BAYERISCHE AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN
MATHEMATISCH-NATURWISSENSCHAFTLICHE KLASSE

SITZUNGSBERICHTE

JAHRGANG

1956

MÜNCHEN 1956

VERLAG DER BAYERISCHEN AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN

In Kommission bei der C. H. Beck'schen Verlagsbuchhandlung München

Über die gegenseitige Lage zweier linearer Vektorräume

Von Dietrich Suschowk in München

Vorgelegt von Herrn Frank Löbell am 2. März 1956

In der vorliegenden Note wird gezeigt, daß man die gegenseitige Lage zweier Teilräume $\mathfrak{T}_1$ und $\mathfrak{T}_2$ eines endlichdimensionalen linearen Vektorraums durch die Eigenwerte einer gewissen linearen Transformation charakterisieren kann. Satz 1 gibt Aufschluß über die Eigenwerte dieser Transformation. Die Sätze 2 und 5 zeigen, daß zwei Hauptforderungen erfüllt sind, die man an eine solche Charakterisierung stellen wird, nämlich daß sie in $\mathfrak{T}_1$ und $\mathfrak{T}_2$ symmetrisch ist und daß Raumpaare, die durch eine unitäre Transformation des Gesamtraums ineinander überführt werden können, die gleiche gegenseitige Lage haben. Satz 4 gibt eine anschauliche Deutung der Vielfachheiten der Eigenwerte null und eins. Schließlich gestattet Satz 6 die Gesamtheit der möglichen Lagen zu überblicken.

Mit $\mathfrak{V}$ bezeichnen wir einen n-dimensionalen linearen Vektorraum über dem Körper der komplexen Zahlen. $\mathfrak{T}_i\,(i = 1,2)$ ist ein m_i-dimensionaler Teilraum von $\mathfrak{V}$. In $\mathfrak{V} \ni x, y, z, \ldots$ sei ein inneres Produkt (x, y) $(= \overline{(y, x)})$ erklärt. Der zu $\mathfrak{T}_i$ gehörige Projektor sei P_i[1]. Bekanntlich ist P_i idempotent $(P_i^2 = P_i)$ und hermitesch $(P_i^* = P_i)$.

Satz 1: *Alle Eigenwerte der linearen Transformation* $P_1 P_2$ *liegen im Intervall* $[0,1]$. *Mindestens* $n - m_1$ *von ihnen verschwinden.*

Beweis: Da $P_1 P_2 \mathfrak{T}_1 \subset \mathfrak{T}_1$ ist, so gibt es in $\mathfrak{V}$ ein orthogonalnormiertes Koordinatensystem k, in dem für die Darstellung

---

[1] P_i ist die für jeden Vektor $z = x + y \in \mathfrak{V}$ mit $x \in \mathfrak{T}_i$ und $y \in \mathfrak{T}_i^{\perp}$ durch $P_i z = x$ definierte lineare Transformation ($\mathfrak{T}_i^{\perp}$ ist das orthogonale Komplement von $\mathfrak{T}_i$ in $\mathfrak{V}$).

$\mathfrak{D}_k(P_1 P_2)$ von $P_1 P_2$ gilt

$$\mathfrak{D}_k(P_1 P_2) = \left(\begin{array}{c:c} [a_{kl}] & * \\ \hdashline 0 & [b_{kl}] \end{array}\right).$$

