Sitzungsberichte

der

mathematisch-naturwissenschaftlichen Klasse

der

Bayerischen Akademie der Wissenschaften zu München

Jahrgang 1954

München 1955
Verlag der Bayerischen Akademie der Wissenschaften
In Kommission bei der C. H. Beck'schen Verlagsbuchhandlung

Zur Begründung der analytischen Geometrie

Von **Hanfried Lenz** in München

Vorgelegt von Herrn Frank Löbell am 5. Februar 1954

Mit 22 Figuren

Einleitung

Die Zweige der Geometrie, die nach Felix Kleins Erlanger Programm aus der projektiven analytischen Geometrie entspringen, lassen sich bekanntlich auf verschiedene Weise axiomatisch begründen. Will man wirklich die analytische Geometrie über einem beliebigen Koordinatenkörper erhalten, so kann man die klassischen Anordnungs-, Kongruenz- und Stetigkeitsaxiome nicht mehr verwenden. Man braucht es aber auch nicht, weil ja die Verknüpfungsaxiome des Raumes allein ausreichen, um in die projektive Geometrie homogene Koordinaten aus einem i. a. nicht kommutativen Körper einzuführen (Schwan, Veblen-Young, B. Segre, Artin)[1] oder m. a. W. die Punkte als eingliedrige Untermoduln eines Vektorraums (Pickert 1, Bourbaki) zu kennzeichnen. In Räumen höherer, insbes. unendlicher Dimensionszahl haben sich in neuerer Zeit verbandstheoretische Fassungen der Verknüpfungsaxiome eingebürgert (Menger, Baer 1). Um den Koordinatenkörper festzulegen, können dann Axiome der Anordnung und Stetigkeit im Sinne Hilberts (Hilbert, Baldus) oder topologische Postulate (Bieberbach, Köthe) eingeführt werden. Um zu den Geometrien des Erlanger Programms (Klein, Cartan) zu gelangen, kann man durch weitere Axiome geeignete Untergruppen der Gruppe aller Kollineationen des Raumes festlegen. Als solche Axiome eignen sich besonders Kongruenzaxiome, vor allem in der Form von Spiegelungspostulaten (Hjelmslev, Bach-

[1] Eingeklammerte Namen sollen stets auf das Literaturverzeichnis am Schluß der Arbeit hinweisen.

mann), die ja bei geeigneter Formulierung sogar zur alleinigen Begründung der metrischen Geometrie der Ebene hinreichen, ohne daß projektive Verknüpfungsaxiome eingeführt werden müßten.

Im ersten Kapitel der vorliegenden Arbeit soll die projektive Geometrie auf klassischen Verknüpfungsaxiomen (Veblen-Young, Pickert 2) aufgebaut werden, die nur die Grundbegriffe Punkt, Gerade und Inzidenz verwenden. Da in den üblichen Darstellungen die Endlichkeit der Dimensionszahl gefordert wird, erscheint es nicht überflüssig, die Begründung der projektiven analytischen Geometrie hier ohne diese Annahme durchzuführen. Um die Arbeit von der Kenntnis der vorliegenden Literatur so weit wie möglich unabhängig zu machen, werden verschiedentlich auch Beweise bekannter Sätze gegeben. Zusammen mit der projektiven Geometrie wird die affine auf Grund von Verknüpfungs- und Parallelenaxiomen aufgebaut.

Im zweiten Kapitel erfolgt eine Begründung der projektiven Geometrie aus einem Axiomensystem, das nur die Grundbegriffe Punkt, Hyperebene und Inzidenz verwendet.[1] Das führt zu einer besonders einfachen Definition und Behandlung der Polaritäten.

Im dritten Kapitel wird (nach dem Vorbild von Prüfer) auf Grund von Inzidenz- und Orthogonalitätsaxiomen eine absolute Polarität in die projektive Geometrie eingeführt. Der Aufbau auf Grund der Orthogonalität von Geraden beschränkt sich – wegen gewisser bisher nicht überwundener Schwierigkeiten – auf Geometrien mit nichtausgearteter absoluter Polarität und ohne isotrope (d. h. auf sich selbst senkrechte) Geraden. Man kommt also auf eine verallgemeinerte elliptische Geometrie. Dagegen führt der Aufbau auf Grund der Orthogonalität von Hyperebenen auf die allgemeinste (nichtausgeartete) Polarität (im Sinn von Baer 1), sowie auch auf den Fall einer absoluten Polarität in einer ausgezeichneten uneigentlichen Hyperebene, also auf sinngemäße Verallgemeinerungen der hyperbolischen bzw. der Euklidischen Geometrie.

---

[1] Die Anregung dazu, nach einem solchen Axiomensystem zu suchen, verdanke ich Herrn Professor R. Baer.

Im Gegensatz zu dem modernen Standpunkt des grundlegenden Baerschen Werkes „Linear Algebra and Projective Geometry" (Baer 1) wird auf die ältere koordinatengebundene Schreibweise nicht verzichtet. Dem Einwand, daß dadurch ein willkürliches Koordinatensystem ausgezeichnet wird, läßt sich nämlich durch Verwendung der kovarianten Schreibweise mit unteren und oberen Indizes für Punkt- und Hyperebenenkoordinaten nach dem Vorbild des Ricci-Kalküls begegnen. Dann behalten die Gleichungen der projektiven Geometrie bei linearen oder auch nur halblinearen Koordinatentransformationen ihre Form und andererseits stehen sie gleich so da, wie sie beim Einsetzen spezieller Werte für die Koordinaten benötigt werden. Natürlich soll damit der Wert der koordinatenfreien Schreibweise nicht bestritten werden.

Die Bedeutung der Worte „Projektivität" (= projektive Kollineation) und „Kollineation" ist gegenüber Baer vertauscht, was dem sonst üblichen Sprachgebrauch entsprechen dürfte.

I. Kapitel

Die Gerade als geometrischer Grundbegriff

§ 1. Projektive Axiome der Verknüpfung zwischen Punkten und Geraden

Definition 1: Der projektive *Raum* ist eine Menge von Dingen, den sog. *Punkten*, und von weiteren Dingen, den sog. *Geraden*, zwischen denen eine *Inzidenzbeziehung* bestehen kann oder nicht; diese Inzidenzbeziehung soll den folgenden Forderungen genügen (vgl. Veblen-Young; Pickert 2, S. 387).

Axiom G_p I: *Zu je zwei verschiedenen Punkten* A, B *gibt es genau eine Gerade, die mit ihnen inzidiert. Sie werde* mit $\overline{AB}$ bezeichnet.

Axiom G_p II: *Sind* A, B, C, D *vier verschiedene Punkte und gibt es einen Punkt, der mit den beiden Geraden* $\overline{AB}$ *und* $\overline{CD}$ *inzidiert, so gibt es auch einen Punkt, der mit den Geraden* $\overline{AC}$ *und* $\overline{BD}$ *inzidiert.*

Axiom G_p III: *Jede Gerade inzidiert mit mindestens drei verschiedenen Punkten.*

Wenn dieses Axiom nicht gilt, kommt man auf die sog. reduziblen Räume (B. Segre). Z. B. bilden zwei windschiefe Gerade des reellen, projektiven Raumes für sich einen reduziblen Raum.

Axiom G_p IV: *Es gibt zwei Gerade, die mit keinem Punkt gemeinsam inzidieren.*

Bemerkungen: **1.** Axiom G_p IV schließt die projektiven Ebenen aus, erzwingt also die Gültigkeit des Desarguesschen Satzes.

2. Man kann in den vorstehenden Axiomen den Begriff der Geraden ersetzen durch die *Menge* der mit ihr inzidierenden Punkte und die Inzidenz durch das mengentheoretische Enthaltensein. Wir wollen jedoch diese Deutung nicht voraussetzen, wohl aber die Inzidenz durch das mengentheoretische Symbol $\in$ *bezeichnen* und, wenn es im Interesse der sprachlichen Kürze zweckmäßig erscheint, eine Gerade nicht immer von der Menge der mit ihr inzidierenden Punkte unterscheiden.

Definition 2: Eine Punktmenge des Raumes heißt ein *Unterraum*, wenn sie mit je zwei Punkten deren Verbindungsgerade enthält.

Hilfssatz 1: Der Durchschnitt von Unterräumen ist ein Unterraum.

Definition 3: Sind $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \ldots, \mathfrak{K}$ beliebige Punktmengen, so werde der Durchschnitt aller ihre Vereinigungsmenge enthaltenden Unterräume mit $\overline{\mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \ldots \mathfrak{K}}$ bezeichnet und die *Hülle* der gegebenen Punktmengen genannt. Diese Bezeichnung ist offenbar im Einklang mit der Bezeichnung $\overline{AB}$ für die durch A und B bestimmte Gerade.

