktor unterscheiden, einen eigenen Namen ein, und zwar nennen wir sie *Schnitte* (durch Ω). Die Menge der Schnitte versehen wir mit einer *Metrik* so, daß sie homöomorph wird zur n-dimensionalen euklidischen Sphäre S^n. Der Abstand des von $h^{(1)} = \sum_{\nu=0}^{n} \alpha_\nu^{(1)} f_\nu$ repräsentierten Schnittes $P^{(1)}$ von dem von $h^{(2)} = \sum_{\nu=0}^{n} \alpha_\nu^{(2)} f_\nu$ repräsentierten Schnitt $P^{(2)}$ wird dazu folgendermaßen definiert:

$$\varphi(P^{(1)}, P^{(2)}) = \arccos \frac{\sum_0^n a_\nu^{(1)} a_\nu^{(2)}}{\sqrt{\sum_0^n (a_\nu^{(1)})^2 \sum_0^n (a_\nu^{(2)})^2}} = \varphi(P^{(2)}, P^{(1)}).$$

Wegen Hilfssatz 1 kann man vom Maß-n-tupel $\mathfrak{m}(P)$ eines Schnittes P statt von dem einer Linearkombination sprechen. Daher kann z. B. auch die Menge der Linearkombinationen h mit $m_j(h) = \delta_j$, $\delta_j = \pm 1$, als eine Menge von Schnitten aufgefaßt werden. Diese Teilmengen von S^n werden später eine wichtige Rolle spielen. Sie erhalten daher einen Namen, nämlich M_{δ_j}. Der 2. Hilfssatz läßt sich für den Spezialfall, daß $\varepsilon = \varepsilon' = 0$, interpretieren als die Aussage: Jedes M_{δ_j} ist eine konvexe Teilmenge von S^n.

3. Hilfssatz.

Schneidet ein Großkreis von S^n eine Menge M_{δ_j} in P^*, wobei $m_j(P^*) = +1$, dann ist m_j auf diesem Großkreis von $-P^*$, wo $m_j(-P^*) = -1$, bis P^* monoton nicht fallend.

In der Tat: Wenn f^* ein Repräsentant von P^* ist, f_1 einer von P_1, dann wird ein Schnitt P_2 auf dem Großkreisbogen zwischen P_1 und P^* repräsentiert durch $f_2 = \lambda_1 f_1 + \lambda_2 f^*$ mit $\lambda_1, \lambda_2 > 0$. Da nun $f^*(x) < 0$ für fast alle x aus A_j, gilt $f_2 \leq \lambda_1 f_1$ für fast alle x aus A_j und deshalb $m_j(f_2) \geq m_j(\lambda_1 \cdot f_1) = m_j(f_1)$, q. e. d.

4. Hilfssatz

Die Komponenten m_ν des Maß-n-tupels sind stetige Funktionen auf der Menge S^n aller Schnitte.

Beweis: Wir repräsentieren jeden Schnitt durch den Vertreter $\sum_0^n a_\nu f_\nu$ mit $\sum_0^n a_\nu^2 = 1$. (Zur identisch verschwindenden Linearkombination gehört kein Schnitt in unserem Sinne!) Wenn eine Folge von Schnitten P^n nach einem Schnitt P^0 konvergiert, dann konvergiert auch die Folge dieser Vertreter h^n gegen den Vertreter h^0 von P^0. Es gilt:

$$\begin{aligned}
&|m_\nu(h^0) - m_\nu(h^n)| \leq \\
&\leq \tilde{m}_\nu\{x: h^0(x) > 0,\ h^n(x) < 0\} + \tilde{m}_\nu\{x: h^0(x) < 0,\ h^n(x) > 0\} = \\
&= \tilde{m}_\nu\{x: (h^0(x) \cdot h^n(x)) < 0\} = \\
&= \tilde{m}_\nu\{x: [(h^0(x))^2 - h^0(x) \cdot (h^0(x) - h^n(x))] < 0\} \leq \\
&\leq \tilde{m}_\nu\{x: [(h^0(x))^2 - |h^0(x)| \cdot |\sup_{m \geq n}(h^0(x) - h^m(x)|] < 0\}
\end{aligned}$$