$[a_{kl}]$ ist eine m_1-reihige und $[b_{kl}]$ eine $(n-m_1)$-reihige (quadratische) Matrix und zwar ist bekanntlich $[a_{kl}]$ die k-Darstellung des von $P_1 P_2$ in $\mathfrak{T}_1$ induzierten Endomorphismus A und $[b_{kl}]$ die k-Darstellung des von $P_1 P_2$ im Quotientenraum $\mathfrak{V}/\mathfrak{T}_1$ induzierten Endomorphismus B. Es zerfällt also das charakteristische Polynom $p\,(P_1 P_2; \lambda)$ von $P_1 P_2$:

$$p\,(P_1 P_2; \lambda) = p\,(A; \lambda)\, p\,(B; \lambda).$$

Da auf $\mathfrak{T}_1$ $A = P_1 P_2 = P_1 P_2 P_1$ und $P_1 P_2 P_1 = AA^*$ ist, so ist A hermitesch und positiv semidefinit. Sämtliche Eigenwerte von A sind daher reell und nicht negativ. Da $\|P_1 P_2 P_1\| \leqq \|P_1\| \cdot \|P_2\| \cdot \|P_1\| = 1$[1] und der größte Eigenwert einer hermiteschen Transformation gleich ihrer Norm ist, sind die Eigenwerte von A außerdem nicht größer als eins. $P_1 P_2$ bildet jeden Vektor aus $\mathfrak{V}/\mathfrak{T}_1$ in den Nullvektor ab. $[b_{kl}]$ ist daher eine Nullmatrix; also folgt $p\,(B; \lambda) = \lambda^{n-m_1}$. Der Satz ist damit bewiesen.

Wir numerieren nun die Eigenwerte $\lambda_j\,(j = 1, \ldots, n)$ von $P_1 P_2$ nach nicht zunehmender Größe: $1 \geqq \lambda_1 \geqq \ldots \geqq \lambda_n$ und setzen

$$J(\mathfrak{T}_1, \mathfrak{T}_2) := (\lambda_1, \ldots, \lambda_n). \tag{1}$$

Damit ist jedem Paar von Teilräumen aus $\mathfrak{V}$ ein geordnetes n-Tupel reeller Zahlen zugeordnet. Daß es dabei auf die Reihenfolge der Teilräume nicht ankommt, besagt der

Satz 2: *Es ist*

$$J(\mathfrak{T}_1, \mathfrak{T}_2) = J(\mathfrak{T}_2, \mathfrak{T}_1).$$

Beweis: Der Satz folgt aus der bekannten Tatsache, daß $P_1 P_2$ und $P_2 P_1$ die gleichen Eigenwerte mit den gleichen Vielfachheiten besitzen.

Man kann daher die zweite Aussage des Satzes 1 verschärfen: Mindestens $n - \min(m_1, m_2)$ der $\lambda_j\,(j = 1, \ldots, n)$ sind gleich null.

[1] Die Norm $\|T\|$ einer linearen Transformation T ist definiert durch $\|T\| := \inf_{x \in \mathfrak{V}} \{M : |Tx| \leqq M|x|\}$.

Satz 3: *Es sei*

$$J(\mathfrak{T}_1, \mathfrak{T}_2) = (\lambda_1, \ldots, \lambda_{m_1}, 0, \ldots, 0).$$

Dann ist

$$J(\mathfrak{T}_1, \mathfrak{T}_2^{\perp}) = (1 - \lambda_{m_1}, \ldots, 1 - \lambda_1, 0, \ldots, 0).$$

Beweis: Zum Paar $(\mathfrak{T}_1, \mathfrak{T}_2^{\perp})$ gehören die Eigenwerte von $P_1(E - P_2) = P_1 - P_1 P_2$. Diese lineare Transformation hat $\mathfrak{T}_1$ als invarianten Unterraum. Daher gilt auf $\mathfrak{T}_1$: $P_1 - P_1 P_2 = E - P_1 P_2 = E - P_1 P_2 P_1 = E - A$. Auf $\mathfrak{V}/\mathfrak{T}_1$ induziert $P_1(E - P_2)$ wie zuvor den Nullendomorphismus. Der Satz ist damit bewiesen.

