BAYERISCHE AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN

MATHEMATISCH-NATURWISSENSCHAFTLICHE KLASSE

SITZUNGSBERICHTE

JAHRGANG

1955

MÜNCHEN 1956

VERLAG DER BAYERISCHEN AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN

In Kommission bei der C. H. Beck'schen Verlagsbuchhandlung München

Zur Konstruktion geschlossener Clifford-Kleinscher Räume negativer Krümmung

Von **Frank Löbell** in München

Mit 5 Abbildungen

Vorgelegt am 13. Mai 1955

Vor einigen Jahren hat Herr Tauno Salenius ein Verfahren des Aufbaues gewisser dreidimensionaler geschlossener singularitätenfreier Raumformen mit hyperbolischer Metrik durch Konstruktion von Fundamentalbereichen ihrer Gruppen von Decktransformationen mitgeteilt.[1] Er knüpfte dabei an eine von ihm zitierte Note des Verfassers aus dem Jahre 1931 an, in der zum erstenmal eine Möglichkeit gezeigt wurde, solche Räume zu konstruieren, deren Existenz bis dahin unbekannt, ja sogar in Zweifel gezogen war.[2] Herr Salenius benützt, wenn auch auf eine ganz andere Weise, das schon vom Verfasser verwendete konvexe Vierzehnflach des hyperbolischen Raumes, das von zwei regelmäßigen rechtwinkligen ebenen Sechsecken und zwölf zwischen diesen zu einem Kranz oder Gürtel aneinandergereihten rechtwinkligen axialsymmetrischen ebenen Fünfecken begrenzt wird, dessen Flächen mithin sämtlich rechte Winkel miteinander bilden, als Hilfspolyeder; es ist in der genannten Note des Verfassers abgebildet.[3] Die einfachsten der konstruierten Beispiele

[1] T. Salenius, Über dreidimensionale geschlossene Räume konstanter negativer Krümmung. 11. Skand. Mat. Kongr., Trondheim 1949, S. 107–112 (1952).

[2] F. Löbell, Beispiele geschlossener dreidimensionaler Clifford-Kleinscher Räume negativer Krümmung. Ber. d. Math.-phys. Kl. d. Sächs. Akademie d. Wiss. zu Leipzig, 83 (1931), S. 167–174. (Vorgelegt von Herrn Koebe.)

[3] Fig. 2 auf S. 169; diese Figur wurde von Herrn Salenius mit kleinen Änderungen in der Bezeichnung übernommen. Das Polyeder ist so leicht vorzustellen, daß auf seine erneute Wiedergabe hier verzichtet werden mag, zumal da in der Abbildung 1 des Textes zwei derartige Vierzehnflächner,

setzen sich sowohl bei Herrn Salenius wie auch früher beim Verfasser aus acht Exemplaren dieses Vielflaches zusammen.

Herr Salenius bemerkt nun, daß es möglicherweise noch einfachere Beispiele gebe. Dies gibt Anlaß, darauf hinzuweisen, daß Herr Constantin Weber schon im Jahr 1932 einen besonders einfachen geschlossenen Clifford-Kleinschen Raum negativer Krümmung, den „Hyperbolischen Dodekaederraum", gefunden hat.[4]

Ferner regte die Bemerkung von Herrn Salenius den Verfasser dazu an, nachzuprüfen, ob nicht nach der von ihm im Jahr 1931 angewandten Methode sich schon aus weniger als acht der beschriebenen Vierzehnflache Räume der gewünschten Art aufbauen lassen. Es zeigte sich, daß dies in der Tat möglich ist. Das soll im folgenden nachgewiesen werden; zu dem Zweck muß der seinerzeit eingeschlagene Konstruktionsgang bis zu einer gewissen Stelle wiederholt werden, was im nächsten Abschnitt in tunlichster Kürze geschehe.