Hilfssatz 2: $\mathfrak{U}$ *sei ein Unterraum und* $P \notin \mathfrak{U}$ *ein Punkt. Dann besteht die Hülle* $\overline{P\mathfrak{U}}$ *von* P *und* $\mathfrak{U}$ *aus allen und nur den Punkten, die auf Geraden* $\overline{PU}$ *mit* $U \in \mathfrak{U}$ *liegen.*

Der einfache Beweis wurde kürzlich in diesen Sitzungsberichten gegeben (Lenz: Herleitung von Dimensionsformeln ..., im folgenden mit [D] zitiert). Es genügt, zu zeigen, daß die Menge der Punkte auf Geraden $\overline{PU}$ mit $U \in \mathfrak{U}$ ein Unterraum ist (vgl. Fig. 1).

Definition 4: Ein Punkt P heiße *von* der Punktmenge $\mathfrak{P}$ *über* der Punktmenge $\mathfrak{Q}$ *abhängig*, wenn $P \in \overline{\mathfrak{P}\mathfrak{Q}}$ ist. Falls $\mathfrak{Q}$ leer ist, heißt P einfach *von* $\mathfrak{P}$ abhängig. Eine Punktmenge $\mathfrak{M}$ heiße

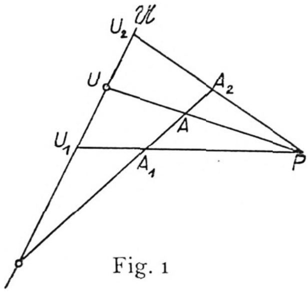

Fig. 1

in sich abhängig (über $\mathfrak{Q}$), wenn ein Punkt $P \in \mathfrak{M}$ existiert, der von der Komplementärmenge $\mathfrak{M} - P$ (über $\mathfrak{Q}$) abhängig ist, andernfalls *in sich unabhängig* (über $\mathfrak{Q}$).

Hilfssatz 3: Ist P von $\mathfrak{P}$ über $\mathfrak{Q}$ abhängig, so ist P von einer *endlichen* Teilmenge $\mathfrak{P}_0 \subseteqq \mathfrak{P}$ über einer *endlichen* Teilmenge $\mathfrak{Q}_0 \subseteqq \mathfrak{Q}$ abhängig.

Hilfssatz 4: Der hier eingeführte Begriff der Abhängigkeit eines Punktes P von einer Punktmenge $\mathfrak{P}$ über einer festgehaltenen Punktmenge $\mathfrak{Q}$ erfüllt die üblichen drei *Abhängigkeitspostulate* (v. d. Waerden 1, S. 111 und 210, Pickert 1, S. 65):

I. Ist $P \in \mathfrak{P}$, so ist P von $\mathfrak{P}$ abhängig.

II. Ist P von $Q \cup \mathfrak{P}$ abhängig, aber nicht von $\mathfrak{P}$, so ist Q von $P \cup \mathfrak{P}$ abhängig.

III. Ist P von $\mathfrak{P}$ abhängig und jeder Punkt aus $\mathfrak{P}$ von $\mathfrak{P}'$ abhängig, so ist P von $\mathfrak{P}'$ abhängig.

Die Beweise, die nur von den Axiomen G_p I und G_p II Gebrauch machen, wurden in [D] gegeben.

§ 2. Geradenaxiome der affinen Geometrie

Definition 5: Der *affine Raum* ist eine Menge von Dingen, den sog. *Punkten*, und weiteren Dingen, den sog. *Geraden*, zwischen denen eine *Inzidenzrelation* erklärt ist. Die Menge der Geraden zerfalle in paarweise elementefremde Teilmengen, die sog. *Parallelbündel.* Zwei Geraden heißen *parallel*, wenn sie demselben Parallelbündel angehören. Inzidenz und Parallelität sollen den folgenden Axiomen genügen:

Axiom G_a Ia: *Zu je zwei verschiedenen Punkten A, B gibt es genau eine Gerade, die mit beiden indiziert, die Gerade $\overline{AB}$.*

Axiom G_a Ib *(Euklidisches Parallelenaxiom): Zu jeder Geraden g und jedem Punkt P gibt es genau eine Gerade, die zu g parallel ist und mit P indiziert.*

Folgerung: Liegt P auf g (d. h. inzidiert P mit g), so ist g die Parallele zu g durch P, d. h. parallele und verschiedene Gerade inzidieren nicht mit einem gemeinsamen Punkt.

Axiom G_a IIa *(Trapezaxiom): Sind die verschiedenen Geraden $\overline{AB}$ und $\overline{CD}$ parallel und indiziert der von A und C verschiedene Punkt P mit der Geraden $\overline{AC}$, so gibt es einen Punkt, der mit den beiden Geraden $\overline{PB}$ und $\overline{CD}$ indiziert.*

Axiom G_a IIb *(Parallelogrammaxiom): Wenn keine Gerade mit mehr als 2 Punkten indiziert, so hat für je drei verschiedene Punkte A, B, C die Parallele zu $\overline{AB}$ durch C mit der Parallelen zu $\overline{AC}$ durch B einen Punkt gemeinsam.*

Bemerkung: Von den Voraussetzungen der Axiome G_a IIa und G_a IIb ist stets mindestens eine unerfüllbar, d. h. alle folgenden Schlüsse verwenden entweder nur das eine oder nur das andere Axiom.

Axiom G_a III: *Jede Gerade indiziert mit mindestens zwei Punkten.*

Axiom G_a IV *(räumliches Axiom): Es gibt zwei Gerade, die mit keinem Punkt gemeinsam indizieren und nicht parallel sind.*

Bemerkungen: Über die Auffassung der Geraden als Punktmengen gilt dasselbe wie in § 1. Daß die Axiomensysteme der Paragraphen 1 und 2 widerspruchsfrei sind, erkennt man an den Beispielen der gewöhnlichen projektiven und affinen Geometrie oder (dazu braucht man nicht zu wissen, ob die Arithmetik widerspruchsfrei ist) der bekannten projektiven Räume mit endlich vielen Punkten.

Hilfssatz 5: Alle Geraden enthalten gleichviele Punkte.

Beweis: (s. Fig. 2): Wenn keine Gerade mehr als zwei Punkte enthält, sind wir fertig. Andernfalls sei g eine Gerade, die mit den 3 verschiedenen Punkten A, B, C inzidiert. $D \notin g$ sei ein beliebiger Punkt. Dann hat $\overline{AD}$ nach dem Trapezaxiom einen Schnitt-

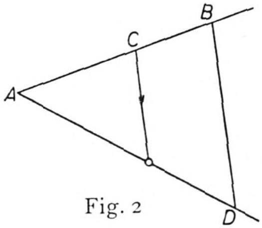

Fig. 2

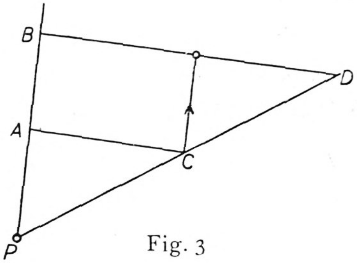

Fig. 3

punkt mit der Parallelen zu $\overline{BD}$ durch C. Weil man C auf $\overline{AB}$ beliebig wählen kann, hat $\overline{AD}$ mindestens (wegen der Umkehrbarkeit des Schlusses also genau) so viele Punkte wie $\overline{AB}$. Nochmalige Anwendung dieses Ergebnisses auf eine beliebige Gerade durch D vollendet den Beweis.

Hilfssatz 6 (Parallelogrammsatz): *Sind A, B, C drei verschiedene Punkte, so hat die Parallele durch C zu $\overline{AB}$ mit der Parallelen durch B zu $\overline{AC}$ mindestens einen Punkt gemein.*

Beweis (s. Fig. 3): Wenn jede Gerade nur zwei Punkte enthält, ist die Behauptung durch Axiom G_a IIb gefordert. Andernfalls enthält $\overline{AB}$ nach Hilfssatz 5 einen dritten Punkt P. Nach dem Trapezaxiom schneidet die Gerade $\overline{PC}$ die Parallele zu $\overline{AC}$ durch B in einem Punkt D und ebenso schneidet $\overline{DB}$ (im Fall $D = B$ läge C auf $\overline{AB}$ und die Behauptung wäre trivial) die Parallele zu $\overline{PB}$ durch C, w. z. b. w.

Definition 6: Eine Punktmenge des affinen Raumes heißt ein *Unterraum*, wenn sie erstens mit je zwei Punkten alle Punkte ihrer Verbindungsgeraden und zweitens mit je drei Punkten A, B, C alle Punkte der Parallelen zu $\overline{AB}$ durch C enthält.