Bezeichnen wir die Vielfachheit des Auftretens der Zahl a unter den Zahlen $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ mit $v(a; \lambda_1, \ldots, \lambda_k)$, so lautet

Satz 4: *Es ist* 1) $\dim(\mathfrak{T}_1 \frown \mathfrak{T}_2^{\perp}) = v(0; \lambda_1, \ldots, \lambda_{m_1})$, *und*
2) $\dim(\mathfrak{T}_1 \frown \mathfrak{T}_2) = v(1; \lambda_1, \ldots, \lambda_n)$.

Beweis: 1) Ist $\mathfrak{N}$ der zum Eigenwert null von $P_1 P_2 P_1$ gehörige Teilraum von $\mathfrak{V}$, so ist offenbar

$$\dim(\mathfrak{N} \frown \mathfrak{T}_1) = v(0; \lambda_1, \ldots, \lambda_{m_1}).$$

Wir zeigen, daß $\mathfrak{N} \frown \mathfrak{T}_1 = \mathfrak{T}_1 \frown \mathfrak{T}_2^{\perp}$. Sei dazu $x \in \mathfrak{N} \frown \mathfrak{T}_1$ und $x \neq 0$. Dann ist $0 = (P_1 P_2 P_1 x, x) = (P_2 x, P_2 x)$, also $P_2 x = 0$, d. h. $x \in \mathfrak{T}_2^{\perp}$. Sei umgekehrt $x \in \mathfrak{T}_1 \frown \mathfrak{T}_2^{\perp}$. Dann ist $P_1 P_2 P_1 x = 0$, also $x \in \mathfrak{N}$. 1) ist damit bewiesen. 2) Sei $J(\mathfrak{T}_1, \mathfrak{T}_2) = (\lambda_1, \ldots, \lambda_{m_1}, 0, \ldots, 0)$ mit $v(0; \lambda_1, \ldots, \lambda_{m_1}) = \dim(\mathfrak{T}_1 \frown \mathfrak{T}_2^{\perp})$. Dann ist (vgl. Satz 3) $J(\mathfrak{T}_1, \mathfrak{T}_2^{\perp}) = (\mu_1, \ldots, \mu_{m_1}, 0, \ldots, 0)$ mit $v(0; \mu_1, \ldots, \mu_{m_1}) = \dim(\mathfrak{T}_1 \frown T_2^{\perp\perp}) = \dim(T_1 \frown T_2)$, wo $\mu_k = 1 - \lambda_{m_1 - k + 1}$ $(k = 1, \ldots, m_1)$ ist. 2) folgt dann aus

$$v(0; \mu_1, \ldots, \mu_{m_1}) = v(0; 1 - \lambda_{m_1}, \ldots, 1 - \lambda_1) = v(1; \lambda_1, \ldots, \lambda_{m_1}).$$

Im folgenden brauchen wir einen bekannten Hilfssatz, den wir der Vollständigkeit halber beweisen.

Hilfssatz: *Sind* $x_1, \ldots, x_l, y_1, \ldots y_l$ *Elemente eines* p-*dimensionalen linearen Vektorraums* $\mathfrak{W}$, *so ist für die Existenz eines*

Elements Φ der p-dimensionalen unitären Gruppe $\mathfrak{U}^{(p)}$ mit der Eigenschaft

$$\Phi x_j = y_j \quad (j = 1, \ldots, l)$$

notwendig und hinreichend, daß $(x_j, x_k) = (y_j, y_k)$ $(j, k = 1, \ldots l)$ *ist.*

Beweis: Die Notwendigkeit der Bedingung ist klar. Die Bedingung ist auch hinreichend: Sei x_{jk} bzw. y_{jk} ($j = 1, \ldots, l$; $k = 1, \ldots, m \leq p$) die k-te Komponente von x_j bzw. y_j in einem Koordinatensystem des von $x_1, \ldots, x_l, y_1, \ldots, y_l$ aufgespannten Raums $\mathfrak{T}$. Dann ist zunächst für die Existenz einer linearen Transformation T auf $\mathfrak{T}$ mit der Eigenschaft $Tx_j = y_j$ ($j = 1, \ldots, l$) notwendig und hinreichend, daß die für festes k ($= 1, \ldots, m$) gebildeten Gleichungssysteme