1. Aus zwei Realisationen des oben beschriebenen, auf Grund elementargeometrischer Überlegungen im dreidimensionalen nichteuklidischen Raum konstruierten Vierzehnflachs werde zunächst ein Ringkörper dadurch hergestellt, daß jede Sechseckfläche des einen Vielflachs auf eine Sechseckfläche des anderen längentreu abgebildet und dann jedes Paar einander zugeordneter Punkte zu einem „Punkt" erklärt wird; wir sagen kurz: wir „vereinigen" oder „verschmelzen" die Vielflache unter Erhaltung der in ihren Räumen geltenden Maßbestimmung längs ihrer Sechsecke miteinander. Das so entstandene Ringpolyeder ist von zwölf untereinander kongruenten rechtwinkligen konvexen Sechsecken begrenzt, deren Flächen im Sinne der in dem Körper geltenden hyperbolischen Metrik eben sind, und die, nebenbei bemerkt, nicht regelmäßig sind. Die geschilderte Ver-

---

durch die punktiert wiedergegebenen Überreste der Sechseckseiten getrennt, zu sehen sind. (Die Tuschezeichnung der Klischeevorlagen für die fünf Abbildungen der vorliegenden Note verdanke ich meinem Sohn Dietrich.)

[4] Von dieser Weberschen Entdeckung erzählte W. Threlfall auf dem Internationalen Mathematikerkongreß in Zürich im Herbst 1932. Siehe C. Weber und H. Seifert, Die beiden Dodekaederräume. Math. Zeitschr. 37 (1933), S. 237 ff., bes. S. 242 f.

einigung der beiden Vierzehnflache kann ersichtlich auf verschiedenerlei Weisen erfolgen; sie sei so vorgenommen, daß man aus den zwölf Sechsecken der Oberfläche des Ringkörpers vier

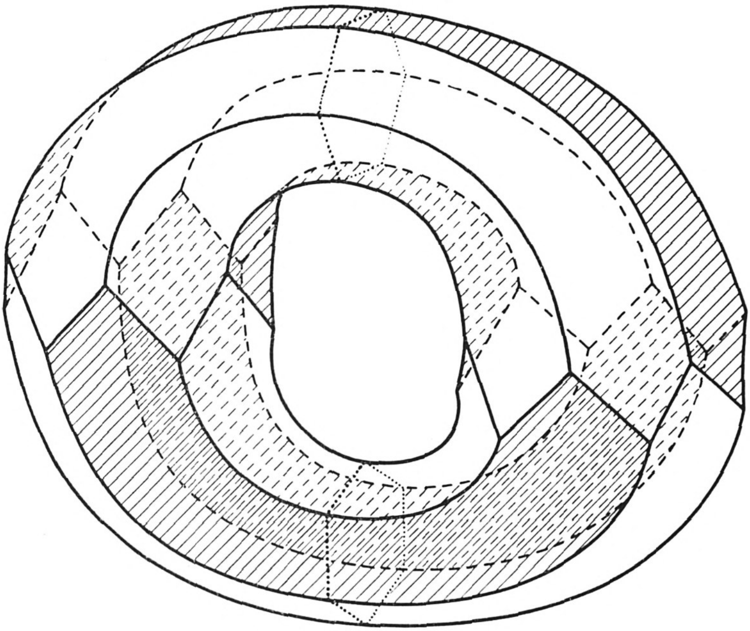

Abb. 1

auswählen kann, von denen keine zwei einen Randpunkt gemein haben. Ein derartiges Ringpolyeder stellt die Abbildung 1 dar, in der die für den Beschauer unsichtbaren Kanten gestrichelt gezeichnet sind; die vier schraffierten Flächen erfüllen die gestellte Bedingung.[5]

Zwei kongruente Ausführungen dieses Ringkörpers werden nun längs vier Paaren von, wie beschrieben, vollkommen getrennt liegenden, auf beiden Ringflächen gleich angeordneten Sechseckflächen miteinander vereinigt. Die Oberfläche des dadurch entstehenden Raumgebildes wurde in der anfangs er-

[5] Fig. 3 auf S. 170 der in Fußnote 2 genannten Note zeigt ein etwas anderes Bild dieses Körpers als die Abbildung oben im Text.