$\{\ldots\}$ ist eine absteigende Folge von meßbaren Mengen mit einem Durchschnitt $D \subset \{x: (h^0(x))^2 \leq 0\}$. Wegen der Voraussetzung C) von **3.** ist D vom Maß 0. Nach einem bekannten Limessatz für Maße gilt dann

$$\lim_{n \to \infty} |m_\nu(h^0) - m_\nu(h^n)| = 0.$$

Das bedeutet die Stetigkeit von m_ν.

5. Hilfssatz

Gegeben sei eine endliche simpliziale Zerlegung K eines Polyeders H, ferner ein endliches Überdeckungssystem $\mathfrak{S}$ von abgeschlossenen Polyedern M_i derart, daß jedes M_i von einem Teilkomplex K_i von K simplizial zerlegt wird. Wenn die M_i sowie die Durchschnitte von je endlich vielen M_i „simplexartig" sind, so existiert in natürlicher Weise ein Isomorphismus der Homologiegruppen von H auf die Homologiegruppen des Nerven $N(\mathfrak{S})$ der Überdeckung $\mathfrak{S}$.

Dabei heißt ein Polyeder *simplexartig* genau dann, wenn sämtliche Homologiegruppen trivial sind mit Ausnahme der der Dimension 0. Diese soll dem Koeffizientenbereich isomorph sein.

Der *Nerv* eines Mengensystems $\mathfrak{S}$ ist ein abstrakter Komplex, welcher folgendermaßen entsteht: Wir ordnen jeder Menge M_i einen Buchstaben m_i zu und nehmen die Menge der Buchstaben $m_0, \ldots, m_k$ als Menge der Eckpunkte von $N(\mathfrak{S})$. Die Menge der Eckpunkte m_{i_j}, $j = 0, \ldots, s$, bestimmt ein Simplex von $N(\mathfrak{S})$ genau dann, wenn die Mengen M_{i_j}, $j = 0, \ldots, s$, einen nichtleeren Durchschnitt haben.

Man kann tatsächlich auf algebraischem Wege diesen Isomorphismus konstruieren. Die etwas längere Rechnung wollen wir jedoch hier nicht durchführen.[1]

6. Hilfssatz

Gegeben sei ein System von konvexen abgeschlossenen Teilmengen M_i einer n-Sphäre S^n, dessen Nerv $N(\mathfrak{S})$ die Homologiegruppen einer $(n-1)$-Sphäre hat. Dann zerfällt $S^n - \bigcup M_i$ in zwei Teile A, A' mit den Homologiegruppen von Simplexen.

Beweis: Die Eigenschaft von $S^n - \bigcup M_i$, in eine bestimmte Anzahl von Teilen zu zerfallen, bleibt erhalten, wenn man die M_i genügend wenig variiert. Wir können daher annehmen, daß die M_i konvexe Polyeder sind. Dann sind auch nichtleere Durchschnitte von Teilsystemen von $\mathfrak{S}$ konvex. Wir konstruieren eine solche simpliziale Zerlegung von S^n, welche auf jedem solchen Durchschnitt eine simpliziale Zerlegung induziert. Da eine konvexe Menge natürlich simplexartig ist, erfüllt das Polyeder $\bigcup M_i$ und das System $\mathfrak{S}$ der M_i die Voraussetzungen des 5. Hilfssatzes. Die Bettizahlen des Nerven $N(\mathfrak{S})$ stimmen also mit den Bettizahlen p^k des Polyeders $\bigcup M_i$ überein. Nach dem Alexanderschen Dualitätssatz bestimmen sich daraus die Bettizahlen von $S^n - \bigcup M_i$: Die 0-te Bettizahl, welche die Anzahl der Zusammenhangskomponenten angibt, ist $1 + p^{n-1} = 2$. Die übrigen Bettizahlen sind 0, q. e. d.