$$\sum_{r=1}^{m} x_{jr} t_{kr} = y_{jk} \qquad (j = 1, \ldots, l) \tag{2}$$

Lösungen haben. Da nun aus $\sum\limits_{j=1}^{l} \xi_j x_j = 0$ wegen

$$0 = \left(\sum_{j=1}^{l} \xi_j x_j, \sum_{j=1}^{l} \xi_j x_j\right) = \sum_{j,k=1}^{l} \xi_j \bar{\xi}_k (x_j, x_k) = \sum_{j,k=1}^{l} \xi_j \bar{\xi}_k (y_j, y_k)$$
$$= \left(\sum_{j=1}^{l} \xi_j y_j, \sum_{j=1}^{l} \xi_j y_j\right)$$

$\sum\limits_{=1} \xi_j y_j = 0$ folgt, so ist

$$\operatorname{Rg}\begin{pmatrix} x_{11} & \cdots & x_{1m} \\ \vdots & & \vdots \\ x_{l1} & \cdots & x_{lm} \end{pmatrix} = \operatorname{Rg}\begin{pmatrix} x_{11} & \cdots & x_{1m} & y_{1j} \\ \vdots & & & \vdots \\ x_{l1} & \cdots & x_{lm} & y_{lj} \end{pmatrix}$$
$$(j = 1, \ldots, l).$$

Die Gleichungen (2) sind daher für jedes feste $k = 1, \ldots, m$ auflösbar, d. h. es existiert eine lineare Transformation T, für welche $Tx_j = y_j$ ($j = 1, \ldots, l$) gilt. Da T auf $\mathfrak{T}$ wegen

$$(Tx_j, Tx_k) = (y_j, y_k) = (x_j, x_k) \qquad (j, k = 1, \ldots, l)$$

isometrisch ist, kann T bekanntlich zu einer unitären Transformation $\Phi \in \mathfrak{U}^{(p)}$ auf $\mathfrak{W}$ fortgesetzt werden. Der Hilfssatz ist damit bewiesen.

Satz 5: *Sind* $\mathfrak{T}_i$ *und* $\mathfrak{U}_i$ $(i = 1, 2)$ *Teilräume von* $\mathfrak{V}$ *und ist* $\dim \mathfrak{T}_i = \dim \mathfrak{U}_i$, *so existiert dann und nur dann ein Element* $\Phi \in \mathfrak{U}^{(n)}$ *mit der Eigenschaft* $\Phi \mathfrak{T}_i = \mathfrak{U}_i$, *wenn* $J(\mathfrak{T}_1, \mathfrak{T}_2) = J(\mathfrak{U}_1, \mathfrak{U}_2)$ *ist.*

Beweis: Den zu $\mathfrak{U}_i$ gehörigen Projektor bezeichnen wir mit Q_i. 1) Sei $J(\mathfrak{T}_1, \mathfrak{T}_2) = J(\mathfrak{U}_1, \mathfrak{U}_2)$ und $\dim \mathfrak{T}_i = \dim \mathfrak{U}_i$ $(i = 1, 2)$. Dann gibt es (mindestens) ein $\Psi \in \mathfrak{U}^{(n)}$, so daß $\Psi \mathfrak{T}_1 = \mathfrak{U}_1$ ist. Können wir nachweisen, daß ein $X \in \mathfrak{U}^{(n)}$ existiert, so daß $X\Psi\mathfrak{T}_1 = X\mathfrak{U}_1 = \mathfrak{U}_1$ und $X\Psi\mathfrak{T}_2 = \mathfrak{U}_2$ ist, so besitzt $\Phi := X\Psi$ die geforderten Eigenschaften. Wir dürfen daher o. B. d. A. annehmen, daß $\mathfrak{T}_1 = \mathfrak{U}_1$ ist. In $\mathfrak{T}_2$ gibt es eine orthogonal-normierte Basis $\varphi_1, \ldots, \varphi_{m_2}$, so daß