Bemerkung: Falls eine – und damit jede – Gerade mindestens drei Punkte enthält, ist die zweite Forderung nach dem Trapezaxiom eine Folge der ersten. Andernfalls ist die zweite Forderung allein wesentlich und die erste trivial. Wie in § 1 gilt

Hilfssatz 7: Der Durchschnitt beliebig vieler Unterräume ist ein Unterraum.

Damit kann die *Hülle* einer Punktmenge genau wie im projektiven Fall (Definition 3) erklärt werden und ebenso der Begriff der *Abhängigkeit.*

Hilfssatz 8: Wenn die Geraden $\overline{AB}$ und $\overline{CD}$ einen Punkt gemein haben oder parallel sind, so haben die Geraden $\overline{AC}$ und $\overline{BD}$ einen Punkt gemein oder sie sind parallel.

Bemerkung: Wenn im Folgenden Punkte oder Gerade mit verschiedenen Buchstaben bezeichnet werden, sei, wenn nichts anderes gesagt wird, stillschweigend vorausgesetzt, daß sie verschieden sind.

Beweis des Hilfssatzes 8: Die Fälle, in denen 3 der 4 Punkte A, B, C, D auf einer Geraden liegen, erledigen sich trivial. Andernfalls sei

Fall 1 (s. Fig. 4): $\overline{AB} \parallel \overline{CD}$. Nach Hilfssatz 6 hat $\overline{CD}$ mit der Parallelen zu $\overline{AC}$ durch B einen Punkt E gemein. Im Fall

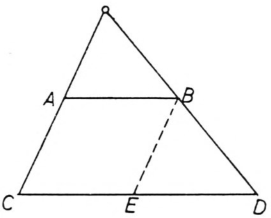

Fig. 4

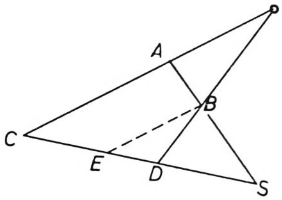

Fig. 5

$E = D$ sind wir fertig, andernfalls haben $\overline{AC}$ und $\overline{BD}$ nach dem Trapezaxiom einen Punkt gemein, w. z. b. w.

Fall 2 (s. Fig. 5): $\overline{AB} \cap \overline{CD} = S$. Die Parallele zu $\overline{AC}$ durch B hat mit $\overline{SC} = \overline{CD}$ nach dem Trapezaxiom einen Punkt E gemein. Im Fall $E = D$ ist $\overline{AC} \parallel \overline{BD}$; andernfalls hat die Parallele zu $\overline{BE}$ durch C (d. h. die Gerade $\overline{AC}$) mit $\overline{DB}$ einen Punkt gemein, w. z. b. w.

Hilfssatz 9: Ist $\mathfrak{U}$ ein nicht leerer Unterraum und $P \notin \mathfrak{U}$ ein Punkt, so besteht die Hülle $\overline{\mathfrak{U}P}$ aus allen und nur den Punkten auf den Parallelen zu OP durch Punkte von $\mathfrak{U}$, wobei O ein beliebiger, aber ein für allemal festgehaltener Punkt aus $\mathfrak{U}$ ist.

Beweis: Es genügt, zu zeigen, daß die Menge $\mathfrak{M}$ der Punkte auf Parallelen zu $\overline{OP}$ durch Punkte von $\mathfrak{U}$ ein Unterraum ist. $U_1, U_2, \ldots$ seien Punkte aus $\mathfrak{U}$.

Fall 1 (s. Fig. 6): Jede Gerade enthält mindestens drei Punkte. Nach Hilfssatz 8 haben die Geraden $\overline{A_1 A_2}$ und $\overline{U_1 U_2}$ – wenn $\overline{A_1 U_1} \parallel \overline{A_2 U_2} \parallel \overline{OP}$ und $A \in \overline{A_1 A_2}$ vorausgesetzt wird – einen Punkt S gemein oder sie sind parallel; daher schneidet die Parallele zu $\overline{U_1 A_1}$ durch A die Gerade $\overline{U_1 U_2}$ (nach Hilfssatz 6 oder Axiom G_a II a), w. z. b. w.

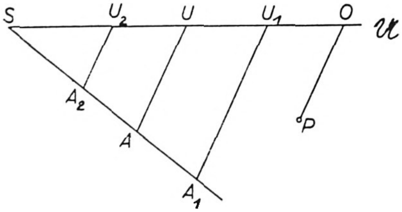

Fig. 6

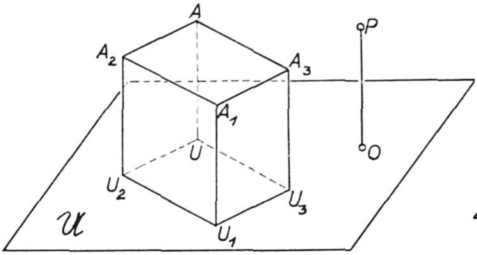

Fig. 7

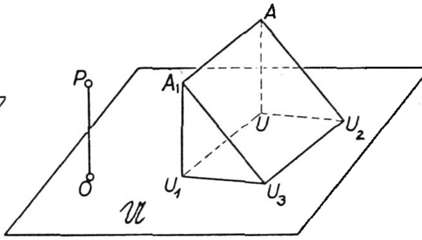

Fig. 8

Fall 2 (s. Fig. 7 und 8): Jede Gerade enthält nur zwei Punkte. Dann sind in jedem Viereck mit zwei parallelen Seiten auch die anderen beiden Seiten sowie die beiden Diagonalen parallel. Es sei etwa $\overline{U_1 A_1} \parallel \overline{U_2 A_2} \parallel \overline{U_3 A_3} \parallel \overline{OP}$ und $\overline{A_3 A} \parallel \overline{A_1 A_2}$. Dann ist $\overline{A_3 A} \parallel \overline{U_1 U_2}$. Es gibt einen Punkt $U \in \mathfrak{U}$ mit $\overline{U_3 U} \parallel \overline{U_1 U_2}$. Aus $\overline{U_3 U} \parallel \overline{A_3 A}$ folgt $\overline{U_3 A_3} \parallel \overline{UA} \parallel \overline{OP}$, also $A \in \mathfrak{M}$, w. z. b. w. Der andere noch mögliche Fall ist (Fig. 8) $\overline{U_1 A_1} \parallel \overline{OP}$ und $\overline{U_2 A} \parallel \overline{U_3 A_1}$ oder, was dasselbe bedeutet, $\overline{A_1 A} \parallel \overline{U_3 U_2}$. Dann gibt es einen Punkt $U \in \mathfrak{U}$ mit $\overline{UU_1} \parallel \overline{U_2 U_3} \parallel \overline{AA_1}$. Folglich ist $\overline{UA} \parallel \parallel \overline{U_1 A_1} \parallel \overline{OP}$, $A \in \mathfrak{M}$, w. z. b. w. Aus dem damit bewiesenen

Hilfssatz 9 folgt, daß auch in unserer affinen Geometrie das zweite Abhängigkeitspostulat (s. § 1, Hilfssatz 4) gilt, während die beiden anderen unmittelbar aus der Definition folgen. Auch Hilfssatz 3 gilt unverändert.

§ 3. Basissatz und Dimensionsformeln

Zu den folgenden Definitionen und Sätzen vgl. [D], ferner Schiek.

Definition 7: Eine Punktmenge $\mathfrak{P}$ des (projektiven oder affinen) Raumes heißt eine *Basis* des Unterraumes $\mathfrak{U}$, wenn I. $\mathfrak{P}$ in sich unabhängig ist und wenn II. $\overline{\mathfrak{P}} = \mathfrak{U}$ ist.

Definition 7a: Eine Punktmenge $\mathfrak{P}$ heiße eine *Basis* des Unterraumes $\mathfrak{U}$ *über der Punktmenge* $\mathfrak{Q}$, wenn I. $\mathfrak{P}$ in sich unabhängig über $\mathfrak{Q}$ ist und II. $\overline{\mathfrak{P}\mathfrak{Q}} = \mathfrak{U}$ ist.