wähnten Note des Verfassers nur zur Hälfte zeichnerisch wiedergegeben;[6] es ist jedoch durchaus möglich, wenigstens die Zusammenhangsverhältnisse seiner begrenzenden Fläche als eines Ganzen in übersichtlicher Weise darzustellen, wie es die Abbildung 2 zeigt, in der die dünneren Linien Umrisse bedeuten,

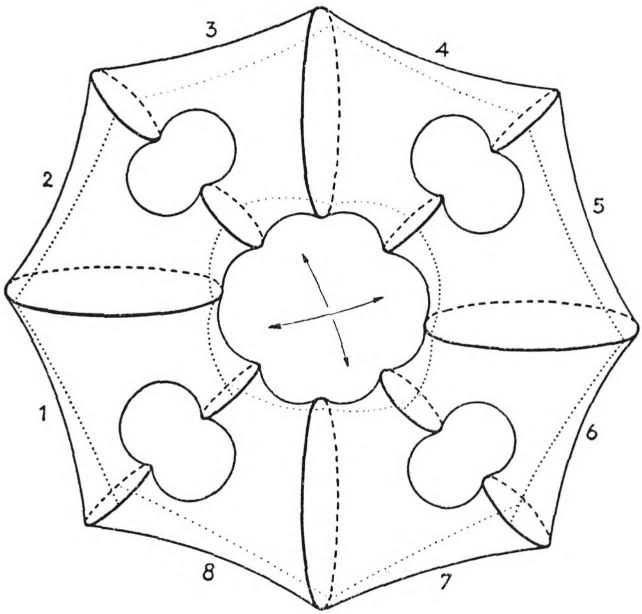

Abb. 2

während die Kanten kräftiger gezeichnet sind. Das Raumstück ist von acht untereinander kongruenten ebenen Flächen begrenzt, die je aus zwei kongruenten konvexen rechtwinkligen Sechsecken, den Grenzflächen der Ringpolyeder, durch Aneinanderheften längs dreier Paare gleich langer, nicht benachbarter Seitenkanten entstanden und somit von je drei geschlossenen geraden Linien berandet sind; es sind dieselben „Doppelsechsecke“ wie diejenigen, die beim Aufbau der Clifford-Kleinschen Flächen hyperbolischer Maßbestimmung als

[6] Fig. 4 auf S. 171 der in Fußnote 2 genannten Note.

Elemente dienen.[7] Die geschlossenen Randgeraden bilden die Kanten des von den Doppelsechseckflächen begrenzten Raumes, aus dessen Entstehung folgt, daß er keinerlei Ecken, sondern nur ausspringende Kanten besitzt, in denen seine ebenen begrenzenden Flächen unter rechten Winkeln aneinanderstoßen. Ferner ist zu erkennen, daß alle in Abbildung 2 größer erscheinenden Rückkehrkanten sämtlich gleiche nichteuklidische Längen haben, ebenso die dort kleiner wiedergegebenen alle einander nichteuklidisch gleich sind; es sei, obwohl das für die hier zu gewinnenden Einsichten nicht wichtig ist, ohne Beweis mitgeteilt, daß die Umfänge dieser beiden Serien geschlossener Geraden, falls die Größe des Krümmungsmaßes $K = -1$ angenommen wird, die Werte $2\,\mathfrak{ArCos}\,3$ und $2\,\mathfrak{ArCos}\sqrt{3}$ haben.[8] Um für die Überlegungen des nächsten Abschnittes ein sicheres Fundament zu schaffen, ist es aber wichtig, sich klarzumachen, wie bei der Entstehung der in Abbildung 2 dargestellten Fläche aus den kürzeren der an die schraffierten Sechseckflächen des Ringpolyeders der Abbildung 1 angrenzenden Kanten gemeinsame Lote der Randgeraden der Doppelsechsecke hervorgehen, deren Fußpunkte auf den vier längeren geschlossenen Kanten zusammenfallen, nicht aber auf den acht kürzeren, die sie vielmehr je in zwei gleiche Teile teilen; diese gemeinsamen Lote sind in Abbildung 2 punktiert gezeichnet, und zwar kräftiger, wo sie auf der dem Beschauer zugewandten Oberseite der Fläche sichtbar verlaufen, dünner, soweit sie auf der unteren Seite liegen.[9] Hierüber kann man sich im einzelnen Rechenschaft geben, wenn man sich die