$$(P_2 P_1 P_2 \varphi_j, \varphi_k) = \lambda_j \delta_{jk} \quad (j, k = 1, \ldots, m_2)$$

ist, und in $\mathfrak{U}_2$ gibt es eine orthogonal-normierte Basis $\psi_1, \ldots, \psi_{m_2}$, so daß

$$(Q_2 P_1 Q_2 \psi_j, \psi_k) = \mu_j \delta_{jk} \quad (j, k = 1, \ldots, m_2)$$

ist (es ist $Q_1 = P_1$). Nach Voraussetzung ist $\lambda_j = \mu_j$ $(j = 1, \ldots, m_2)$. Wir betrachten die in $\mathfrak{T}_1$ gelegenen Vektoren $P_1 \varphi_j$ und $P_1 \psi_j$. Sie erfüllen wegen

$$(P_1 \varphi_j, P_1 \varphi_k) = (P_2 P_1 P_2 \varphi_j, \varphi_k) = \lambda_j \delta_{jk}$$

und

$$(P_1 \psi_j, P_1 \psi_k) = (Q_2 P_1 Q_2 \psi_j, \psi_k) = \lambda_j \delta_{jk}$$

$$(j, k = 1, \ldots, m_2).$$

die Voraussetzungen des Hilfssatzes (mit $\mathfrak{W} = \mathfrak{T}_1$). Es gibt also ein $\Phi_1' \in \mathfrak{U}^{(m_1)}$, so daß $\Phi_1' P_1 \varphi_j = P_1 \psi_j$ $(j = 1, \ldots, m_2)$. Daher können wir ein $\Phi_1 \in \mathfrak{U}^{(n)}$ mit $\Phi_1 P_1 \varphi_j = P_1 \psi_j$ $(j = 1, \ldots, m_2)$ finden, welches $\mathfrak{T}_1^{\perp}$ elementweise fest läßt.

Für die in $\mathfrak{T}_1^{\perp}$ gelegenen Vektoren $x_j := \varphi_j - P_1 \varphi_j$ und $y := \psi_j - P_1 \psi_j$ $(j = 1, \ldots, m_2)$ gilt

$$(x_j, x_k) = (\varphi_j, \varphi_k) - (P_1\varphi_j, \varphi_k) - (\varphi_j, P_1\varphi_k) + (P_1\varphi_j, P_1\varphi_k)$$
$$= \delta_{\ k} - \lambda_j \delta_{jk}$$

und

$$(y_j, y_k) = (\psi_j, \psi_k) - (P_1\psi_j, \psi_k) - (\psi_j, P_1\psi_k) + (P_1\psi_j, P_1\psi_k)$$
$$= \delta_{jk} - \lambda_j \delta_{jk} \qquad (j, k = 1, \ldots, m_2).$$

Sie erfüllen ebenfalls die Voraussetzungen des Hilfssatzes (mit $\mathfrak{W} = \mathfrak{T}_1^\perp$). Wie oben folgt die Existenz eines $\Phi_2 \in \mathfrak{U}^{(n)}$ mit $\Phi_2 x_j = y_j$ $(j = 1, \ldots, m_2)$, welches $\mathfrak{T}_1$ elementweise fest läßt. Dann hat $\Phi := \Phi_1 \Phi_2$ die Eigenschaft

$$\Phi\varphi_j = \Phi(P_1\varphi_j + x_j) = P_1\psi_j + y_j = \psi_j \quad (j = 1, \ldots, m_2),$$

womit der erste Teil des Satzes bewiesen ist.