Satz 1 (Basissatz): Jeder projektive oder affine Raum im Sinne des § 1 oder § 2 hat eine Basis. Allgemeiner: Sind $\mathfrak{P}$, $\mathfrak{A} \subseteqq \mathfrak{P}$, $\mathfrak{Q}$ *beliebige Punktmengen, so enthält* $\mathfrak{P}$ *eine Basis* $\mathfrak{P}_0$ *von* $\overline{\mathfrak{P}\mathfrak{Q}}$ *über* $\mathfrak{Q}$, *die ihrerseits eine Basis* $\mathfrak{A}_0 \subseteqq \mathfrak{A}$ *von* $\overline{\mathfrak{A}\mathfrak{Q}}$ *über* $\mathfrak{Q}$ *enthält. Alle derartigen Basen sind gleichmächtig.*

Definition 8 (vgl. auch Menger S. 465): Die um eins verminderte Mächtigkeit einer (also jeder) Basis eines Unterraums heißt seine *Dimension.*

Die Dimensionen der leeren Menge, eines Punktes, einer Geraden sind also —1, 0, 1. Unterräume der Dimension 2 heißen *Ebenen.*

Definition 9: Ist $\mathfrak{U}$ ein Unterraum, über dem der ganze Raum die Dimension $\mathfrak{D}$ hat, so heißt $\mathfrak{D}$ die *Codimension* (vgl. Bourbaki S. 34 ff.) von $\mathfrak{U}$. Unterräume der Codimension 0 nennen wir *Hyperebenen*, Unterräume der Codimension 1 *Hypergeraden.*

Der Basissatz sichert die *Existenz* von Hyperebenen. In der *projektiven* Geometrie gilt

Satz 2 (vgl. [D]): $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{Q}$ *seien Unterräume mit* $\mathfrak{Q} \subseteqq \mathfrak{A} \cap \mathfrak{B}$; $\mathfrak{n}$ *sei die Dimension des ganzen Raumes. Dann gelten die Formeln*

(1) $\quad \dim \mathfrak{A} + \operatorname{codim} \mathfrak{A} + 1 = \mathfrak{n},$

(2) $\quad {}^{\mathfrak{Q}}\dim \mathfrak{A} + {}^{\mathfrak{Q}}\dim \mathfrak{B} = {}^{\mathfrak{Q}}\dim \mathfrak{A} \cap \mathfrak{B} + {}^{\mathfrak{Q}}\dim \overline{\mathfrak{A}\mathfrak{B}},$

(3) $\quad {}^{\mathfrak{A}}\dim \overline{\mathfrak{A}\mathfrak{B}} = {}^{\mathfrak{A}\cap\mathfrak{B}}\dim \mathfrak{B}$

(4) $\quad \operatorname{codim} \mathfrak{A} + \operatorname{codim} \mathfrak{B} = \operatorname{codim} \mathfrak{A} \cap \mathfrak{B} + \operatorname{codim} \overline{\mathfrak{A}\mathfrak{B}}$

(5) $\quad {}^{\mathfrak{Q}}\dim \mathfrak{A} + \operatorname{codim} \overline{\mathfrak{A}\mathfrak{B}} = \operatorname{codim} \mathfrak{B} + {}^{\mathfrak{Q}}\dim \mathfrak{A} \cap \mathfrak{B}.$

Zum Beweis (s. [D]) diente

Hilfssatz 10 (vgl. Baer 1, S. 17 unten): *Sind* $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$ *Unterräume des projektiven Raumes und sind* $\mathfrak{A}_0$, $\mathfrak{B}_0$ *Basen von* $\mathfrak{A}$ *und* $\mathfrak{B}$ *über ihrem Durchschnitt* $\mathfrak{D}$, *so ist die Vereinigungsmenge* $\mathfrak{A}_0 \cup \mathfrak{B}_0$ *eine Basis von* $\overline{\mathfrak{A}\mathfrak{B}}$ *über* $\mathfrak{D}$.

Mit Hilfe der bisherigen Ergebnisse kann man leicht zeigen, daß die *Verbandsaxiome der projektiven Geometrie* aus den Axiomen des § 1 folgen. Um z. B. die Gültigkeit der Baerschen Verbandsaxiome (Baer 1, S. 258 ff.) zu verifizieren, müssen wir im wesentlichen nur noch das sog. Dedekindsche Postulat für *modulare* Verbände (Baer 1, S. 9 und S. 259) beweisen.

Satz 3: Sind $\mathfrak{R}$, $\mathfrak{S}$, $\mathfrak{T}$ *Unterräume mit* $\mathfrak{R} \subseteqq \mathfrak{S}$, *so ist*

$$\mathfrak{S} \cap \overline{\mathfrak{R}\mathfrak{T}} = \overline{\mathfrak{R}(\mathfrak{S} \cap \mathfrak{T})}$$

Wir beweisen zunächst den auch für sich interessanten

Hilfssatz 11: Sind $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$ *verschiedene, nicht leere Unterräume und ist* P *ein Punkt aus* $\overline{\mathfrak{A}\mathfrak{B}}$, *so gibt es Punkte* $A \in \mathfrak{A}$, $B \in \mathfrak{B}$ *mit* $P \in \overline{AB}$.

Beweis: Es sei P weder in $\mathfrak{A}$ noch in $\mathfrak{B}$ gelegen (andernfalls ist die Behauptung trivial). Nach Hilfssatz 3 gibt es Unterräume $\mathfrak{A}_1 \subseteqq \mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}_1 \subseteqq \mathfrak{B}$ von *endlichen* Dimensionen, so daß $P \in \overline{\mathfrak{A}_1\mathfrak{B}_1}$ ist. Nach (2) wird $\dim \overline{\mathfrak{A}_1 P} \cap \mathfrak{B}_1 + \dim \overline{\mathfrak{A}_1\mathfrak{B}_1} = \dim \overline{\mathfrak{A}_1 P} + {}$ ${} + \dim \mathfrak{B}_1 > \dim \mathfrak{A}_1 + \dim \mathfrak{B}_1 = \dim \mathfrak{A}_1 \cap \mathfrak{B}_1 + \dim \overline{\mathfrak{A}_1\mathfrak{B}_1}$, also $\dim \overline{\mathfrak{A}_1 P} \cap \mathfrak{B}_1 > \dim \mathfrak{A}_1 \cap \mathfrak{B}_1$, d. h. es gibt einen Punkt B, der in $\overline{\mathfrak{A}_1 P} \cap \mathfrak{B}_1$, aber nicht in $\mathfrak{A}_1 \cap \mathfrak{B}_1$ liegt. Nach Hilfssatz 2 schneidet $\mathfrak{A}_1$ die Gerade $\overline{BP}$ in einem Punkt A, w. z. b. w.

Beweis des Satzes 3: I. Die Unterräume $\mathfrak{R}$ und $\mathfrak{S} \cap \mathfrak{T}$ liegen in dem *Unterraum* $\mathfrak{S} \cap \overline{\mathfrak{R}\mathfrak{T}}$, also ist $\overline{\mathfrak{R}(\mathfrak{S} \cap \mathfrak{T})} \subseteqq \mathfrak{S} \cap \overline{\mathfrak{R}\mathfrak{T}}$.

II. Zu zeigen ist noch $\mathfrak{S} \cap \overline{\mathfrak{R}\mathfrak{T}} \subseteqq \overline{\mathfrak{R}(\mathfrak{S} \cap \mathfrak{T})}$. Falls $\mathfrak{R}$ oder $\mathfrak{T}$ leer ist, ist die Behauptung trivial, ebenso im Fall $\mathfrak{R} = \mathfrak{T}$. Andernfalls sei S ein Punkt aus $\mathfrak{S} \cap \overline{\mathfrak{R}\mathfrak{T}}$. Nach Hilfssatz 11 gibt es

Punkte $R \in \mathfrak{R}$ und $T \in \mathfrak{T}$ mit $S \in \overline{RT}$. Im Fall $S \in \mathfrak{R}$ ist $S \in \overline{\mathfrak{R}(\mathfrak{S} \cap \mathfrak{T})}$, was bewiesen werden sollte. Im Fall $S \notin \mathfrak{R}$ ist auch $T \notin \mathfrak{R}$, $T \in \mathfrak{S}$, also $T \in \overline{\mathfrak{R}(\mathfrak{S} \cap \mathfrak{T})}$ und damit wegen $R \in \overline{\mathfrak{R}(\mathfrak{S} \cap \mathfrak{T})}$ auch $S \in \overline{\mathfrak{R}(\mathfrak{S} \cap \mathfrak{T})}$, w. z. b. w.

Die Unterräume eines projektiven Raumes, der den Axiomen G_p I und G_p II genügt, bilden also einen modularen Verband.

§ 4. Die Schiebungen und Dehnungen des affinen Raumes

Hilfssatz 12: Nimmt man aus einem projektiven Raum eine feste Hyperebene u heraus und setzt fest, daß zwei Geraden des Restraumes genau dann parallel heißen sollen, wenn sie einen Punkt von u gemein haben, so bilden die Punkte und Geraden des Restraumes einen affinen Raum im Sinne des § 2.

Der Beweis läuft auf eine einfache Verifikation der Axiome G_a I bis G_a IV hinaus und ist so einfach, daß er hier nicht ausgeführt zu werden braucht.