---

[7] Diese Theorie wurde von Paul Koebe und dem Verfasser unabhängig voneinander entwickelt; siehe

P. Koebe, Riemannsche Mannigfaltigkeiten und nichteuklidische Raumformen, 2. und 3. Mitteilung. Sitz.-Ber. d. Preuß. Akad. d. Wiss., Phys.-math. Kl., 23 (1928), S. 345 ff. und S. 385 ff., und

F. Löbell, Die überall regulären unbegrenzten Flächen fester Krümmung (Dissertation 1926), Tübingen 1927.

[8] Derartige Längenberechnungen kann man fast mühelos mit Hilfe einer einzigen – sehr einfachen – trigonometrischen Formel durchführen, die für das „rechtwinklige Fünfseit" gilt; siehe Math. Zeitschr. 53 (1950), S. 240 (6).

[9] Damit jedes der Lote entweder ganz auf der sichtbaren oder ganz auf der unsichtbaren Flächenseite verlaufe, ist die Gleichheit der nichteuklidischen Längen der zwischen den Lotfußpunkten liegenden Teile der längeren Rückkehrkanten in Abb. 2 nicht zum Ausdruck gebracht.

aneinanderhängenden Doppelsechsecke von dem Ringkörper, auf dem sie zunächst liegen und den man sich zertrümmert denken mag, abgelöst und, ohne sie zu zerschneiden, nach Herunterklappen der beiden oberen Doppelsechseckpaare, und zwar des vorderen nach vorn, des hinteren nach hinten, und darauffolgender Geradestreckung auf einen Zylinder aufgelegt denkt, von dem sie schließlich leicht in die in Abbildung 2 gezeigte Lage zu verzerren sind. Es ist gut, sich zu vergegenwärtigen, daß es auf jedem Doppelsechseck genau drei doppelpunktfreie gemeinsame geradlinige Lote seiner Randgeraden gibt, nämlich für je zwei der Ränder eines.

Wir bemerken, daß wir bis jetzt vier Exemplare des Vierzehnflachs, von dem wir anfangs ausgingen, gebraucht haben.|

2. Es werden auch nicht mehr dieser Polyeder benötigt werden. Denn wir können – von hier an weicht der Weg der Konstruktion von dem früher begangenen ab – die Doppelsechseckflächen in der Weise Punkt für Punkt miteinander identifizieren, wie es die in der Abbildung eingezeichneten Doppelpfeile andeuten, so daß die Flächen 1 und 5 untereinander verschmelzen, ebenso die Flächen 3 und 7, und zwar, da sie ja eben sind, ohne daß dabei eine Singularität in dem sich bildenden Raumstück entsteht. Die Möglichkeit dieser Verschmelzung beruht auf der oben bewiesenen Kongruenz aller hier auftretenden Doppelsechsecke; es kommen dabei die zwischen den Doppelsechseckflächen 1 und 2 und die zwischen 5 und 6 liegende Rückkehrkante miteinander in bestimmter Weise zur Deckung, ebenso die zwischen 1 und 8 liegenden Rückkehrkanten mit den zwischen 4 und 5 liegenden, usw. Durch dieses Vorgehen entsteht nun, da alle rechten Kantenwinkel sich zu gestreckten Winkeln vereinen, die Kanten als solche somit verschwinden, ein Raumstück, das nur noch durch zwei, von Kanten, Ecken oder Singularitäten völlig freien Flächen begrenzt ist, die sich durch das Zusammentreffen je zweier Doppelsechsecke – nämlich einerseits 2 und 6, andererseits 4 und 8 – längs ihrer drei Paare gleich langer Ränder gebildet haben. Diese beiden Grenzflächen sind also geschlossene Clifford-Kleinsche Flächen von der topologischen Charakteristik 2; sie sind im Sinn der Metrik der räumlichen Mannigfaltigkeit eben und zudem, was für das Folgende wesentlich ist, kongruent, wie

sich aus ihrem Aufbau aus lauter kongruenten Doppelsechsecken und der bei beiden gleichen Art der Ränderverheftungen ergibt. Das Verständnis dieser Verhältnisse soll Abbildung 3 erleichtern:

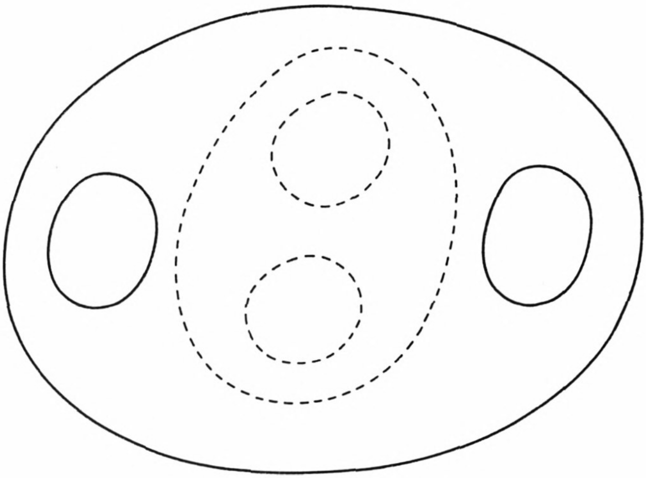

Abb. 3

Von den das zusammenhängende Raumstück hyperbolischer Metrik begrenzenden Clifford-Kleinschen Flächen vom Geschlecht 2 zeigt sie die eine innerhalb der andern als Wand einer nicht zum Raumstück gehörenden, mehrfach zusammenhängenden Höhle, die sie umschließt; deren Umrisse sind gestrichelt gezeichnet.

Diese beiden Flächen können wir nun wegen ihrer Kongruenz umkehrbar eindeutig längentreu aufeinander abbilden und durch Identifikation entsprechender Punktepaare miteinander vereinigen; wegen ihrer Ebenheit entsteht so eine dreidimensionale, überall reguläre, nirgends begrenzte, d. h. homogene geschlossene metrische Raumform konstanter negativer Krümmung.

Es sei hervorgehoben, daß man wegen der Symmetrieeigenschaften der begrenzenden Flächen die Verschmelzungen auf verschiedene Weisen vornehmen kann; je nachdem man es macht, kann man erwarten, orientierbare oder nichtorientierbare Räume zu erhalten. Aus der Art des Aufbaues der hier auftretenden Grenzflächen aus je zwei kongruenten Doppelsechsecken ergibt sich, daß jede von ihnen eine fixpunktfreie umkehrbar eindeutige kongruente Abbildung[10] auf sich gestattet; man kann daher die einzelne Grenzfläche sogar mit sich selbst verschmelzen, ohne daß eine Singularität auftritt.

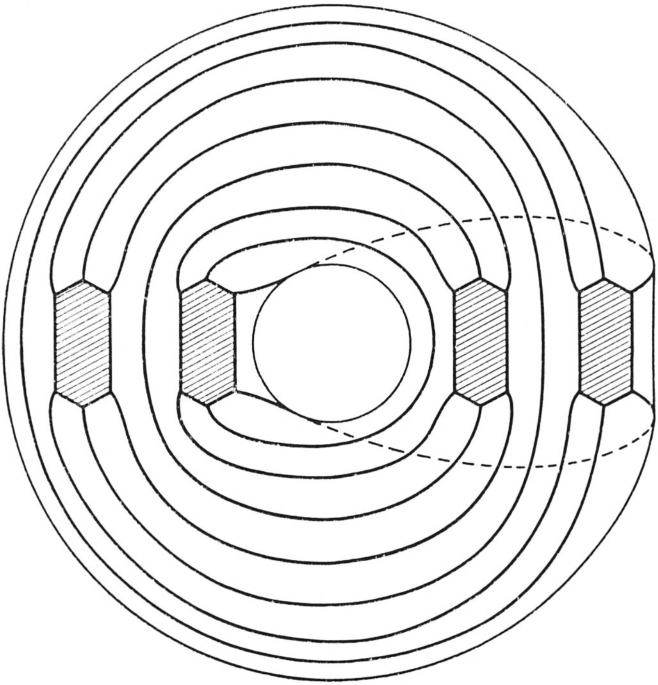

Abb. 4

Jede der Raumformen, deren Konstruktion hier beschrieben ist, enthält, wie anfangs angekündigt wurde, nur vier der Ausgangspolyeder.

