BAYERISCHE AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN
MATHEMATISCH-NATURWISSENSCHAFTLICHE KLASSE

SITZUNGSBERICHTE

JAHRGANG

1957

MÜNCHEN 1958

VERLAG DER BAYERISCHEN AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN

In Kommission bei der C. H. Beck'schen Verlagsbuchhandlung München

Über ein mechanisches Modell zur Analyse und Darstellung typisch quantentheoretischer Erscheinungen

Von Hermann Hartmann in Frankfurt a. M.

Mit 2 Abbildungen

Vorgelegt von Herrn Günter Scheibe am 11. Januar 1957

Quantentheoretische Analogiemaschinen sind verschiedentlich zur Lösung von Rechenproblemen entwickelt und eingesetzt worden. Solche Vorrichtungen bieten darüber hinaus die Möglichkeit, das Einfühlungsvermögen in die wellenmechanischen Erscheinungen zu entwickeln und zu stärken. Die bisher bekannten Modelle sind allerdings alle für die Lösung von Säkularproblemen[1] gedacht und für die Demonstration der Grunderscheinungen ungeeignet. Für diesen Zweck wird in der Literatur häufig die schwingende Saite als Analogiefall herangezogen. Die Korrespondenz zwischen dem quantentheoretischen Problem und dem Modell ist in diesem Fall aber nur für die einfache kräftefreie Bewegung streng gegeben, und es ist bisher nicht möglich, an einem einfachen mechanischen Modell zu demonstrieren, warum z. B. Wellenzüge aus einer Potentialmulde nicht „herauslaufen".

Es ist ein charakteristischer Zug der Quantentheorie, daß sie eine vollkommene modellmäßige Darstellung nicht erlaubt. Modelle können also immer nur dazu dienen, Vorstufen der vollständigen Quantentheorie abzubilden. Zwei einander äquivalente Vorstufen, von denen beiden aus ein und dieselbe Quantentheorie entwickelt werden kann, sind die klassische Partikelmechanik und die klassische Feldtheorie. Die letzte Theorie enthält aber schon eine Reihe von Elementen, die auf der Teilchenseite des quantentheoretischen Gebäudes erst bei der Quantisierung des Teilchenbildes auftauchen und die deshalb in der

[1] Vgl. z. B. H. Hartmann und W. Stürmer, Z. Naturforsch. 5a, 99 (1950).

Regel als typische Quanteneffekte empfunden werden. Wenn es also gelingt, ein mechanisches Modell zur Darstellung der klassischen Feldtheorie etwa der Kathodensubstanz (Elektronenmaterie)[1] anzugeben, so ist damit das Ziel der weitgehenden modellmäßigen Darstellung typisch quantentheoretischer Erscheinungen erreicht.

Die Gleichung des klassischen Kathodenfeldes lautet im eindimensionalen Fall

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2 \Psi}{\partial x'^2} + v\Psi = -\frac{\hbar}{i}\frac{\partial \Psi}{\partial t}. \tag{1}$$

Dabei bedeuten:

Ψ die (komplexe) Feldfunktion
x' die (lineare) Koordinate
t die Zeit
$\hbar = h/2\pi$, h die Planck'sche Konstante
m die Elektronenmasse
v die Potentialfunktion (von x')
i die imaginäre Einheit.

Es interessieren besonders die den Quantenzuständen entsprechenden stehenden Wellen des Kathodenfeldes:

$$\Psi = \psi(x')\, e^{-i\omega t} \qquad \omega\text{: Kreisfrequenz.} \tag{2}$$

Für die Amplitudenfunktionen $\psi(x')$ gilt nach (2) und (1) die Schrödingergleichung

$$\frac{d^2\psi}{dx'^2} = \frac{2m}{\hbar^2}(v - \hbar\omega)\,\psi. \tag{3}$$

Nun betrachten wir eine homogene Saite der Massendichte ϱ, die mit der Kraft σ gespannt sei und auf die noch zusätzlich rücktreibende Kräfte in der Art wirken, daß $K\Psi dx$ der Betrag der auf das Saitenteilchen der Länge dx wirkenden Kraft ist, wobei Ψ die Elongation der Saite und K ein im allgemeinen von x ab-

[1] Diese Bezeichnungsweise haben unabhängig voneinander G. Ludwig, Die Grundlagen der Quantenmechanik, Berlin 1954 und H. Hartmann, Die chemische Bindung, Berlin 1955 zuerst angewandt.

hängiger Proportionalitätsfaktor ist. Die Bewegungsgleichung einer solchen „Saite mit Kräften" lautet:

$$-\sigma \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} + K\Psi = -\varrho \frac{\partial^2 \Psi}{\partial t^2}. \tag{4}$$

Diese Gleichung entspricht der Feldgleichung (1) nicht. Sucht man aber nun die stehenden Wellen der Saite

$$\Psi = \psi(x) \cos \omega_s t \qquad \omega_s: \text{Kreisfrequenz der Saite} \tag{5}$$

auf, so ergibt sich aus (5) und (4) als Gleichung für die Amplitudenfunktionen ψ

$$\frac{d^2\psi}{dx^2} = \frac{1}{\sigma}(K - \varrho\omega_s^2)\,\psi. \tag{6}$$

Um die Entsprechung zwischen den Gleichungen (3) und (6) für die Konstruktion von Modellen ausnützen zu können, ist es zweckmäßig, für die Koordinate des quantentheoretischen Problems eine neue Maßeinheit x_0' so festzulegen, daß x_0' von der Größenordnung der Erstreckung der durch v dargestellten Potentialmulden ist. Das bedeutet, daß man in (3) die neue Variable x durch

$$x = \frac{x'}{x_0'} \tag{7}$$

einführt. So nimmt (3) die Form

$$\frac{d^2\psi}{dx^2} = \frac{2mx_0'^2}{\hbar^2}[v(xx_0') - \hbar\omega]\,\psi. \tag{8}$$

an.