---

[1] Sie findet sich in meiner Dissertation „Über das Teilen von Mengen mittels meßbarer Funktionen", Universität München 1959.

Zusatz: Ist $\bigcup M_i$ zentralsymmetrisch, so sind die Teile A, A' Spiegelbilder voneinander. Da nämlich alle Bettizahlen mit Ausnahme der 0-ten verschwinden, und da der Antipodismus von $S^n A \cup A'$ fixpunktfrei auf sich abbildet, folgt aus der Euler-Poincaré-Hopfschen Fixpunktformel (Lit: (4)), daß dabei keine Zusammenhangskomponente von $A \cup A'$ auf sich abgebildet wird.

7. Hilfssatz.

Sind $M+$ und $M-$ zueinander zentralsymmetrisch gelegene abgeschlossene konvexe echte Teilmengen der n-Sphäre S^n, dann existiert eine stetige Funktion $u \mid S^n$, welche auf $M+$ und $M-$ konstant gleich $+1$ bzw. -1 ist und auf jedem Stück eines Großkreises g, welches zu $M+ \cup M-$ punktfremd ist, streng monoton ist, wenn dieser Großkreis $M+$ schneidet (und damit auch $M-$).

Beweis: Wir konstruieren Kegel mit dem Mittelpunkt 0 von S^n als Spitze über $M+$ und $M-$. Diese innerpunktfremden konvexen Teilmengen des R^{n+1} lassen sich durch eine Hyperebene H durch 0 voneinander trennen. H zerlegt S^n in zwei Halbsphären. Diejenige, welche $M+$ enthält, heißt die positive, die andere, welche $M-$ enthält, die negative Halbsphäre. Wir konstruieren weiter auf beiden Seiten von 0 Parallelhyperebenen zu H im gleichen Abstand, $H+$, und $H-$, und projizieren von 0 aus die Punkte der positiven Halbsphäre auf $H+$, die der negativen auf $H-$. Die Projektion von $M+$ ist offensichtlich eine beschränkte konvexe Figur in $H+$, wie die Projektion von $M-$ in $H-$.

Die Projektion eines Punktes P der positiven Halbsphäre habe den Abstand $a(P)$ von der Projektion von $M+$; dann sei

$$u(P) := 1 - \frac{2}{\pi} \cdot \operatorname{arc\,tg} a(P).$$

Die Projektion eines Punkts Q der negativen Halbsphäre habe den Abstand $b(Q)$ von der Projektion von $M-$; dann sei

$$u(Q) := -1 + \frac{2}{\pi} \operatorname{arc\,tg} b(Q).$$

Für Punkte R aus $S^n \cap H$ sei $u(R) := 0$.

Offensichtlich ist $u|S^n$ stetig, $u|M+ = +1$, $u|M- = -1$; Ist $\tilde{P}$ der Antipodenpunkt von P, dann ist $u(\tilde{P}) = -u(P)$. Sind P und Q zwei Punkte mit $u(P) = u(Q) > 0$, dann haben ihre Projektionen P' und Q' denselben Abstand a von der Projektion von $M+$. Die Verbindungsgerade von P' und Q' schneidet die Projektion von $M+$ höchstens zwischen P' und Q'; denn die Menge der Punkte, welche einen Abstand $a' \leq a$ von einer konvexen Figur haben, ist konvex. Sind P' und Q' zwei Punkte auf der Oberfläche dieses sogenannten Parallelkörpers, so haben die Punkte der Verbindungsgeraden nur zwischen P' und Q' einen kleineren Abstand als a. Der Fall $u(P) < 0$ erledigt sich genau so, der Fall $u(P) = 0$ ist trivial. Projizieren wir zurück auf S^n, so lautet unser Ergebnis: Wenn für zwei Punkte P und Q gilt $u(P) = u(Q)$ und wenn der Großkreis durch P und Q Punkte gemeinsam hat mit $M+ \cup M-$, dann schneidet schon der Verbindungsbogen $M+$ oder $M-$. Das beweist den 7. Hilfssatz.

