BAYERISCHE AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN
MATHEMATISCH-NATURWISSENSCHAFTLICHE KLASSE

SITZUNGSBERICHTE

JAHRGANG

1958

MÜNCHEN 1958

VERLAG DER BAYERISCHEN AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN

In Kommission bei der C.H. Beck'schen Verlagsbuchhandlung München

Bemerkungen zur Erzeugung der kubischen Raumkurven durch drei projektive Ebenenbüschel

Herrn Robert Sauer zum 60. Geburtstag am 16. September 1958 gewidmet

Von **Josef Lense** in München

Vorgelegt am 10. Oktober 1958

§ 1

Unter einer kubischen Raumkurve versteht man bekanntlich die Menge aller Punkte, deren homogene projektive Tetraederkoordinaten bei passender Wahl des Koordinatensystems durch die Gleichungen

$$x_1 : x_2 : x_3 : x_4 = t^3 : t^2 : t : 1 \tag{1}$$

gegeben sind, wobei der inhomogene Parameter t alle reellen Zahlen (einschließlich $\pm\infty$) durchläuft. Nach Ausübung einer Kollineation erhält man die Kurve in der allgemeinen Gestalt

$$\varrho x_\nu = a_{1\nu} + a_{2\nu} t + a_{3\nu} t^2 + a_{4\nu} t^3 \quad (\nu = 1, 2, 3, 4), \tag{2}$$

wobei ϱ ein Proportionalitätsfaktor und die Determinante der $a_{\mu\nu}$ von null verschieden ist. Umgekehrt ergibt sich (1) aus (2), indem man die Gleichungen (2) nach $1, t, t^2, t^3$ auflöst, wobei die x_ν die zur Substitution mit der Matrix $a_{\mu\nu}$ inverse Substitution erfahren, also wieder eine Kollineation angewendet wird. Dadurch, daß die Determinante der $a_{\mu\nu}$ von null verschieden ist, wird verhindert, daß alle x_ν gleichzeitig null werden; es müßten ja in diesem Fall $1, t, t^2, t^3$ null sein, was unmöglich ist.

Nun gilt bekanntlich der Satz: Drei projektive Ebenenbüschel erzeugen im allgemeinen eine kubische Raumkurve. Als Ausnahmen führt B. L. van der Waerden[1] an: 1. wenn entsprechende Ebenen der drei Büschel immer eine Gerade gemeinsam haben, 2. wenn die Schnittpunkte entsprechender Ebenentripel in einer festen Ebene liegen.

Sein Beweisgang ist folgender:

$$(3) \qquad L_1 + \lambda L_2 = 0, \quad M_1 + \lambda M_2 = 0, \quad N_1 + \lambda N_2 = 0$$

seien die drei projektiven Ebenenbüschel. Rechnet man aus diesen drei Gleichungen die Koordinaten des Schnittpunktes der drei zugeordneten Ebenen aus, so werden diese durch dreireihige Determinanten, also durch Polynome dritten Grades in λ dargestellt:

$$4) \qquad y_1 : y_2 : y_3 : y_4 = \varphi_1(\lambda) : \varphi_2(\lambda) : \varphi_3(\lambda) : \varphi_4(\lambda)$$

mit $\varphi_\nu(\lambda) = a_{1\nu} + a_{2\nu}\lambda + a_{3\nu}\lambda^2 + a_{4\nu}\lambda^3 \quad (\nu = 1, 2, 3, 4)$.

Ist die Determinante D der $a_{\mu\nu}$ von null verschieden, so ist die durch (4) dargestellte Kurve nach (2) eine kubische Raumkurve. Besteht aber eine lineare Abhängigkeit

$$(5) \qquad c_1\varphi_1 + c_2\varphi_2 + c_3\varphi_3 + c_4\varphi_4 = 0,$$

so heißt das, daß alle Punkte y in einer festen Ebene liegen.