3. Nun sei aber die Aufmerksamkeit noch besonders auf den Umstand gelenkt, daß die Abbildung 2 nur den Zusammenhang der Oberfläche des aus den beiden Ringpolyedern zusammengesetzten Körpers im Sinne der analysis situs vorführen sollte, während sie von der Struktur dieses Körpers selbst keine Vorstellung geben kann; ebensowenig ist Abbildung 3 dazu imstande.

[10] Vgl. d. V. Arbeit: Ein Satz über die eindeutigen Bewegungen Clifford-Kleinscher Flächen in sich. Crelles Journal 162 (1930), S. 114 ff.

Bis zu einer gewissen Stufe des Aufbaus der Raumform ist es jedoch möglich, eine Anschauung von ihr zu gewinnen, etwa auf folgendem Wege:

Zunächst denken wir uns das Ringpolyeder der Abbildung 1 auf eine horizontale Unterlage gelegt und dann stetig so deformiert, daß die vier schraffierten Sechseckflächen alle in eine Ebene oberhalb des Ringkörpers zu liegen kommen. Man betrachte Abbildung 4 als Grundriß dieses Körpers, auf dessen Oberfläche auch die aus den Sechseckseiten hervorgegangenen Linien aufgezeichnet sind. Von diesen sind möglichst viele auf die von oben sichtbare Seite des Ringes gebracht; nur bei zweien von ihnen läßt es sich nicht vermeiden, daß sie zum Teil auf der Unterseite verlaufen, wo sie gestrichelt gezeichnet sind. Es wurde davon abgesehen, die ausspringenden Flächenwinkel überall zum Ausdruck zu bringen. Man bemerkt, daß auch die teilweise auf der unteren Ringhälfte sich ausbreitenden Flächen einfach zusammenhängend und von Sechsecken umrandet sind.

Von diesem Raumstück gibt Abbildung 5 eine Schrägansicht. Stellt man sich nun den zu ihm bezüglich der Ebene der vier schraffierten Sechsecke symmetrisch liegenden Ringkörper vor