8. Hilfssatz.

Gegeben sei eine Folge ω_n von Abbildungen eines kompakten metrischen Raumes R' in den euklidischen m-dimensionalen Raum R^m mit den Eigenschaften

1) ω_n ist topologisch

2) ω_n ist eine Abbildung auf ein konvexes Teilgebiet $W \subset R^m$.

3) ω_n ist gleichmäßig konvergent in R' gegen ein ω. Dann gilt: Das Urbild $\omega^{-1}(P)$ jedes Punktes P von W ist zusammenhängend.

Beweis: Ist $\omega(x_1) = \omega(x_2) = P$ für zwei Punkte x_1, x_2 aus R', dann ist für genügend große n $|\omega_n(x_1) - \omega_n(x_2)| < \frac{\varepsilon}{3}$ und außerdem $|\omega_n(x) - \omega(x)| < \frac{\varepsilon}{3}$ für alle x. Wegen 1) und 2) ist das Urbild der Verbindungsstrecke von $\omega_n(x_1)$ und $\omega_n(x_2)$ bei ω_n eine stetige Kurve in R', welche x_1 mit x_2 verbindet. Für alle Punkte x dieser Verbindungskurve gilt $|\omega(x) - P| = |\omega(x) - \omega_n(x) + \omega_n(x) - \omega_n(x_1) + \omega_n(x_1) - \omega(x_1)| \leq \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon$. Bezeichnen wir das Urbild der Kugel mit dem Radius ε um P vermöge ω mit $\omega^{-1}(K(\varepsilon))$, so haben wir bewiesen:

Zwei beliebige x_1, x_2 aus $\omega^{-1}(P)$ lassen sich durch eine stetige Kurve in $\omega^{-1}(K(\varepsilon))$ verbinden. Offensichtlich ist der Durchschnitt $\bigcap_{m=1}^{\infty} \omega^{-1}\left(K\left(\frac{1}{m}\right)\right)$ gleich $\omega^{-1}(P)$.

Wir zeigen: Von zwei fremden abgeschlossenen Mengen N', N'', deren Vereinigung $\omega^{-1}(P)$ umfaßt, enthält nur eine Punkte von $\omega^{-1}(P)$. Zum Beweis konstruieren wir zuerst offene Umgebungen $\overline{N'}, \overline{N''}$ von N' bzw. N'', welche ebenfalls fremd sind, und zeigen: $\overline{N'} \cup \overline{N''}$ umfaßt ein geeignetes $\omega^{-1}(K(\varepsilon))$.

In der Tat, gäbe es in jedem $\omega^{-1}\left(K\left(\frac{1}{m}\right)\right)$ einen Punkt x_m, welcher nicht in $\overline{N'} \cup \overline{N''}$ liegt, so läge auch jeder Häufungspunkt x dieser Folge nicht in $\overline{N'} \cup \overline{N''}$ wegen der Offenheit dieser Menge. Andererseits liegt x in jedem $\omega^{-1}\left(K\left(\frac{1}{m}\right)\right)$, also auch in $\omega^{-1}(P)$. Nun umfaßt aber $\overline{N'} \cup \overline{N''}$ $\omega^{-1}(P)$, und da wegen der Kompaktheit von R' ein Häufungspunkt x existiert, ist die Annahme zum Widerspruch geführt. $\overline{N'} \cup \overline{N''}$ umfaßt ein geeignetes $\omega^{-1}(K(\varepsilon))$.