Die Umkehrung des Hilfssatzes 12 ergibt sich später analytisch. In der *projektiven* Geometrie kann jetzt leicht der Desarguessche Satz bewiesen werden, und zwar unter wesentlicher Verwendung der Axiome G_p III und G_p IV. Daß Axiom G_p III unentbehrlich ist, erkennt man an dem Gegenbeispiel einer nicht-Desarguesschen Ebene $\mathfrak{E}$ (Hilbert, § 23; Segre, S. 110), die durch einen Punkt P zu einem Raum ergänzt wird, so daß eine $\mathfrak{E}$ schneidende Gerade durch P nur aus zwei Punkten besteht. Offenbar genügt der so konstruierte Raum den Axiomen G_p I, G_p II, G_p IV; aber der Desarguessche Satz gilt nicht.

Wir benötigen im folgenden den *affinen* Desarguesschen Satz, auf dessen Beweis wir nicht verzichten können, weil die Umkehrung des Hilfssatzes 12 noch nicht zur Verfügung steht.

Satz 4: Sind die verschiedenen Geraden $\overline{A_1A_2}$, $\overline{B_1B_2}$, $\overline{C_1C_2}$ parallel oder haben sie einen Punkt S gemein und ist $\overline{A_1B_1} \parallel \overline{A_2B_2}$, $\overline{A_1C_1} \parallel \overline{A_2C_2}$, so ist auch $\overline{B_1C_1} \parallel \overline{B_2C_2}$. Sind umgekehrt entsprechende Seiten zweier Dreiecke parallel und verschieden, so sind die Verbindungsgeraden entsprechender Ecken entweder parallel oder sie haben einen Punkt gemein (diese Ausdrucksweise wurde der Kürze halber gewählt).

Wir beweisen zunächst

Hilfssatz 13: Nicht parallele Gerade einer affinen Ebene schneiden sich.

Beweis (s. Fig. 9): Es sei $C \notin \overline{AB}$ und $D \in \overline{ABC}$. Nach Hilfssatz 9 liegt D auf einer Parallelen zu $\overline{AC}$ durch einen Punkt

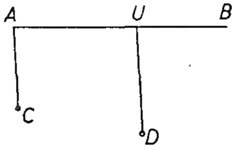

Fig. 9

$U \in \overline{AB}$, woraus nach Hilfssatz 8 folgt, daß die Geraden $\overline{AB}$ und $\overline{CD}$ einen Punkt gemein haben oder parallel sind.

Hilfssatz 14: Sind a und b, sowie a' und b' sich schneidende Gerade und ist $a \parallel a'$, $b \parallel b'$, so haben die Ebenen $\overline{ab}$ und $\overline{a'b'}$ entweder keinen Punkt gemein oder sie sind identisch.

Beweis: Ist $P \in \overline{ab} \cap \overline{a'b'}$ so enthalten *beide* Ebenen die (verschiedenen) Parallelen durch P zu a und zu b, sind also identisch.

Nun seien $A_1B_1C_1$ und ABC zwei Dreiecke in *verschiedenen* Ebenen und die Verbindungsgeraden $\overline{AA_1}$, $\overline{BB_1}$, $\overline{CC_1}$ seien ent-

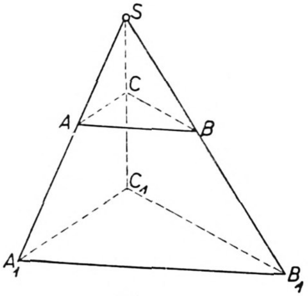

Fig. 10

weder parallel oder haben alle drei einen Punkt S gemein, ferner sei $\overline{AB} \parallel \overline{A_1B_1}$ und $\overline{AC} \parallel \overline{A_1C_1}$. Dann liegen die Geraden $\overline{B_1C_1}$ und $\overline{BC}$ in einer Ebene. Nach Hilfssatz 14 schneiden sie sich nicht, sind also parallel (vgl. Fig. 10).

Sind umgekehrt entsprechende Seiten beider Dreiecke parallel, so sind $\overline{AA_1}$ und $\overline{BB_1}$, $\overline{AA_1}$ und $\overline{CC_1}$, $\overline{BB_1}$ und $\overline{CC_1}$ sich schneidende oder parallele Geradenpaare. Falls eines dieser Geradenpaare einen Schnittpunkt hat, so liegt dieser in jeder der drei Ebenen $\overline{A_1B_1AB}$, $\overline{A_1C_1AC}$, $\overline{B_1C_1BC}$, ist also auch Schnittpunkt der beiden anderen Geradenpaare, womit der räumliche affine Desarguessche Satz bewiesen ist. Der ebene Satz wird dann in üblicher Weise auf den räumlichen zurückgeführt. Der Sonderfall, daß jede Gerade nur zwei Punkte enthält, erledigt sich trivial (in diesem Fall geht es ohne das räumliche Axiom G_a IV).

Definition 10: Eine umkehrbare eindeutige Abbildung der Menge der Punkte eines affinen Raumes auf sich, bei der Punkte einer Geraden stets in Punkte einer zur ersten parallelen Geraden übergehen, heiße eine *Dehnung*; falls sie einen Fixpunkt hat, eine *eigentliche Dehnung*, andernfalls eine *uneigentliche Dehnung* oder *Schiebung*. Die Identität sei sowohl eigentlich als auch uneigentlich.

Satz 5: Sind O, A, A' drei Punkte einer Geraden und ist O von den beiden anderen Punkten verschieden, so gibt es genau eine eigentliche Dehnung $\Delta_{O,\,A\,A'}$, die O fest läßt und A in A' überführt. Es gibt ferner genau eine Schiebung, die A in A' überführt. Sie führt alle zu $\overline{AA'}$ parallelen Geraden einzeln in sich über.

Man kann nämlich ohne weiteres ganz einfache Linealkonstruktionen (s. Fig. 11 und 12) angeben, die die gewünschten

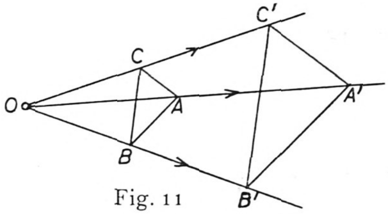

Fig. 11

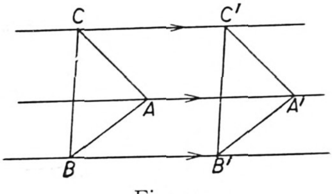

Fig. 12

Abbildungen liefern. Daß diese Konstruktionen eindeutig sind, und daß sie wirklich jede Gerade in eine zu ihr parallele Gerade überführen, folgt aus dem Desarguesschen Satz (man vgl. W. Schwan S. 20; Hessenberg S. 100).

Hilfssatz 15: Die Dehnungen des affinen Raumes bilden eine Gruppe G_Δ, in der die Schiebungen einen Abelschen Normalteiler bilden (Schwan S. 20; Artin).

Beweis: I. Die Gruppeneigenschaft der Dehnungen ist klar. II. Wäre das Produkt zweier Schiebungen Σ, Σ' keine Schiebung, so hätte es einen Fixpunkt F, also wäre $\Sigma\Sigma' F = F$ oder $\Sigma' F = \Sigma^{-1} F$. Nach dem zweiten Teil von Satz 5 wäre also $\Sigma' = \Sigma^{-1}$ und $\Sigma\Sigma'$ wäre die Identität, also doch eine Schiebung.

II. Die Kommutativität der Schiebungsgruppe folgt aus der Parallelogrammkonstruktion, ihre Normalteilereigenschaft in G_Δ daraus, daß $\Delta^{-1}\Sigma\Delta$ mit $\Delta \in G_\Delta$ jede Gerade des Parallelbündels der bei Σ fest bleibenden Geraden in sich überführt.

Hilfssatz 16: G_A sei die Gruppe aller Dehnungen mit dem Zentrum (d. h. dem Fixpunkt) A; S_g sei die Gruppe der Schiebungen, die die Gerade g in sich überführen. Für beliebige Punkte A, B sind dann die Gruppen G_A und G_B, sowie für beliebige Gerade g, h die Gruppen S_g und S_h isomorph. Die bis auf Isomorphie bestimmte Gruppe G_A bzw. S_g nennen wir die lineare Dehnungsgruppe bzw. die lineare Schiebungsgruppe.

Beweis: I. Σ_{AB} sei die Schiebung, die A in B überführt. Dann ist

$$G_B = \Sigma_{AB} G_A \Sigma_{BA},$$

d. h. G_A und G_B sind in G_Δ konjugiert.

II. g und h seien zwei Gerade einer Ebene. Ferner sei in dieser Ebene ein Büschel paralleler Geraden gegeben, das weder g noch h enthält. Dann erzeugt die Gruppe S_g eine Vertauschungsgruppe der Büschelgeraden, die zu S_g isomorph ist und S_h erzeugt (nach Satz 5) offenbar dieselbe Vertauschungsgruppe. Also sind S_g und S_h isomorph. Nochmalige Anwendung dieses Ergebnisses auf eine mit h in einer Ebene liegende Gerade vollendet den Beweis.