2) Existiert umgekehrt ein $\Phi \in \mathfrak{U}^{(n)}$ mit $\Phi\mathfrak{T}_i = \mathfrak{U}_i$, so ist

$$Q_1 Q_2 = \Phi P_1 P_2 \Phi^{-1}$$

und der zweite Teil des Satzes folgt aus der Unitärinvarianz der Eigenwerte und ihrer Vielfachheiten.

Dieser Satz legt nahe, in der Menge der Paare $(\mathfrak{T}_1, \mathfrak{T}_2)$ von Teilräumen von $\mathfrak{V}$ die Klasseneinteilung

$$„(\mathfrak{T}_1, \mathfrak{T}_2) \approx (\mathfrak{U}_1, \mathfrak{U}_2)$$

dann und nur dann, wenn ein $\Phi \in \mathfrak{U}^{(n)}$ existiert, so daß

$$\Phi\mathfrak{T}_i = \mathfrak{U}_i \quad (i = 1, 2) \text{ ist“}$$

vorzunehmen. Dann wird vermöge (1) jeder der entstehenden Klassen ein Punkt einer Teilmenge $K(n, m_1, m_2)$ des n-dimensionalen Einheitswürfels zugeordnet. Wir werden nun $K(n, m_1, m_2)$, d. h. den Wertevorrat von $J(\mathfrak{T}_1, \mathfrak{T}_2)$, wenn die $\mathfrak{T}_i$ die Menge der m_i-dimensionalen Teilräume von $\mathfrak{V}$ durchlaufen, bestimmen. Mit den Bezeichnungen

$$m := \min(m_1, m_2),$$

$$E := \{(a_1, \ldots, a_n) \colon 1 \geqq a_1 \geqq \ldots \geqq a_n \geqq 0\},$$

$$K_0 := \{(a_1, \ldots, a_n) \colon a_{m+1} = \ldots = a_m = 0\}$$

und – falls $m_1 + m_2 > n$ ist –

$$K_1 := \{(a_1, \ldots, a_n): a_1 = \ldots = a_{m_1 + m_2 - n} = 1\}$$

gilt nämlich

Satz 6: *$K(n, m_1, m_2)$ ist eine von endlich vielen Ebenen begrenzte, abgeschlossene, konvexe Teilmenge des n-dimensionalen Einheitswürfels; und zwar ist im Fall*

$$m_1 + m_2 \leqq n: \quad K(n, m_1, m_2) = E \cap K_0$$

und im Fall

$$m_1 + m_2 > n: \quad K(n, m_1, m_2) = E \cap K_0 \cap K_1.$$

Beweis: Die Mengen E, K_0, K_1 sind offenbar abgeschlossen und von endlich vielen Ebenen begrenzt. Um zu zeigen, daß E konvex ist, beachte man, daß aus

$$1 \geqq a_i' \geqq a_{i+1}' \geqq 0 \quad \text{und} \quad 1 \geqq a_i'' \geqq a_{i+1}'' \geqq 0$$

für $0 \leqq \varrho \leqq 1$

$$1 = \varrho \cdot 1 + (1 - \varrho) \cdot 1 \geqq \varrho a_i' + (1 - \varrho) a_i'' \geqq \varrho a_{i+1}' + (1 - \varrho) a_{i+1}'' \geqq 0$$

folgt. K_0 und K_1 sind trivialer Weise konvex. Es sind daher auch $E \cap K_0$ und $E \cap K_0 \cap K_1$ abgeschlossen, konvex und von endlich vielen Ebenen begrenzt.

Wir dürfen annehmen, daß $m = \min(m_1, m_2) = m_1$ ist. Andernfalls vertausche man $\mathfrak{T}_1$ mit $\mathfrak{T}_2$, was nach Satz 2 $J(\mathfrak{T}_1, \mathfrak{T}_2)$ ungeändert läßt. Satz 1 besagt dann, daß $K(n, m_1, m_2) \subset E \cap K_0$ ist.