In jedem $\omega^{-1}(K(\varepsilon))$ lassen sich, wie wir oben gesehen haben, zwei Punkte von $\omega^{-1}(P)$ verbinden, also auch in $\overline{N'} \cup \overline{N''}$. Da $\overline{N'} \cap \overline{N''}$ leer ist, enthält nur eine dieser Mengen Punkte von $\omega^{-1}(P)$, d.h. $\omega^{-1}(P)$ ist zusammenhängend.

5. Hauptsatz.

Für jedes $\mathfrak{m}^* = [m_1^*, \ldots, m_n^*]$ *mit* $|m_\nu^*| < 1$ *zerfällt die Menge der Schnitte* P *durch* Ω *mit* $\mathfrak{m}(P) = \mathfrak{m}^*$ *in genau zwei zusammenhängende Komponenten* N_1, N_2 *mit der Eigenschaft: Führt man ein* $P_1 \in N_1$ *stetig über in ein* $P_2 \in N_2$, *so nimmt auf dem Wege mindestens ein* m_ν *einen der Werte* ± 1 *an.*

Beweis:

a) In Hilfssatz 2 wurde gezeigt, daß die $2n$ Teilmengen $M_{\delta_j}^j$ von S^n konvex sind. Voraussetzung D) gestattet uns, den Nerven des Systems $\mathfrak{S}$ der M_{δ_j} zu berechnen. Denn nach D) ist der Durchschnitt jedes Teilsystems der M_{δ_j} ($\delta_j = \pm 1$), in welchem ein Index j höchstens einmal vorkommt, nicht leer. Hingegen ist der Durchschnitt eines Teilsystems trivialerweise leer, wenn der Index j doppelt vorkommt. Wir vergleichen $N(\mathfrak{S})$ mit dem Nerven $\tilde{N}$ des Systems aller $(n-1)$-dimensionalen Randwürfel eines n-dimensionalen Würfels $W = \{(x_1, \ldots, x_n), |x_j| \leq 1\}$. Wir finden eine umkehrbar eindeutige Abbildung des Nerven $N(\mathfrak{S})$ auf $\tilde{N}$, wenn wir der Menge M_{δ_j} den Randwürfel $x_j = \delta_j$ zuordnen. Sowohl die Randwürfel und ihre Durchschnitte als auch die M_{δ_j} und ihre Durchschnitte sind konvex und damit simplexartig. Deshalb stimmen die Homologiegruppen der Vereinigung aller M_{δ_j} überein mit den Homologiegruppen von $N(\mathfrak{S})$ oder $\tilde{N}$, und diese stimmen überein mit den Homologiegruppen der Oberfläche von W, einer $(n-1)$-Sphäre. Nach dem Hilfssatz 6 und dem Zusatz dazu zerfällt $S^n - \bigcup M_{\delta_j}$ in zwei Teile A und A', die zueinander zentralsymmetrisch liegen.

b) Das Maß-n-tupel $\mathfrak{m}$ ist eine stetige Abbildung von S^n in den n-dimensionalen Würfel $W = (m_1, \ldots, m_n)$, $|m_j| \leq 1$ mit den Eigenschaften:

1) Wenn $\tilde{P}$ der Diametralpunkt von P auf S^n ist, dann ist $\mathfrak{m}(\tilde{P}) = -\mathfrak{m}(P)$ (nach dem 1. Hilfssatz);
2) Für P aus $\bigcup M_{\delta_j}$ ist $\mathfrak{m}(\tilde{P}) \neq \mathfrak{m}(P)$;
3) Für Punkte des Randes von A liegt der Bildpunkt auf dem Rand von W, d. h. $\max\limits_{j=1,\ldots,n} |m_j| = 1$.

Diese drei Eigenschaften von $\mathfrak{m}$ genügen bereits, um zu beweisen: Der Bildbereich von A umfaßt das Innere des Würfels W. Für den Bildbereich von A' gilt dann natürlich das gleiche.