Jetzt wählt man die Kraftfunktion $K = K(x)$ des Saitenmodells so, daß

$$\frac{1}{\sigma} K(x) = \frac{2mx_0'^2}{\hbar^2}\, v(xx_0') \tag{9}$$

ist.

Dann bestimmt man durch Resonanzversuche die Eigenkreisfrequenzen ω_{sn} der Saite. Zu jeder von diesen bildet sich auf der Saite eine stehende Welle aus, deren Amplitudenfunktion genau einer Amplitudenfunktion des analogen feldtheoretischen Problems entspricht. Aus den Eigenfrequenzen ω_{sn} der Saite, er-

rechnen sich die Kreisfrequenzen ω_n der stehenden Kathodenfeldwellen nach

$$\frac{2 m x_0'^2 \omega_n}{\hbar} = \frac{\varrho}{\sigma} \omega_{sn}^2 \quad \text{zu} \quad \omega_n = \frac{\varrho \hbar}{2 m x_0'^2 \sigma} \omega_{sn}^2 . \tag{10}$$

Den ω_n kommt natürlich wegen der Willkürlichkeit des v-Nullpunktes keine Absolutbedeutung zu. Nur Differenzen von ω_n-Werten haben unmittelbare physikalische Bedeutung. Schwingungsvorgänge auf der Saite, bei denen gleichzeitig mehrere stehende Wellen angeregt sind, besitzen, da die Frequenzen in beiden Fällen in verschiedener Weise eingehen, kein quantentheoretisches Analogon.

Zur annähernden Realisierung für Demonstrationen wird es genügen, die „Saite mit Kräften" durch ein System von Drehpendeln zu ersetzen, die auf ein Torsionsband aufgereiht sind und an denen durch Federmechanismen oder geeignet angewendete Schwerkraftwirkung zusätzliche rücktreibende Kräfte angreifen.

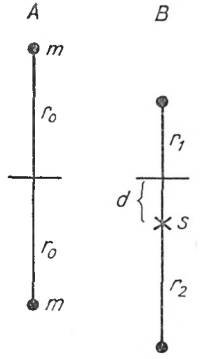

Abb. 1

A und B (Abb. 1) seien zwei Typen von in der Normallage vertikalen Torsionspendeln, die aus je zwei Massen m bestehen. Wenn r_1 und r_2 so gewählt sind, daß

$$r_1 = \sqrt{2 r_0^2 - r_2^2} \tag{11}$$

ist, haben A und B dasselbe Trägheitsmoment $\Theta = 2 m r_0^2$. Die auf Pendel B von der Schwere herrührende rücktreibende Kraft

hat einen Betrag, der dem Abstand d des Schwerpunktes S vom Drehpunkt proportional ist. Damit ist

$$|K| \sim d = \tfrac{1}{2}\left\{r_2 - \sqrt{2\,r_0^2 - r_2^2}\right\}. \tag{12}$$

Will man etwa nun die Amplitudenfunktionen für den Fall des ebenen Potentialkastens endlicher Tiefe: $v \equiv 0$ für $-\frac{a}{2} < x < \frac{2}{a}$, $v \equiv v_0$ (positiv) für $x < -\frac{a}{2}$ und $x > \frac{a}{2}$ modellmäßig darstellen, so wird man den Kasten durch Pendel vom Typ A und die Umgebung durch solche vom Typ B darstellen (Abb. 2).

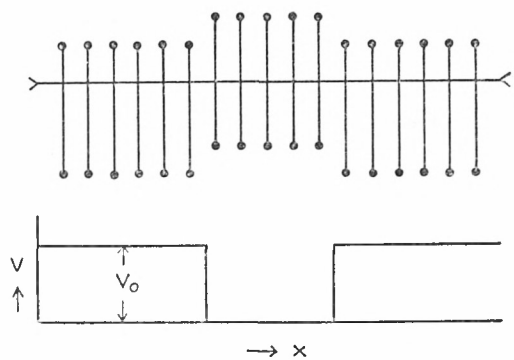

Abb. 2

Es ist jetzt leicht zu verstehen, daß bei hinreichender Kastentiefe v_0 (d. h. also bei hinreichend großem d) stehende Wellen möglich sind, deren Amplitudenfunktionen nur im Kastenbereich periodisch verlaufen, während sie außerhalb des Kastens exponentiell abfallen. Das Modell erklärt also anschaulich, warum Materiewellen bei hinreichender Muldentiefe nicht aus der Mulde herauslaufen.

Die dargestellten Überlegungen sind durch den Wunsch veranlaßt, für atomtheoretische Demonstrationen, wie sie Herr Scheibe[1] im Deutschen Museum (Abteilung Chemie) versucht hat und deren Wert kaum überschätzt werden kann, wirklich entsprechende Modelle zur Verfügung zu stellen.

[1] G. Scheibe, Fr. Baumgärtner u. M. Genzer, Z. angew. Chemie 67 (1955) 502–515.