Fall 1). $m_1 + m_2 \leqq n$. In diesem Fall ist noch zu zeigen, daß $K(n, m_1, m_2) \supset E \cap K_0$ ist: Sei dazu $(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \in E \cap K_0$ und $\varphi_1, \ldots, \varphi_{m_2}, \psi_1, \ldots, \psi_{n-m_2}$ irgend eine orthogonal-normierte Basis von $\mathfrak{V}$. Dann bilden die Vektoren

$$x_j := \sqrt{\lambda_j}\, \varphi_j + \sqrt{1 - \lambda_j}\, \psi_j \qquad (j = 1, \ldots, m_1)$$

eine orthogonal-normierte Basis eines m_1-dimensionalen Teilraums $\mathfrak{T}_1$ und die Vektoren $\varphi_1, \ldots, \varphi_{m_2}$ eine orthogonal-normierte Basis eines m_2-dimensionalen Teilraums $\mathfrak{T}_2$ von $\mathfrak{V}$. Wegen

$$(P_1 P_2 x_j, x_k) = \left(\sqrt{\lambda_j}\, \varphi_j, x_k\right) = \lambda_j \ \delta_{jk} \quad (j, k = 1, \ldots, m_1)$$

ist $P_1 P_2 x_j = \lambda_j x_j$. Daher sind $\lambda_1, \ldots, \lambda_{m_1}$ die Eigenwerte von $P_1 P_2$ auf $\mathfrak{T}_1$, und nach dem Beweis von Satz 1 verschwinden die restlichen Eigenwerte von $P_1 P_2$. Also ist $(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) = J(\mathfrak{T}_1, \mathfrak{T}_2) \in K(n, m_1, m_2)$.

Fall 2). $m_1 + m_2 > n$. Es ist zu zeigen, daß $K(n, m_1, m_2) \subset K_1$ und $K(n, m_1, m_2) \supset E \frown K_0 \frown K_1$ ist. Wir führen 2) auf 1) zurück, indem wir an Stelle von $J(\mathfrak{T}_1, \mathfrak{T}_2)$ $J(\mathfrak{T}_1, \mathfrak{T}_2^{\perp}) = (\mu_1, \ldots, \mu_n)$ betrachten. Nach Satz 3 ist

$$
(3) \qquad \begin{aligned} \mu_j &= 1 - \lambda_{m_1 - j + 1} \qquad (j = 1, \ldots, m_1), \\ \mu_{m_1+1} &= \ldots = \mu_n = 0. \end{aligned}
$$

Da $\dim \mathfrak{T}_2 = n - m_2 < m_1 \leqq m_2$ ist, ergibt die auf Satz 2 folgende Bemerkung, daß μ_j sogar für $j \geqq n - m_2 + 1$ verschwindet. Daher ist

$$
\lambda_1 = \ldots = \lambda_{m_1 + m_2 - n} = 1.
$$

Die Behauptung $J(\mathfrak{T}_1, \mathfrak{T}_2) = (\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \in K_1$ ist damit bewiesen.

Ist $(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ ein beliebig vorgegebener Punkt aus $E \frown K_0 \frown K_1$, so definiere man $(\mu_1, \ldots, \mu_n)$ durch (3). Dann ist $(\mu_1, \ldots, \mu_n) \in K(n, m_1, n - m_2)$. Jetzt kann wegen $m_1 + (n - m_2) \leqq n$ wie in 1) ein $(n - m_2)$-dimensionaler Teilraum $\mathfrak{S}$ von $\mathfrak{V}$ gefunden werden, für den $J(\mathfrak{T}_1, \mathfrak{S}) = (\mu_1, \ldots, \mu_n)$ ist. Nach den Sätzen 2 und 3 gilt dann für $\mathfrak{T}_2 := \mathfrak{S}^{\perp}$

$$
J(\mathfrak{T}_1, \mathfrak{T}_2) = (\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \quad (\in K(n, m_1, m_2)).
$$

Satz 6 ist damit bewiesen.