Beweis: Wir definieren auf W die stetige relle Funktion

$$\psi_\varepsilon(m_1, \ldots, m_n) := \min\left\{1, \frac{1}{\varepsilon}\left(1 - \max_{j=1,\ldots,n} |m_j|\right)\right\}.$$

Wenn $\mathfrak{m}^* = (m_1^*, \ldots, m_n^*)$ ein beliebiges n-tupel von reellen Zahlen ist, dann ist wegen 3) die folgende Funktion $\mathfrak{m}(\varepsilon, \mathfrak{m}^*)$ stetig auf S^n

$$\mathfrak{m}(\varepsilon, \mathfrak{m}^*)(P) := \begin{cases} \mathfrak{m}(P) - 2 \cdot \mathfrak{m}^* \cdot \psi_\varepsilon(\mathfrak{m}(P)) & \text{für } P \in A, \\ \mathfrak{m}(P) & \text{sonst.} \end{cases}$$

Nach dem Satz von Ulam und Borsuk (II.) bildet $\mathfrak{m}(\varepsilon, \mathfrak{m}^*)$ mindestens ein Paar von Diametralpunkten von S^n in denselben

Punkt ab. Wegen 2) liegt der eine von diesen Punkten $P(\varepsilon, \mathfrak{m}^*)$ in A, $\tilde{P}(\varepsilon, \mathfrak{m}^*)$ liegt in A'. Es gilt also

$$\mathfrak{m}(P(\varepsilon, \mathfrak{m}^*)) - 2 \cdot \mathfrak{m}^* \cdot \psi_\varepsilon[\mathfrak{m}(P(\varepsilon, \mathfrak{m}^*))] = \mathfrak{m}(\tilde{P}(\varepsilon, \mathfrak{m}^*)) =$$

und das ist wegen Hilfssatz 1 $\qquad = -\mathfrak{m}(P(\varepsilon, \mathfrak{m}^*))$.

Umgeformt: $\mathfrak{m}(P(\varepsilon, \mathfrak{m}^*)) = \mathfrak{m}^* \cdot \psi_\varepsilon[\mathfrak{m}(P(\varepsilon, \mathfrak{m}^*))]$.

Wenn jetzt $|m_j^*| < 1 - \varepsilon$ für $j = 1, \ldots, n$, dann ist jede Komponente der rechten Seite absolut kleiner als $1 - \varepsilon$. $\psi_\varepsilon[\mathfrak{m}(P(\varepsilon, \mathfrak{m}^*))] = 1$, und unsere Gleichung reduziert sich zu

$$\mathfrak{m}(P(\varepsilon, \mathfrak{m}^*)) = \mathfrak{m}^*.$$

Damit ist bewiesen: Zu jedem $\mathfrak{m}^*$ aus dem Inneren des Würfels W existiert mindestens ein Schnitt $P(\mathfrak{m}^*)$ aus A, so daß $\mathfrak{m}(P(\mathfrak{m}^*)) = \mathfrak{m}^*$. Zu $-\mathfrak{m}^*$ existiert ebenfalls ein $P(-\mathfrak{m}^*)$ aus A mit $\mathfrak{m}(P(-\mathfrak{m}^*)) = -\mathfrak{m}^*$. $\tilde{P}(-\mathfrak{m}^*)$ liegt in A' und $\mathfrak{m}(\tilde{P}(-\mathfrak{m}^*)) = \mathfrak{m}^*$. Der Beweis von b) ist damit erbracht.

c) Einen Punkt aus A kann man auf S^n mit einem Punkt aus A' nur mit einer Kurve verbinden, welche mindestens ein M_{δ_j} schneidet. In einem solchen Schnittpunkt ist $m_j = \delta_j$, also gleich $+1$ oder -1.

d) Seien P und Q zwei Schnitte aus A mit $\mathfrak{m}(P) = \mathfrak{m}(Q)$ und g der Großkreis, welcher durch P und Q verläuft. g enthält auch $\tilde{P}$, liegt also nicht ganz in A, sondern schneidet mindestens ein M_{δ_j} nicht zwischen P und Q. Nach dem 3. Hilfssatz folgt aus $m_j(P) = m_j(Q)$, daß m_j konstant ist auf dem Großkreisbogen zwischen P und Q. Wir können daher $\mathfrak{m}$ zu einer in A umkehrbar eindeutigen Funktion abändern, wenn wir die m_j so variieren, daß sie auf jedem Bogen b eines Großkreises, welcher ein M_{δ_j} außerhalb b schneidet, innerhalb A streng monoton werden.

