BAYERISCHE AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN
MATHEMATISCH-NATURWISSENSCHAFTLICHE KLASSE

SITZUNGSBERICHTE

JAHRGANG

1959

MÜNCHEN 1960

VERLAG DER BAYERISCHEN AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN

In Kommission bei der C. H. Beck'schen Verlagsbuchhandlung München

Strecken- und Winkelübertragung mit Lineal und Eichmaß in der absoluten Geometrie

Von Siegfried Guber in München

Mit 6 Figuren

Vorgelegt von Herrn Frank Löbell am 10. Juli 1959

Bekanntlich ist es in der euklidischen Geometrie möglich, einen vorgegebenen Winkel mit Lineal und Streckenübertrager, etwa einem Stechzirkel, an eine vorgegebene Halbgerade nach einer gegebenen Seite hin anzutragen.[1] Kürschák[2] hat überdies gezeigt, daß für diese Konstruktion sogar schon Lineal und Eichmaß, also etwa ein Stechzirkel mit unverstellbarer Öffnung, ausreichen. Mit diesen beiden Instrumenten kann man dann auch beliebige Strecken übertragen. Sowohl bei Hilbert wie auch bei Kürschák wird vom Parallelenaxiom wesentlicher Gebrauch gemacht, so daß die dort verwendeten Schlüsse nicht in die absolute Geometrie übertragen werden können.

Unser Ziel ist es, zu zeigen, daß man auch in der absoluten Geometrie mit Lineal und Eichmaß Strecken und Winkel übertragen kann. Ursprünglich bestand nur der Wunsch, zu beweisen, daß man in der absoluten Geometrie mit Lineal und Streckenübertrager auch Winkel übertragen kann, da nur beabsichtigt war, zu untersuchen, ob bei Zugrundelegung des Hilbertschen Axiomensystems alle drei axiomatisch geforderten Konstruktionshilfsmittel notwendig sind, oder ob man vielleicht eines davon entbehren kann. Dabei wollen wir unter einem axiomatisch geforderten Konstruktionshilfsmittel ein Instrument verstehen,

---

[1] D. Hilbert, Grundlagen der Geometrie, Leipzig 1899, S. 80.

[2] J. Kürschák, „Das Streckenabtragen", Math. Ann. Bd. 55 (1902), S. 597–598. – Die viel älteren Konstruktionen mit Hilfe des Lineals und eines Zirkels unveränderlicher Öffnung werden behandelt in einer Abhandlung von W. M. Kutta, „Zur Geschichte der Geometrie mit konstanter Zirkelöffnung", Leopoldina, Nova acta, Halle 1897, S. 71–101.

mit dem man eine axiomatisch geforderte Grundkonstruktion ausführen kann und nicht mehr. Bei Zugrundelegung des Hilbertschen Axiomensystems[1] sind dies: Das Lineal, mit dem man die eindeutig bestimmte Verbindungsgerade zweier verschiedener Punkte und den Schnittpunkt zweier verschiedener Geraden, falls dieser existiert, konstruieren kann; der Streckenübertrager, mit dem man eine beliebig vorgegebene Strecke auf einer gegebenen Halbgeraden von deren Ausgangspunkt aus abtragen kann; schließlich der Winkelübertrager, der es gestattet, zu einer von einem Punkt O ausgehenden Halbgeraden eine zweite, ebenfalls von O ausgehende Halbgerade so zu konstruieren, daß der von ihnen eingeschlossene Winkel einem vorgegebenen Winkel kongruent ist. Es wird sich nun herausstellen, daß sich der Strecken- und der Winkelübertrager durch das Eichmaß ersetzen lassen; die ein für allemal fest vorgegebene Strecke, die mit ihm übertragen werden kann, wollen wir Einheitsstrecke nennen und mit ε bezeichnen.[2]

Wir setzen das Hilbertsche Axiomensystem der absoluten Geometrie, also die Axiomgruppen I, II, III, V voraus und bedienen uns folgender Symbole:

Mit großen Buchstaben A, B, ... wollen wir Punkte und mit kleinen Buchstaben g, h, ... Geraden bezeichnen. (A, B) bezeichne die Gerade durch A und B, AB die Strecke mit den Endpunkten A und B, (A/B) die von A ausgehende Halbgerade durch B, $\sphericalangle\,(ABC)$ den Winkel der Halbgeraden (B/A) und (B/C), schließlich $g \cap h$ den Schnittpunkt der beiden Geraden g und h. Ferner heiße $g \perp h$: g und h stehen aufeinander senkrecht, $P \in g$: P ist inzident mit g, $P \notin g$: P ist nicht inzident mit g, und $A < B > C$: B liegt zwischen A und C. Doppelbogen in den Figuren bezeichnen rechte Winkel.