Hilfssatz 17: Ist $\mathfrak{U}$ ein Unterraum, $P \bar{\in} \mathfrak{U}$ ein Punkt, so bilden die Punkte aller Parallelen durch P zu Geraden aus $\mathfrak{U}$ einen Unterraum $\mathfrak{V}$, der zu $\mathfrak{U}$ punktfremd ist und die gleiche Dimension und Codimension hat wie $\mathfrak{U}$. $\mathfrak{V}$ heiße ein zu $\mathfrak{U}$ paralleler Unterraum.

Beweis: Daß die Punktmenge $\mathfrak{V}$ zu $\mathfrak{U}$ punktfremd ist, folgt aus der zweiten Definitionseigenschaft des Unterraums, weil sonst P zu $\mathfrak{U}$ gehören müßte. Daß $\mathfrak{V}$ ein Unterraum ist, folgt aus der Tatsache, daß die Schiebung Σ_{UP} mit $U \in \mathfrak{U}$ den Unterraum $\mathfrak{U}$ in die Menge $\mathfrak{V}$ überführt (weil jede Schiebung oder Dehnung Unterräume in Unterräume transformiert). Ferner ist $\overline{\mathfrak{U}\mathfrak{V}} = \overline{\mathfrak{U}P} = \overline{\mathfrak{V}U}$, d. h. $\mathfrak{U}$ und $\mathfrak{V}$ haben gleiche Dimension und Codimension.

Hilfssatz 18: $\mathfrak{n}$ *sei die Dimension des Raumes. Dann ist die volle Schiebungsgruppe* G_Σ *das direkte Produkt aus* $\mathfrak{n}$ *der linearen Schiebungsgruppe isomorphen Gruppen (oder: die direkte* $\mathfrak{n}$*-te Potenz der linearen Schiebungsgruppe).*

Beweis: P sei ein beliebiger Punkt, $\mathfrak{B} = (O, B_1, B_2, \ldots, B_\mu, \ldots)$ sei eine Basis des affinen Raumes. $\mathfrak{B}_\mu = \overline{\mathfrak{B} - B_\mu}$ ist eine Hyperebene. Die Gesamtheit aller Punkte auf Parallelen durch P zu Geraden aus $\mathfrak{B}_\mu$ bildet nach Hilfssatz 17 eine zu $\mathfrak{B}_\mu$ parallele Hyperebene $\mathfrak{A}_\mu$. Nur für endlich viele μ ist $\mathfrak{A}_\mu \neq \mathfrak{B}_\mu$, denn nach Hilfssatz 3 liegt P in einem Unterraum, der von endlich vielen Punkten aus $\mathfrak{B}$ erzeugt wird, etwa dem Unterraum $\overline{OB_{\mu_1}B_{\mu_2}\ldots B_{\mu_n}}$. Für $\mu \neq \mu_i$ $(i = 1, 2, \ldots n)$ ist also $P \in \mathfrak{B}_\mu$, d. h. $\mathfrak{B}_\mu = \mathfrak{A}_\mu$. Es sei nun $A_\mu = \mathfrak{A}_\mu \cap \overline{OB_\mu}$ gesetzt. Für $\mu \neq \mu_i$ $(i = 1, \ldots, n)$ ist offenbar $A_\mu = O$. Es wird

$$\Sigma_{OA_\mu}\mathfrak{B}_\lambda = \begin{cases} \mathfrak{B}_\lambda & \text{für } \mu \neq \lambda \\ \mathfrak{A}_\mu & \text{für } \mu = \lambda. \end{cases}$$

Daraus folgt die Zerlegung

$$\Sigma_{OP} = \Sigma_{OA_{\mu_1}}\Sigma_{OA_{\mu_2}}\ldots\Sigma_{OA_{\mu_n}}.$$

Sie ist eindeutig, denn sonst erhielte man eine Darstellung der Identität

$$\Sigma_{OO} = \Sigma_{OA_{\alpha_1}}\Sigma_{OA_{\alpha_2}}\ldots\Sigma_{OA_{\alpha_m}} \text{ mit } m > 0,\ A_{\alpha_i} \neq O,$$

was nicht sein kann, da die rechte Seite die Hyperebene $\mathfrak{B}_{\alpha_1}$ nicht fest läßt. Damit ist Hilfssatz 18 bewiesen.

§ 5. Einführung von Koordinaten

Wir führen jetzt ein *Koordinatensystem* ein, indem wir I. eine Basis O, E^1, E^2, ..., E^μ, ... (etwa wohlgeordnet) und II. die Hyperebene $e = \overline{\mathfrak{E}}$, wobei $\mathfrak{E}$ die Menge aller von O verschiedenen Basispunkte E^μ ist, sowie alle zu e parallelen (s. Hilfssatz 17) Hyperebenen, insbesondere die durch O gehende Hyperebene $o \parallel e$ ein für allemal festhalten. Die zu e parallelen Hyperebenen nennen wir die *Haupthyperebenen*. Sie bilden das *Hauptbüschel*.

Σ_{AB} sei ein für allemal die Schiebung, die den Punkt A in den Punkt B, $\Delta_{O,\,ea}$ die Dehnung mit dem Zentrum O, die die Haupthyperebene e in die von o verschiedene Haupthyperebene a überführt.

Definition 11:[1] Die *Addition von Punkten* wird definiert durch

$$A + B = \Sigma_{OA} B = \Sigma_{OA}\, \Sigma_{OB}\, O, \tag{6}$$

die Multiplikation von Haupthyperebenen mit Punkten (nicht umgekehrt!) durch

$$a \cdot A = \begin{cases} \Delta_{O,\,ea}\, A & \text{für } a \neq o \\ O & \text{für } a = o. \end{cases} \tag{7}$$

Aus (6) folgt unmittelbar

Hilfssatz 19: Die Punkte bilden hinsichtlich der Addition eine der vollen Schiebungsgruppe isomorphe Gruppe.

Definition 12: Sind $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$ Punktmengen, so bedeute $\mathfrak{A} + \mathfrak{B}$ die Menge aller Punkte $A + B$ mit $A \in \mathfrak{A}$, $B \in \mathfrak{B}$; ferner $a \cdot \mathfrak{A}$ die Menge aller Punkte $a \cdot A$ mit $A \in \mathfrak{A}$.

Ist A ein Punkt, $\mathfrak{A}$ ein Unterraum und $a \neq o$ eine Haupthyperebene, so ist offenbar $A + \mathfrak{A}$ und ebenso $a \cdot \mathfrak{A}$ ein zu $\mathfrak{A}$ paralleler Unterraum.

---

[1] Herrn Prof. R. Baer verdanke ich den Hinweis, daß sich der Koordinatenkörper auch auf vom Koordinatensystem unabhängige Weise als Endomorphismenkörper der vollen Schiebungsgruppe einführen läßt (Artin). Die Artinschen Gedanken lassen sich auf unseren Fall unbeschränkter Dimension unverändert anwenden.

Hilfssatz 20: Sind $\mathfrak{A}$ *und* $\mathfrak{B}$ *parallele Unterräume, so ist* $\mathfrak{A} + \mathfrak{B}$ *ein zu* $\mathfrak{A}$ *und* $\mathfrak{B}$ *paralleler Unterraum.*

Beweis: Es sei $A_1 \in \mathfrak{A}$, $A_2 \in \mathfrak{A}$. $A_1 + \mathfrak{B}$ und $A_2 + \mathfrak{B}$ sind zu $\mathfrak{B}$ parallele Unterräume. Sie enthalten die Punkte $A_1 + B$ bzw. $A_2 + B$, die beide in dem zu $\mathfrak{B}$ parallelen Unterraum $\mathfrak{A} + B$ liegen. Daher ist $\mathfrak{A} + B = A_1 + \mathfrak{B} = A_2 + \mathfrak{B} = \mathfrak{A} + \mathfrak{B}$, w. z. b. w.

Wendet man diese Ergebnisse auf die Haupthyperebenen an, so folgt

Hilfssatz 21: Die Haupthyperebenen bilden hinsichtlich der Addition eine Gruppe vom Typus der linearen Schiebungsgruppe; die von o verschiedenen Haupthyperebenen bilden hinsichtlich der Multiplikation eine Gruppe vom Typus der linearen Dehnungsgruppe.

Hilfssatz 22: Für parallele Unterräume $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$ *(insbesondere also für Punkte und Haupthyperebenen) gilt das erste distributive Gesetz*

$$a \cdot (\mathfrak{A} + \mathfrak{B}) = a \cdot \mathfrak{A} + a \cdot \mathfrak{B}. \tag{8}$$

Beweis: Für $a = o$ ist die Behauptung trivial. Es sei nun $a \neq o$. Falls $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ einzelne Punkte A, B sind, wird

$$a \cdot (A + B) = \Delta_{O,\, ea}\, \Sigma_{OA}\, \Sigma_{OB}\, O =$$

$$[\Delta_{O,\, ea}\, \Sigma_{OA}\, \Delta_{O,\, ea}^{-1}]\, [\Delta_{O,\, ea}\, \Sigma_{OB}\, \Delta_{O,\, ea}^{-1}]\, O.$$

In den eckigen Klammern stehen wegen der Normalteilereigenschaft der Schiebungsgruppe die *Schiebungen* $\Sigma_{O\,aA}$ bzw. $\Sigma_{O\,aB}$. Das ist die Behauptung. Die allgemeine Behauptung ergibt sich daraus nach Hilfssatz 20.