Zu diesem Zweck konstruieren wir wie im 7. Hilfssatz zu jedem Paar M_{δ_j} $(\delta_j = \pm 1)$ eine stetige Funktion u_j auf S_n mit den dort geforderten Eigenschaften. Wir definieren

$$m_j^\varepsilon := \frac{m_j + \varepsilon \cdot u_j}{1 + \varepsilon}, \quad j = 1, \ldots, n,$$

und $\mathfrak{m}^\varepsilon := [m_1^\varepsilon, \ldots, m_n^\varepsilon]$.

Die Abbildung $\mathfrak{m}^{\varepsilon}$ von S^n in den Würfel hat offensichtlich die Eigenschaften 1), 2) und 3) des Maß-n-tupels, welche zum Beweis von b) verwendet wurden. Darüber hinaus gilt für jedes ε, daß innerhalb von A nicht zwei Punkte P_1, P_2 dasselbe Bild $\mathfrak{m}^{\varepsilon}(P_1) = \mathfrak{m}(P_2)$ haben; denn auf jeden Bogen b eines Großkreises, welcher zwei Punkte aus A verbindet, ist mindestens ein m_j^{ε} streng monoton.

Lassen wir ε die Nullfolge ϱ_ν durchlaufen, dann sind alle $\mathfrak{m}^{\varrho_\nu}$ topologische Abbildungen der abgeschlossenen Hülle von A auf den Würfel und $\mathfrak{m}^{\varrho_\nu}$ konvergiert gleichmäßig gegen $\mathfrak{m}$. Wir können also den 8. Hilfssatz anwenden und erhalten das Ergebnis: Die Menge der Schnitte in A mit dem Maß-n-tupel $\mathfrak{m}^*$ ist zusammenhängend. Da dieselben Überlegungen auch für A' gelten, ist der Hauptsatz vollständig bewiesen.

6. Die folgende leicht zu beweisende Bemerkung zeigt, daß die Voraussetzungen für den Hauptsatz nicht nur in den einfachsten Fällen erfüllbar sind.

Bemerkung.

Hat der Gesamtraum Ω endliches positives Maß und sind $n+1$ meßbare Funktionen $f_0, \ldots, f_n$ vorgegeben, die auf jeder Menge von positivem Maße linear unabhängig sind, dann existieren stets $n+1$ Teilmengen von Ω $A_0, \ldots, A_n$ mit der Eigenschaft, daß es 2^{n+1} Linearkombinationen g_ϱ, $\varrho = 1, \ldots, 2^{n+1}$ von $f_0, \ldots, f_n$ gibt, welche die A_ν voneinander trennen. Das soll heißen: Zu jeder Vorzeichenkombination $\delta_0, \ldots, \delta_n$ $(\delta_\nu = \pm 1)$ existiert eine Linearkombination g_ϱ so, daß $2 \cdot \mu(A_\nu \cap \{x : g_\varrho(x) < 0\}) = \mu(A_\nu) \cdot (\delta_\nu + 1)$.