[1] D. Hilbert, Grundlagen der Geometrie, Stuttgart 1956[8], S. 1–33. Künftig beziehen wir uns stets auf diese Auflage.

[2] Den Anstoß zur Untersuchung dieser allgemeineren Frage, ob für die axiomatisch geforderten Grundkonstruktionen nicht auch in der absoluten Geometrie schon Lineal und Eichmaß als Instrumente ausreichen, verdanke ich Herrn Professor Löbell, ebenso den Hinweis auf die in Fußnote 2, S. 251, angeführte Arbeit von W. M. Kutta.

Unseren Betrachtungen schicken wir noch fünf Hilfssätze voraus, die wir der Vollständigkeit halber anführen:

Satz 1: Die Halbierende des der Basis im gleichschenkligen Dreieck gegenüberliegenden Winkels steht senkrecht auf der Basis und halbiert diese.

Bew.: D. Hilbert, l. c., S. 17, 18.

Satz 2: Die Mittelsenkrechte einer Seite eines Dreiecks steht senkrecht auf der Verbindungsgeraden der Mittelpunkte der beiden anderen Seiten. (Fig. 4)

Bew.: D. Hilbert, l. c., S. 44.

Satz 3: In jedem Dreieck liegt der größeren Seite der größere Winkel gegenüber.

Bew.: D. Hilbert, l. c., S. 25.

Satz 4: Schneiden sich in einem Dreieck zwei der Höhen in einem Punkt, so geht auch die dritte Höhe durch diesen Punkt hindurch.

Bew.: R. Baldus, Nichteuklidische Geometrie, Berlin 1944[2], 1953[3], S. 99.

Satz 5: Die Seitenhalbierenden eines Dreiecks schneiden sich in einem Punkt.

Bew.: R. Baldus, l. c., S. 102.

Nach diesen vorbereitenden Sätzen wollen wir die eigentlichen Grundaufgaben behandeln.

Satz 6: Die Halbierende eines Winkels kann mit Lineal und Eichmaß konstruiert werden.

Bew.: Wir verwenden die bereits bekannte Konstruktion (Fig. 1): Vom Scheitel O des Winkels aus tragen wir auf jeder der beiden von O ausgehenden Halbgeraden unsere Einheitsstrecke zweimal ab: $OA = AB = OA' = A'B' = \varepsilon$, wobei A, B auf der einen, A', B' auf der anderen Halbgeraden liegen mögen. Ist dann $C =$

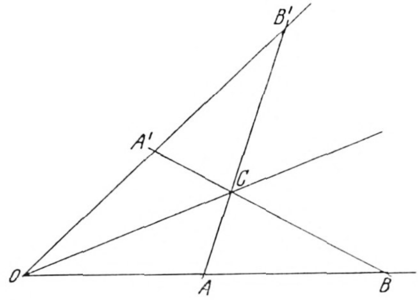

Fig. 1

$=(A, B') \cap (B, A')$, so ist, wie aus den Kongruenzsätzen, die ja in der absoluten Geometrie gelten, unmittelbar folgt, (O/C) die gesuchte Winkelhalbierende. Die Existenz von C ist durch Satz 5 gesichert.

Satz 7: Zu einer gegebenen Geraden g kann mit Lineal und Eichmaß eine Senkrechte konstruiert werden.