Dazu ist zu sagen, daß diese Aussage richtig sein kann, aber nicht richtig sein muß. Denn was heißt lineare Abhängigkeit: Man kann feste Zahlen c_ν, die nicht alle null sind, so bestimmen, daß (5) für alle λ gilt; es müssen also die Gleichungen $\sum_{\nu=1}^{4} c_\nu a_{\mu\nu} = 0 \; (\mu = 1, 2, 3, 4)$ erfüllt sein. Dazu ist notwendig und hinreichend, daß die Determinante D der $a_{\mu\nu}$ verschwindet. In diesem Fall stellen die Gleichungen (4) keine kubische Raumkurve dar, aber man kann noch nicht behaupten, daß die Punkte y in einer festen Ebene liegen müssen.

Es kann nämlich sein, daß für bestimmte λ-Werte die Polynome $\varphi_\nu(\lambda)$ null werden, d. h., daß die Matrix der Koeffizienten

[1] B. L. van der Waerden, Einführung in die algebraische Geometrie, Berlin 1939, J. Springer, S. 43.

der x_ν in den Gleichungen (3) nicht vom Rang 3, sondern von einem niedrigeren Rang ist. In diesem Fall haben die drei zugeordneten Ebenen nicht nur einen Punkt, sondern mindestens eine Gerade gemeinsam, und trotzdem ist die Beziehung (5) erfüllt, weil ja die $\varphi_\nu(\lambda)$ für diese bestimmten λ-Werte null sind.

§ 2

Ein einfaches Beispiel möge diese Tatsache klären. Die drei projektiven Ebenenbüschel seien

$$x_1 = \lambda x_2, \quad x_3 = \lambda x_4, \quad x_2 + x_3 = \lambda(x_1 + x_4). \tag{6}$$

Auflösung nach den x_ν gibt

$$x_1 : x_2 : x_3 : x_4 = 0 : 0 : \lambda(\lambda^2 - 1) : (\lambda^2 - 1),$$

also für $\lambda \neq \pm 1$ die Gerade $g_1 : x_1 = x_2 = 0$. Ist dagegen $\lambda = \pm 1$, so ist die dritte der Gleichungen (6) die Summe der beiden ersten und man erhält $g_2 : x_1 - x_2 = x_3 - x_4 = 0$ bzw. $g_3 : x_1 + x_2 = x_3 + x_4 = 0$ als Schnittgeraden der drei entsprechenden Ebenen. Die beiden Geraden g_2 und g_3 schneiden die Gerade g_1, sind aber untereinander windschief. Die beiden ersten Büschel (6) erzeugen die Fläche $x_1 x_4 = x_2 x_3$, das erste und dritte die Fläche $x_2(x_2 + x_3) = x_1(x_1 + x_4)$. Ihre Schnittkurve zerfällt in die Geraden g_1, g_2, g_3, dabei zählt g_1 doppelt, weil sich die beiden Flächen längs dieser Geraden berühren.

Das zweite und dritte Büschel erzeugen die Fläche $x_4(x_2 + x_3) = x_3(x_1 + x_4)$. Entsprechende Ebenen treffen sich in den geraden Linien einer Schar S_2, die von g_1 geschnitten werden. Somit ergeben sich als Schnittpunkte entsprechender Ebenen sämtlicher drei Büschel die Punkte von g_1. Aber zweimal geht die entsprechende Ebene des ersten Büschels durch je eine Gerade der Schar S_2, nämlich durch die Geraden g_2 und g_3. Die Schar S_2 ist die eine der beiden Scharen S_1 und S_2 von geraden Linien, die auf der vom zweiten und dritten Büschel erzeugten Fläche liegen. Die Träger der drei Büschel gehören der Schar S_1 an.

§ 3

Die Behauptung des Herrn von der Waerden ist demnach so zu verstehen, daß die genannten Fälle wohl Ausnahmefälle sind, aber nicht alle Ausnahmefälle erschöpfen. Daß dem so ist, läßt sich auch folgendermaßen einsehen: Das erste und zweite der drei projektiven Ebenenbüschel erzeugen eine Fläche zweiter Ordnung, ebenso das erste und dritte. Das Schnittgebilde dieser beiden Flächen besteht aus dem Träger des ersten Büschels und einem Restschnitt, dieser ist das Erzeugnis der drei Büschel. Geht man nun die bekannten Schnittgebilde zweier Flächen zweiter Ordnung (einschließlich Kegel und zerfallender Flächen) durch, die mindestens eine Gerade gemeinsam haben, so erhält man unter anderen als Restschnitte einen Kegelschnitt mit einer ihn schneidenden, nicht in seiner Ebene liegenden Geraden, wobei der Kegelschnitt auch zerfallen kann, oder drei durch einen Punkt gehende Geraden, die nicht in einer Ebene liegen, also sicher Restschnitte, die nicht in einer Ebene liegen. Zum ersten der genannten Fälle (mit zerfallendem Kegelschnitt) gehört unser Beispiel.