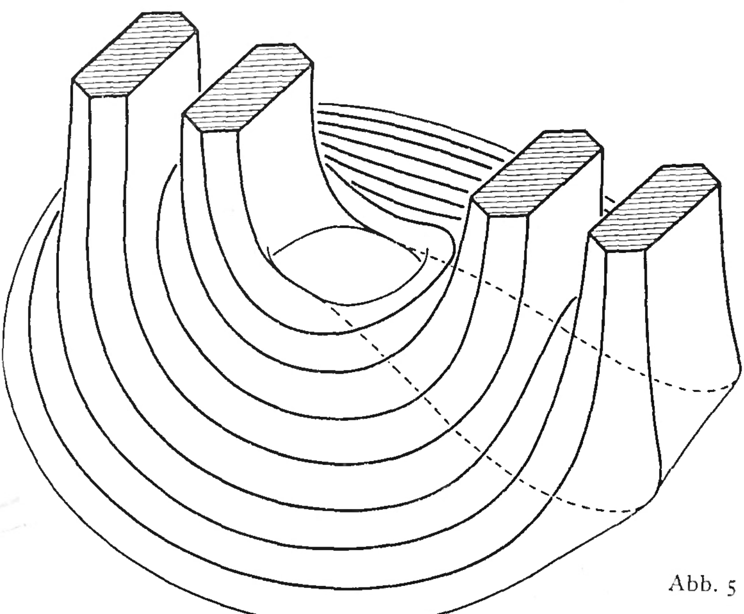

Abb. 5

und denkt sich beide Körper längs der in Deckung befindlichen vier Sechseckflächen miteinander vereinigt, so kann man sich ein anschauliches Bild von jenem Raumstück machen, dessen Oberfläche aus acht Doppelsechsecken zusammengesetzt ist, die im Sinne der inneren hyperbolischen Metrik eben sind, und das nur rechtwinklig ausspringende Kanten besitzt, die geschlossene Gerade ohne Ecken sind. Man wird bei einem genauen Vergleich die Tatsache bestätigt finden, daß die Doppelsechseckflächen so angeordnet sind, wie es Abbildung 2 zeigte. Auch wenn auf die bildliche Wiedergabe dieses Raumstückes hier verzichtet wird, obwohl sie nicht schwierig wäre, wird man doch die weiteren, in Abschnitt 2 beschriebenen Operationen, die zur Bildung geschlossener Clifford-Kleinscher Raumformen negativer Krümmung führten, in Gedanken ohne Mühe wiederholen können und ihre Rechtmäßigkeit bestätigt finden.

Die Feststellung, daß es Clifford-Kleinsche Raumformen negativer Krümmung gibt, die von nur vier unserer konvexen Vierzehnflache ausgefüllt werden, kann von Bedeutung sein bei der Suche nach einfachsten Bausteinen, die – analog den Doppelsechsecken als Elementen der geschlossenen Clifford-Kleinschen Flächen negativer Krümmung[11] – zum Aufbau sämtlicher geschlossener Clifford-Kleinscher Räume negativer Krümmung dienen können. Freilich weiß man noch nicht einmal, ob man, um dieses Ziel zu erreichen, mit räumlichen Elementen auskommen wird, die wie die oben benutzten von ebenen Flächen ohne Kanten und Ecken begrenzt sind, die also Clifford-Kleinsche Flächen mit hyperbolischer Metrik sein müßten.

Leicht zu erkennen ist, daß an derartige Grenzflächen Raumstücke angesetzt werden können, die als Analoga zu den „Außenteilen" der offenen Clifford-Kleinschen Flächen hyperbolischer Maßbestimmung anzusehen sind:[7, 11] Zerschneidet und verebnet man eine solche Grenzfläche zu einem einfach zusammenhängenden Fundamentalbereich der Gruppe ihrer Decktransformationen

---

[11] Eine sehr gedrängte Darstellung der Theorie des Aufbaues der Clifford-Kleinschen Flächen negativer Krümmung aus Elementen findet sich im Jahresber. d. D. Math.-Verein. 40 (1931), S. 69 ff.

und errichtet in seinen Randpunkten auf seiner Ebene nach einer Seite hin die Lote, so schließen diese mit dem ebenen Bereich einen Raumteil ein, aus dem durch Identifikation der bezüglich der genannten Gruppe äquivalenten lotrechten Halbgeraden ein Raumstück konstanter negativer Krümmung entsteht, das nur von einer einzigen Clifford-Kleinschen Fläche negativer Krümmung begrenzt ist; es ist unendlich ausgedehnt und offen. Hierauf wurde, wenn auch weniger ausführlich, schon am Schluß der anfangs erwähnten Note des Verfassers hingewiesen.

Eines sei schließlich noch vermerkt: es wurde in jener Note[2] auch von der Möglichkeit gesprochen, Sätze über den Verlauf der geodätischen Linien in den Clifford-Kleinschen Räumen mit hyperbolischer Metrik aufzustellen. Bemerkenswert ist nun, daß Aussagen über das Verhalten dieser Linien, der „Geraden", ursprünglich nur aus den Eigenschaften der Bewegungen und Umlegungen des hyperbolischen Raumes auf gruppentheoretischer Grundlage bewiesen wurden, noch ehe ein Beispiel einer geschlossenen Clifford-Kleinschen Raumform negativer Krümmung bekannt war.[12] Erst mit der Konstruktion solcher Beispiele wurde also der Schauplatz zugänglich gemacht, auf dem man so merkwürdige geometrische Vorkommnisse antreffen kann, wie sie damals aufgedeckt wurden.

---

[12] Vgl. d.V. Arbeit: Einige Eigenschaften der Geraden in gewissen Clifford-Kleinschen Räumen. Sitz.-Ber. d. Preuß. Akademie d. Wiss., Phys.-math. Kl. 30 (1930), S. 556 ff.