Bew.: Es sei $P \in g$ beliebig; auf g tragen wir von P aus nach beiden Seiten unser Eichmaß ab: $A, B \in g$ mit $AP = PB = \varepsilon$ und $A < P > B$. h sei eine beliebige, von g

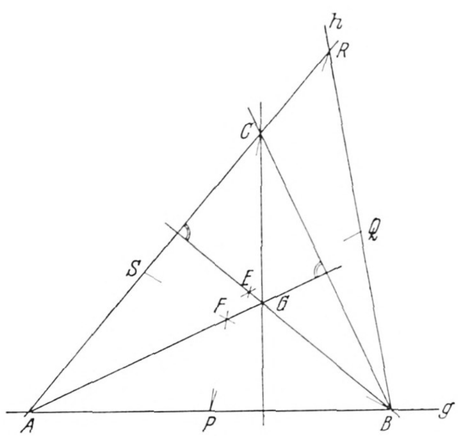

Fig. 2

verschiedene Gerade durch B und es seien $Q, R \in h$ mit $BQ = QR = \varepsilon$ und $B < Q > R$. Ist $E = (R, P) \cap (A, Q)$, so gilt nach Satz 1 $(B, E) \perp (A, R)$.

Weiter seien $S, C \in (A, R)$ mit $AS = SC = \varepsilon$, wobei S bezüglich g in derselben Halbebene liegen möge wie Q und R, und außerdem sei $A < S > C$. Ist $F = (B, S) \cap (P, C)$, so ist $(A, F) \perp (B, C)$. Der Durchschnitt von (A, F) mit (B, E) existiert in jedem Falle, d.h. wie man auch $h\,(h \neq g)$ wählen mag. Man sieht das wie folgt ein: Sei $T = (B, E) \cap (A, R)$. Da $g \neq h$ ist, schließen (B/A) und (B/R) einen Winkel ein, der kleiner ist als zwei Rechte. Per constructionem ist (B, E) die Halbierende des Winkels (ABR), also ist $\sphericalangle\,(ABE)$ kleiner als ein rechter Winkel. Da $\sphericalangle\,(ATB)$ ein rechter ist, folgt aus Satz 3, daß $A < T > C$ ist. Ist $U = (A, F) \cap (B, C)$, so gilt nach Satz 1: $CU = UB$, also jedenfalls $C < U > B$. Außerdem gilt $C < A > R$ sicherlich nicht. Dann ergibt sich aber aus dem Axiom II_4, angewandt auf das Dreieck (BRC), daß $(B, R) \cap (A, F) = V$ existiert. Daraus aber folgt dann nach Axiom II_4, angewandt auf das Dreieck (RTB), daß $(A, V) \cap (B, T) = G$ existiert. Also schneiden sich die Höhen im Dreieck (ABC) in einem Punkt, nämlich in G, so daß $(C, G) \perp g$ ist. Da $C \neq G$ ist, weil $C \notin g$ ist und G auf der Halbierenden des $\sphericalangle\,(CAB)$ liegt, ist (C, G) eindeutig bestimmt.

Def.: Ist g eine Gerade, P ein nicht auf g gelegener Punkt, h die Senkrechte zu g durch P und O der Schnittpunkt von g mit h, so nennen wir den Punkt P' das Spiegelbild von P bezüglich g, wenn gilt: $P' \in h$, $PO = OP'$ und $P < O > P'$.

Liegt P auf g, so definieren wir: $P' = P$.

Satz 8: Zu einer gegebenen Geraden g kann durch einen Punkt P, der nicht auf g liegt, mit Lineal und Eichmaß die Senkrechte konstruiert werden.

Bew.: Es sei h eine nach Satz 7 konstruierte Senkrechte zu g (Fig. 3) und O der Schnittpunkt von g mit h. Auf h tragen wir von O aus nach beiden Seiten die Einheitsstrecke ab: $A, B \in h$ mit $BO = OA = \varepsilon$. Außerdem mögen A und P bezüglich g in verschiedenen Halb-