7. Abschließend betrachten wir kurz noch den Fall, daß die Voraussetzung D) von **3.** nicht erfüllt ist.

Satz 2.

a) *Sind n Teilmengen $A_1, \ldots, A_n$ von Ω mit endlichem positiven Maß μ gegeben und $n+1$ meßbare Funktionen $f_0, \ldots, f_n$, die auf jeder Teilmenge von $\bigcup_1^n A_\nu$ mit nichtverschwindendem*

Maße μ linear unabhängig sind, dann existiert immer eine Linearkombination g der $f_0, \ldots, f_n$ so, daß der durch $\{x: g(x) < 0\}$ und $\{x: g(x) \geq 0\}$ definierte Schnitt durch Ω gleichzeitig alle $A_1, \ldots, A_n$ halbiert, d. h. $\mathfrak{m}(g) = [0, 0, \ldots, 0]$.

b) *Zu einem anderen Maß-n-tupel braucht nicht für alle $A_1, \ldots, A_n$ und $f_0, \ldots, f_n$ mit den obigen Voraussetzungen ein erzeugender Schnitt zu existieren.*

Beweis: In Hilfssatz 4 wurde gezeigt, daß das Maß-n-tupel $\mathfrak{m}$ eine stetige Abbildung der n-Sphäre aller Schnitte durch Ω in den euklidischen n-dimensionalen Raum ist. Nach dem Satz von Ulam und Borsuk existiert ein Paar von Diametralpunkten P, $\tilde{P}$ von S^n, welche in denselben Punkt $\mathfrak{m}^*$ abgebildet werden. $\mathfrak{m}(P) = \mathfrak{m}^* = \mathfrak{m}(P)$. Nach Hilfssatz 1 gilt andererseits $\mathfrak{m}(P) = - \mathfrak{m}(\tilde{P})$. Daraus folgt $\mathfrak{m}^* = [0, \ldots, 0]$ und das heißt

$$0 = m_\nu(P) = 2 \cdot \frac{\mu(A_\nu \cap \{x: g(x) < 0\})}{\mu(A_\nu)} - 1, \quad \text{oder}$$

$$\mu(A_\nu \cap \{x: g(x) < 0\}) = \frac{1}{2} \cdot \mu(A_\nu) \text{ für alle } \nu = 1, \ldots, n,$$

wenn g ein Repräsentant des Schnittes P ist, q. e. d.

Zum Beweise von b) geben wir für jedes andere $\mathfrak{m}'$ ein Gegenbeispiel an im Falle $n = 2$, welches sich aber sofort auf beliebige Dimensionen übertragen läßt:

μ sei das Lebesguesche Maß in der Ebene E^2, die f_ν seien die Funktionen x, y, 1. Die Schnitte durch E^2 sind dann die Halbebenen.

Wir unterscheiden zwei Fälle:

a) $m_1' = \pm 1$. Wir wählen A_1: $\left\{(x, y): |y| \leq \min\left(\frac{1}{x^2}, \frac{1}{\sqrt{|x|}}\right)\right\}$. A_1 hat positives endliches Maß. Doch es existiert keine Halbebene, die A_1 fast ganz auf der einen Seite hat.

b) $m_1' \neq \pm 1$, $m_2' \neq \pm 1$, $m_1' \neq 0$. Wenn A_1 das Innere des Einheitskreises ist, dann haben die Geraden, welche A_1 im gewünschten Verhältnis teilen, einen positiven Abstand d vom Ursprung. Ist

A_2 z. B. eine Kreisscheibe um o mit einem Radius kleiner als d, dann teilt keine dieser Geraden A_2 im richtigen Verhältnis.

Die Menge der Werte von $\mathfrak{m}$ im Falle b) ist eine Kurve durch o. Der Wertebereich von $\mathfrak{m}$ enthält also im allgemeinen auch keine volle Umgebung von $[0, \ldots, 0]$.

Literatur:

(1) Hugo Steinhaus:
„Sur la division de l'espace par les plans et des ensembles plan par les cercles".
Fundamenta Mathematicae 33 (1945), p. 245–263

(2) Georg Aumann:
„Reelle Funktionen". Springer-Verlag 1954.

(3) H. Seifert und W. Threlfall:
„Lehrbuch der Topologie". Chelsea Publishing Company 1947.

(4) L. S. Pontryagin:
"Foundations of combinatorial topology". Graylock Press, Rochester N. Y. 1952.