Bei einer systematischen Untersuchung der Frage, wann drei projektive Ebenenbüschel wirklich eine kubische Raumkurve erzeugen, könnte man allenfalls so vorgehen.

Wir nehmen zuerst an, daß die Träger von mindestens zwei der Büschel windschief sind. Durch passende Wahl des Koordinatentetraeders können wir diese Büschel in der Gestalt $x_1 = \lambda x_2$ und $x_3 = \lambda x_4$ voraussetzen. Die Gleichung des dritten lautet dann allgemein

$$\sum_{\nu=1}^{4} (a_\nu - \lambda b_\nu)\, x_\nu = 0 .$$

Auflösung nach den x_ν gibt für die Polynome $\varphi_\nu(\lambda)$ die Formeln

$$\varphi_1(\lambda) = -\lambda\psi(\lambda), \quad \varphi_2 = -\psi(\lambda), \quad \varphi_3 = \lambda\chi(\lambda), \quad \varphi_4 = \chi(\lambda)$$

mit $\chi(\lambda) = a_2 + (a_1 - b_2)\lambda - b_1\lambda^2, \quad \psi(\lambda) = a_4 + (a_3 - b_4)\lambda - b_3\lambda^2$

und daraus $D = (a_4 b_1 - a_2 b_3)^2 - a_4 b_3 (a_1 - b_2)^2 - a_2 b_1 (a_3 - b_4)^2$
$+ (a_4 b_1 + a_2 b_3)\,(a_1 - b_2)\,(a_3 - b_4)$.

$D \neq 0$ ist notwendig und hinreichend dafür, daß wirklich eine kubische Raumkurve erzeugt wird. Man überzeugt sich leicht, daß in dem obigen Beispiel $D = 0$ ist.

Gibt es keine windschiefen Träger, so gehen sie entweder alle durch einen Punkt oder liegen alle in einer Ebene. Im ersten Fall erzeugen je zwei der Büschel einen Kegel, der auch zerfallen kann; alle diese Kegel haben denselben Scheitel, als Schnittgebilde kann also niemals eine kubische Raumkurve entstehen.

Im zweiten Fall bilden die Träger ein Dreieck mit den Seiten a, b, c und den Ecken A, B, C. Die projektiven Büschel a und b erzeugen einen Kegel mit dem Scheitel C, die projektiven Büschel a und c einen Kegel mit dem Scheitel B. Diese beiden Kegel haben die Mantellinie a gemeinsam. Wenn sie sich längs a berühren, zählt a für ihr Schnittgebilde doppelt, der Restschnitt besteht aus a und einer Kurve zweiter Ordnung. Wenn sie sich dagegen längs a nicht berühren, ist der Restschnitt eine kubische Raumkurve.[1] Der den Büscheln a, b, c gemeinsamen Ebene $A\,B\,C$ entspricht, wenn man sie als Ebene von b betrachtet, in a die Tangentialebene des Kegels C längs a, wenn man sie dagegen als Ebene von c betrachtet, in a die Tangentialebene des Kegels B längs a. Diese beiden entsprechenden Ebenen dürfen daher nicht zusammenfallen. Selbstverständlich dürfen keine zwei der Büschel perspektiv sein, weil sonst der betreffende Kegel zerfallen würde und daher auf ihm keine kubische Raumkurve liegen könnte.

---

[1] Siehe z. B. W. Killing, Lehrbuch der analytischen Geometrie in homogenen Koordinaten, Bd. II, S. 206–208, Paderborn 1901, F. Schöningh.