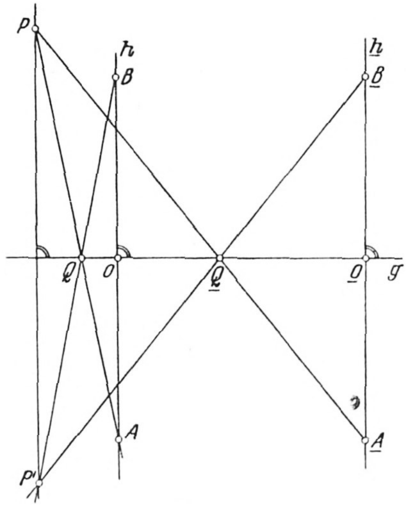

Fig. 3

ebenen liegen. Dann ist nach Axiom II_4 der Durchschnitt von (P, A) mit g nicht leer: $Q = (P, A) \cap g$. Da $AO = OB$, $\sphericalangle(AOQ) = \sphericalangle(BOQ)$ und $OQ = OQ$ ist, folgt aus Axiom III_5, daß auch $\sphericalangle(BQO) = \sphericalangle(AQO)$ ist. Folglich liegt das Spiegelbild von P bezüglich g auf (B, Q). Nun konstruieren wir eine zweite, von h verschiedene Senkrechte $\underline{h}$ zu g. Das ist sicherlich möglich.

Die zur obigen analoge Konstruktion führt zu einer von (B, Q) verschiedenen Geraden $(\underline{Q}, \underline{B})$, auf der der Spiegelpunkt P' von P ebenfalls liegen muß. Da P' existiert und wegen der Eindeutigkeit des Lotes zu g durch P eindeutig bestimmt ist, existiert der Durchschnitt von (B, Q) mit $(\underline{B}, \underline{Q})$ und es gilt: $(B, Q) \cap (\underline{B}, \underline{Q}) = P'$. (P, P') ist dann die gesuchte Senkrechte zu g durch P.

Satz 9: Zu einer gegebenen Geraden g kann durch einen Punkt P auf dieser Geraden mit Lineal und Eichmaß die Senkrechte konstruiert werden.

Bew.: Seien $A, B \in g$ mit $AP = PB = \varepsilon$ und $A < P > B$; ferner sei f eine beliebige, von g verschiedene Gerade durch A und es seien $Q, C \in f$ mit $AQ = QC = \varepsilon$ und $A < Q > C$. Da der Schnittpunkt zweier Seitenhalbierender eines Dreiecks stets existiert, existiert also

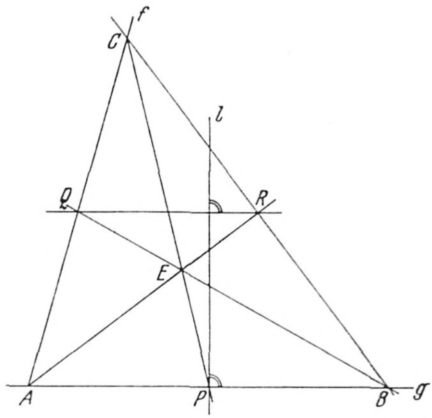

Fig. 4

$(Q, B) \frown (C, P) = E$. Ist dann $R = (A, E) \frown (B, C)$, so gilt nach Satz 5: $CR = RB$. Nun sei l das nach Satz 8 konstruierte Lot von P auf (Q, R). Nach Satz 2 steht l aber auch auf g senkrecht, womit der Satz bewiesen ist.

Satz 10: Eine gegebene Strecke AB kann mit Lineal und Eichmaß halbiert werden.

Bew.: Wir errichten in A und B die Lote auf (A, B) und tragen auf ihnen die Einheitsstrecke von A bzw. B aus ab, und zwar so, daß die Endpunkte C bzw. D dieser Strecken in getrennten Halbebenen bezüglich (A, B) liegen:

$AC = BD$, $(A, C) \perp (A, B)$, $(B, D) \perp (A, B)$. Dann existiert $(C, D) \frown (A, B) = M$ (Hilbert, l. c., S. 26) und es ist, wie aus den Kongruenzsätzen unmittelbar folgt, $AM = MB$.

Satz 11: Mit Lineal und Eichmaß kann ein Punkt P an einer Geraden g gespiegelt werden.

Bew.: Ist in dem Beweis von Satz 8 enthalten.

Satz 12: Mit Lineal und Eichmaß kann ein Winkel (AOB) an eine vorgegebene Halbgerade (P/Q) angetragen werden.