Hilfsatz 23: Für Unterräume $\mathfrak{A}$ *gilt das zweite distributive Gesetz*

$$(a + b)\mathfrak{A} = a\mathfrak{A} + b\mathfrak{A}. \tag{9}$$

Beweis: P sei ein beliebiger Punkt der beliebigen Menge $\mathfrak{P}$. Die *Abbildung* $\Gamma P = aP + bP$ hat die Eigenschaften $\Gamma P \in \overline{OP}$ und $\Gamma P \in a\mathfrak{P} + b\mathfrak{P}$. Ist $\mathfrak{P}$ ein Unterraum, so ist $(a\mathfrak{P} + b\mathfrak{P}) \parallel \mathfrak{P}$, außer im Fall $a = b = o$.

Fall 1: Es gibt einen Punkt P mit $\Gamma P = P' \neq O$.

Ist Q ein beliebiger, nicht auf $\overline{OP}$ gelegener Punkt, so liegt ΓQ auf der Parallelen $a \cdot \overline{PQ} + b \cdot \overline{PQ}$ zu $\overline{PQ}$ durch P', ferner auf $\overline{OQ}$. Es ist also $\Gamma Q \neq O$, und $Q' = \Gamma Q$ wird durch eine Linealkonstruktion gefunden, die genau mit derjenigen für eine Dehnung übereinstimmt. Γ ist also eine Dehnung mit O als Zentrum, d. h. es gibt eine Haupthyperebene $c \neq o$, für die $\Gamma\mathfrak{P} = c \cdot \mathfrak{P}$ gilt. Für $\mathfrak{P} = e$ wird $\Gamma e = a + b = ce$, also $c = a + b$, w. z. b. w.

Fall 2: Für jeden Punkt P ist $\Gamma P = O$, also $\Gamma\mathfrak{P} = oP$. Im Fall $P \in e$ wird $O = \Gamma P \in ae + be = a + b$. Andererseits ist $O \in o$, also (nach Hilfsatz 20) $a + b = o$, w. z. b. w. Wir haben damit

Satz 6: In jedem affinen Raum, der den Axiomen des § 2 genügt, bilden die Haupthyperebenen einen – nicht notwendig kommutativen – Körper K. Die Punkte bilden einen Linksvektorraum $\mathfrak{V}$ (Pickert 1, § 10; Bourbaki S. 4 und S. 32ff.) *der Dimension* $\mathfrak{n}$ *über K. Die Geraden sind gegeben durch die Menge der Punkte $A + \mu B$, wobei A und $B \neq O$ verschiedene, feste Punkte sind und μ alle Elemente von K durchläuft. Die ein- bzw. zwei- bzw. k-gliedrigen Untermoduln (Linksmoduln) von $\mathfrak{V}$ sind die O enthaltenden Geraden, Ebenen bzw. k-dimensionalen Unterräume.*

Umgekehrt sieht man leicht, daß jeder Vektorraum der Dimension $\mathfrak{n} > 2$ über einem Körper ein affiner Raum im Sinn des § 2 ist.

Jetzt können wir Hilfssatz 12 umkehren:

Hilfssatz 24: Jeder affine Raum $\mathfrak{R}_a$ läßt sich so in einen projektiven Raum einbetten, daß $\mathfrak{R}_a$ aus dem letzteren durch Weglassung einer Hyperebene entsteht.

Beweis: I. $\mathfrak{R}_a$ ist Linksvektorraum über einem Körper K. Jeder Punkt P gestattet in unserem Koordinatensystem eine eindeutige Darstellung

$$P = \sum_i \xi_i E^i = \xi_i E^i, \tag{10}$$

wobei die ξ_i Elemente von K (in geometrischer Deutung Haupthyperebenen) sind. Wir verwenden die Einsteinsche Konvention und lassen bei Summen über einen unteren und einen oberen Index das Summenzeichen weg. Weiter bezeichnen wir die Körperelemente o und e i.a. ab jetzt mit den üblichen Zeichen 0 und 1. Die ξ_i verschwinden bis auf endlich viele und heißen die *inhomogenen Koordinaten* des Punktes P (im gegebenen Koordinatensystem).

Der Vektorraum $\mathfrak{R}_a$ läßt sich algebraisch erweitern zu einem Vektorraum $\mathfrak{R}'_a$ mit einem weiteren Basispunkt O'. Setzt man $B^0 = O$, $B^i = E^i + O'$ (d. h. B^i sei die vierte Ecke des Parallelogramms mit den beiden Seiten OO' und OE^i), und wählt man als neues Koordinatensystem für $\mathfrak{R}'_a$ das System $(O', B^0, B^1, \ldots, B^i, \ldots)$, so liegt jeder Punkt P von $\mathfrak{R}_a$ in genau einem eingliedrigen Linksmodul (d. h. auf einem Strahl durch O') von $\mathfrak{R}'_a$, jede Gerade von $\mathfrak{R}_a$ in genau einem zweigliedrigen Modul von $\mathfrak{R}'_a$. Die Inzidenz zwischen Punkten und Geraden drückt sich durch das Enthaltensein des zugehörigen eingliedrigen Moduls in dem zur Geraden gehörigen zweigliedrigen aus. Die Koordinaten eines Punktes sind in $\mathfrak{R}_a$ und $\mathfrak{R}'_a$ dieselben, nur kommt in $\mathfrak{R}'_a$ noch eine Koordinate $\xi_0 = 1$ hinzu.

Wir nennen nun *jeden* eingliedrigen Linksmodul von $\mathfrak{R}'_a$ einen *Punkt des projektiven Raumes* $\mathfrak{R}_p$ und jeden zweigliedrigen eine *Gerade* von $\mathfrak{R}_p$, wobei wieder die Inzidenz durch das Enthaltensein definiert sein soll.

II. Es läßt sich nun leicht zeigen, daß in $\mathfrak{R}_p$ die projektiven Axiome des § 1 erfüllt sind. G_p I ist erfüllt, weil zwei verschiedene eingliedrige Linksmoduln in genau einem zweigliedrigen liegen. Auch G_p II gilt: Seien nämlich A, B, C, D vier verschiedene Punkte aus $\mathfrak{R}_p$, d. h. vier paarweise (links) linear unabhängige eingliedrige Moduln aus $\mathfrak{R}'_a$. Die Moduln (A, B) und (C, D) sollen einen Punkt gemein haben, es gebe also Elemente a, b, c, d von K, die nicht alle verschwinden, so daß $aA + bB = cC + dD$ ist. Daraus folgt $aA - cC = -bB + dD$, d. h. die Moduln (A, C) und (B, D) haben ein Element gemein, das wegen der paarweisen linearen Unabhängigkeit der Moduln (A), (B), (C), (D) von O' verschieden ist, w. z. b. w. G_p IV gilt, weil ein mindestens vierdimensionaler Vektorraum stets zwei zweigliedrige Untermoduln enthält, deren Durchschnitt nur aus dem Nullvektor besteht. G_p III folgt daraus, daß jeder zweigliedrige Modul mindestens drei paarweise linear unabhängige Elemente enthält und das ist eine Folge der Tatsache, daß jeder Körper mindestens zwei Elemente enthält.

III. Jeder Punkt $P' \in \mathfrak{R}'_a$ gestattet die eindeutige Darstellung

(11) $$P' = x_i B^i \text{ (zu summieren über } i = 0, 1, \ldots),$$

wobei wieder nur endlich viele x_i von 0 verschieden sind. Die x_i heißen *homogene Koordinaten* des (für $P' \neq O'$) durch den von P' erzeugten Modul definierten *Punktes von* $\mathfrak{R}_p$.

IV. Die Punkte mit der ersten homogenen Koordinate 0 bilden in $\mathfrak{R}_p$ einen Unterraum $\mathfrak{U}$. $\mathfrak{U}$ hat mit jeder Geraden, wie man mühelos sieht, einen Punkt gemein, ist also eine Hyperebene. $\mathfrak{U}$ besteht genau aus *den* Punkten von $\mathfrak{R}_p$, denen kein Punkt von $\mathfrak{R}_a$ entspricht.