Bew.: Es genügt, eine der beiden Möglichkeiten zu konstruieren; die andere Lösung ergibt sich dann durch einfache Spiegelung der ersten Lösungshalbgeraden an der Geraden (P, Q).

Bei diesem und dem folgenden Beweis wird im Interesse einer einfacheren Ausdrucksweise auch dann von einem Winkel (YXZ) gesprochen, wenn die Halbgeraden (X/Y) und (X/Z) entweder zusammenfallen oder einander zu einer Geraden (YZ) mit $(Y < X > Z)$ ergänzen; unter der Winkelhalbierenden ist im ersten Fall $(X/Y) = (X/Z)$, im zweiten Fall das Lot zu (YZ) in X zu verstehen.

Wir unterscheiden zwei Fälle:

1. $O \neq P$. (Fig. 5)

In diesem Falle existiert eine eindeutig bestimmte Gerade, die O mit P verbindet. M sei der Mittelpunkt der Strecke OP und l das Lot zu (O, P) durch M.

Sind nun A' und B' die Spiegelbilder von A bzw. B bezüglich l und $\underline{A}'$, $\underline{B}'$ die Spiegelbilder von A', B' bezüglich der Halbierenden w des Winkels $(A'\,PQ)$, so ist $\sphericalangle\,(AOB) = \sphericalangle\,(A'PB') = \sphericalangle\,(\underline{A}'P\underline{B}') = \sphericalangle\,(QP\underline{B}')$, wie aus den Kongruenzsätzen folgt.

2. $O = P$.

In diesem Fall reicht die Spiegelung an der Halbierenden des Winkels (APQ) aus.

Damit ist der Beweis erbracht.

Die hierbei verwendeten Operationen sind nämlich sämtlich mit Lineal und Eichmaß ausführbar, wie aus den vorangehenden Sätzen ersichtlich ist.

Satz 13: Mit Lineal und Eichmaß kann eine vorgegebene Strecke AB von dem Punkt O der gegebenen Halbgeraden (O/S) aus auf dieser Halbgeraden abgetragen werden.

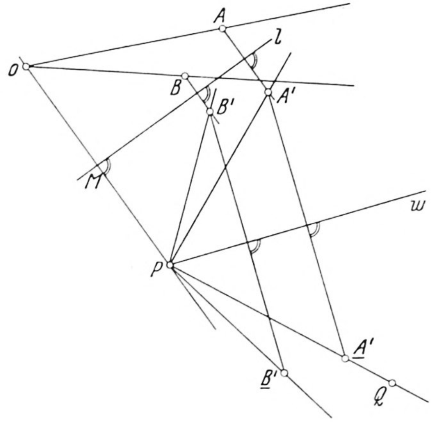

Fig. 5

Bew.: M sei der Mittelpunkt von AB und k das Lot zu (A, B) durch M (Fig. 6). Ferner sei l das Lot zu k durch O und C der Schnittpunkt von k und l; ohne Beschränkung der Allgemeinheit darf, wie sich zeigen wird, $C \neq M$ angenommen werden. Weiter sei D der Mittelpunkt von MC. Dann existieren folgende Durch-

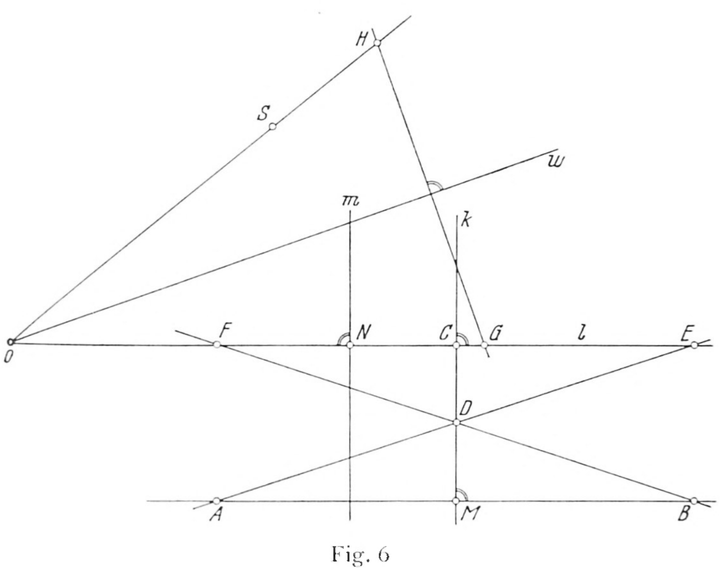

Fig. 6

schnitte: $(A, D) \frown l = E$ und $(B, D) \frown l = F$. Aus den Kongruenzsätzen folgt unmittelbar, daß $EF = AB$ ist. Nun sei N der Mittelpunkt von OE (o. B. d. A. ist $O \neq E$) und m das Lot zu l durch N. Dann ist O der Spiegelpunkt von E bezüglich m. G sei der Spiegelpunkt von F bezüglich m, so daß $OG = EF$ ist. Spiegeln wir nun noch G an der Halbierenden w des Winkels (SOE) und bezeichnen wir den Spiegelpunkt von G bezüglich w mit H, so liegt H auf (O/S) und es gilt: $OH = OG = AB$. Daß alle verwendeten Konstruktionen mit Lineal und Eichmaß ausführbar sind, folgt wieder aus den vorangehenden Sätzen. Mit einem Winkelübertrager, den wir ja jetzt benützen könnten, wäre dieser Beweis natürlich wesentlich einfacher gewesen.

Wir haben also insgesamt das Ergebnis, daß Lineal und Eichmaß als Konstruktionshilfsmittel ausreichen, um innerhalb der absoluten Geometrie alle axiomatisch geforderten Konstruktionen auszuführen. Natürlich werden die Konstruktionen einfacher, wenn wir statt des Eichmaßes den weiterreichenden Streckenübertrager verwenden oder wenn wir gar noch den Winkelübertrager hinzunehmen. Aus der Tatsache, daß man neben dem Lineal statt des Streckenübertragers nur das schwächere Eichmaß, den Winkelübertrager aber überhaupt nicht braucht, darf natürlich nicht geschlossen werden, daß das Hilbertsche Axiomensystem nicht minimal sei, wie das folgende Beispiel zeigen möge: Nehmen wir zu den Axiomen der absoluten Geometrie noch das euklidische Parallelenaxiom hinzu, so kann die eindeutig bestimmte Parallele zu einer Geraden g durch einen nicht auf ihr gelegenen Punkt P mit dem Lineal und Eichmaß konstruiert werden (D. Hilbert, l. c., S. 116). Bei Hinzunahme dieses Axioms, das ja sicherlich von den Axiomen der absoluten Geometrie unabhängig ist, muß also nicht auch ein neues Instrument zu den schon vorhandenen hinzugenommen werden. Fügen wir den Axiomen der absoluten Geometrie hingegen das hyperbolische Parallelenaxiom hinzu, so sind die zwei voneinander verschiedenen Grenzparallelen zu einer Geraden g durch einen nicht mit ihr inzidenten Punkt mit Lineal und Eichmaß nicht konstruierbar; um diese Konstruktion ausführen zu können, muß vielmehr ein dem Zirkel äquivalentes Instrument zum Lineal hinzugenommen werden.

Eines ist noch zu sagen: Wenn aus den Hilbertschen Axiomen der Satz gefolgert werden kann, daß zwei Dreiecke kongruent sind, deren Seiten man eindeutig so einander zuordnen kann, daß entsprechende Seiten kongruent sind, so sollte man ein Dreieck aus drei Seiten auch mit axiomatisch geforderten Instrumenten konstruieren können. Es wäre schön, wenn das Axiomensystem der absoluten Geometrie so bemessen wäre, daß dadurch gerade so viele Konstruktionshilfsmittel eingeführt werden, als zur Ausführung der nach dem Axiomensystem möglichen Konstruktionen nötig sind. Auf solch eine absolute Geometrie sollte man dann erst durch Hinzufügen weiterer Axiome andere Geometrien aufstocken.

Zum Schluß noch eine Frage, die in diesem Zusammenhange naheliegt: Sind Strecken- und Winkelübertrager in der absoluten Geometrie äquivalente Instrumente, d. h. kann man umgekehrt mit Lineal und Winkelübertrager auch Strecken übertragen? Diese Frage steht noch offen.