V. Die nach dem damit bewiesenen Hilfssatz 24 mögliche Einbettung eines affinen Raumes in einen projektiven gleicher Dimension ist eindeutig in dem Sinn, daß je zwei solche Räume umkehrbar eindeutig und umkehrbar geradentreu aufeinander abgebildet, also *isomorph* hinsichtlich aller aus den Axiomen folgenden Eigenschaften sind. Das folgt daraus, daß Inzidenzrelationen zwischen Punkten und Geraden des *projektiven* Raumes sich mit Hilfe des Desarguesschen Satzes durch Inzidenz- und Parallelitätsrelationen des *affinen* Teilraumes beschreiben lassen. Wir haben damit:

Satz 7: Jeder projektive Raum der Dimension $\mathfrak{n}$ *(im Sinn des § 1) läßt sich analytisch darstellen durch einen Linksvektorraum der Dimension* $1 + \mathfrak{n}$ *über einem Körper K. Die eingliedrigen Linksmoduln sind die Punkte. Drei Punkte gehören einer Geraden an, wenn ihre zugeordneten Linksmoduln in einem zweigliedrigen Linksmodul enthalten sind. Umgekehrt stellt bei dieser Deutung jeder Linksvektorraum der Dimension* > 3 *einen projektiven Raum dar.*

§ 6. Kollineationen, Dualität und Korrelationen in projektiven Räumen

Definition 13: Eine umkehrbar eindeutige Abbildung der Menge der Punkte eines projektiven bzw. affinen Raumes, bei der in beiden Richtungen alle Inzidenz- und Parallelitätsbeziehungen erhalten bleiben, heiße eine *Kollineation* bzw. *Parallelkollineation*.

Satz 8: Die Parallelkollineationen eines affinen Raumes $\mathfrak{B}$ *in einen affinen Raum* $\mathfrak{B}'$ *drücken sich aus durch die Formeln*

$$\xi'_j = J(\xi_i)a^i_j + b_j \quad (i, j = 1, 2, \ldots) \tag{12}$$

für die inhomogenen Koordinaten ξ_i, ξ'_j *aus. Dabei bedeutet* $J(\xi_i)$ *einen Isomorphismus des Koordinatenkörpers der* ξ_i *auf den Koordinatenkörper* K' *der* ξ'_j. *Die Koeffizienten* a^i_j, b_j *gehören* K' *an. Nur endlich viele* b_j *und für jedes* i *nur endlich viele* a^i_j *sind* $\neq 0$.

Beweis: I. Wir zeigen zunächst, daß (12) unter einer noch anzugebenden Bedingung eine Parallelkollineation darstellt. (12) setzt sich zusammen aus den drei Transformationen

$$\xi'_i = J(\xi_i), \tag{13}$$

$$\xi'_j = \xi_i\, a^i_j, \tag{14}$$

$$\xi'_j = \xi_j + b_j. \tag{15}$$

Parallele Gerade sind analytisch gegeben durch $\eta_i + \mu\xi_i$, $\zeta_i + \mu\xi_i$, wobei ξ_i, η_i, ζ_i feste Punkte mit $\xi_i \neq O$ aus $\mathfrak{B}$ sind. (13) und (15) sind umkehrbar und transformieren diese Geraden offenbar wieder in parallele Gerade. (14) macht aus ihnen $\eta_i a^i_j + \mu\xi_i a^i_j$ bzw. $\zeta_i a^i_j + \mu\xi_i\, a^i_j$.

Wenn die Transformation (14) die Eigenschaft hat, daß sie umkehrbar ist, d. h. einen vom Nullvektor verschiedenen Vektor niemals in den Nullvektor transformiert, ist sie umkehrbar eindeutig (das soll nur heißen, daß jedem Bildpunkt und jedem aus Bildpunkten linear zusammengesetzten Punkt genau ein Originalpunkt entspricht [Abbildung von $\mathfrak{B}$ *in* $\mathfrak{B}'$]; nicht aber, daß jedem Punkt des Koordinatenraumes der ξ'_j auch ein Originalpunkt mit Koordinaten ξ_i entsprechen müßte [Abbildung von $\mathfrak{B}$ *auf* $\mathfrak{B}'$]. Das wäre bei unendlicher Dimension nicht richtig, da es bekanntlich isomorphe Abbildungen von Vektorräumen unendlicher Dimension in echte Teilräume gibt [Bourbaki]). Ferner transformiert (14) parallele Gerade in parallele Gerade, ist also eine Parallelkollineation.

II. Umgekehrt läßt sich jede Parallelkollineation zusammensetzen aus einer, die die Grundpunkte (O, E^i) des Koordinatensystems in die Grundpunkte des Koordinatensystems im Bildraum überführt und einer, die das Koordinatensystem innerhalb eines Raumes transformiert. Wir betrachten zunächst die allgemeinste Parallelkollineation der ersten Art. Nach den Definitionen der Summe zweier Punkte und des Produkts von Haupthyperebenen mit Punkten durch Inzidenz- und Parallelitätsrelationen müssen diese Summen- und Produktbeziehungen bei der Parallelkollineation erhalten bleiben, d. h. es muß

$$\xi'_i = J(\xi_i) \tag{13}$$

gelten, und dadurch ist, wie gezeigt wurde, auch stets eine Parallelkollineation gegeben.

III. Eine Parallelkollineation, die das Koordinatensystem (O, E^i) der Reihe nach in die Punkte (O', B^i) desselben Raumes überführt, erhält man aus den Basisdarstellungen der Punkte (O', B^i) im System (O, E^i). Diese mögen etwa lauten:

$$B^i = \alpha^i_j E^j, \qquad O' = b_j E^j.$$

Der Bildpunkt des Punktes $P = \xi_i E^i$ wird dann $P' = O' + \sum_i \xi_i (B^i - O') = b_j E^j + \xi_i \alpha^i_j E^j - \sum_i \xi_i b_j E^j = \xi'_j E^j$.

Wegen der Eindeutigkeit der Basisdarstellung wird, wenn wir noch

$$a^i_j = \alpha^i_j - b_j$$

setzen,

$$\xi'_j = \xi_i a^i_j + b_j.$$

Überlagerung mit (13) ergibt die Behauptung.

Satz 9: Die allgemeinen Kollineationen eines projektiven Raumes $\mathfrak{R}_p$ in einen anderen sind gegeben durch die Gleichungen

$$x'_j = \mu J(x_i)\, c^i_j \tag{16}$$

für die homogenen Koordinaten x_i, $x'_j (i, j = 0, 1, \ldots)$, wobei die Matrix der c^i_j die Eigenschaft haben muß, daß alle x'_j nur dann verschwinden können, wenn alle x_i verschwinden. $\mu \neq 0$ ist ein willkürlicher Proportionalitätsfaktor, der von Punkt zu Punkt *wechseln darf. Für festes* μ *stellt* (16) *einen Isomorphismus der algebraischen Struktur des Linksvektorraumes dar.*

Beweis: I. Daß (16) eine Kollineation darstellt, sieht man daraus, daß (16) für $\mu = 1$ (was keine geometrische Einschränkung ist) eine Parallelkollineation des affinen Erweiterungsraumes $\mathfrak{R}'_a$ (vgl. den Beweis zu Hilfssatz 24, § 5) bedeutet. Jede solche vermittelt aber, wenn O' fest bleibt, was hier der Fall ist, eine Kollineation von $\mathfrak{R}_p$.

II. Ein *projektives Koordinatensystem* in $\mathfrak{R}_p$ kann festgelegt werden durch einen Nullpunkt O, eine uneigentliche Hyperebene u mit der Basis $U^1, U^2, \ldots, U^i, \ldots$, und Einheitspunkte $E^i \in \overline{OU^i}$. Man kann in dem affinen Erweiterungsraum $\mathfrak{R}'_a$ eine Basis O', $B^0, B^1, \ldots, B^i, \ldots$ so einführen, daß (für $i > 0$) $\overline{O'B^i} \parallel \overline{OE^i}$, $\overline{O'B^i} \cap u = U^i$, $\overline{O'O} \parallel \overline{B^iE^i}$ ist. Dann ist (es sei wie oben $B^0 = O$ gesetzt) durch diese Basis das projektive Koordinatensystem in $\mathfrak{R}_p$ eindeutig bestimmt. Da man durch O' fest lassende Parallelkollineationen von $\mathfrak{R}'_a$ auf sich zu jeder anderen Basis übergehen kann, kann man also auch durch Kollineationen (16) jedes projektive Koordinatensystem von $\mathfrak{R}_p$ in jedes andere überführen.

III. Wir brauchen also nur noch solche Kollineationen zu betrachten, die das projektive Koordinatensystem von $\mathfrak{R}_p$ in das des Bildraums überführen. Diese sind Parallelkollineationen des affinen Teilraumes $\mathfrak{R}_a$ von der Form (13) oder – wegen $x_i = x_0 \xi_i$ –

$$x'_i = \mu J(x_i) \qquad (i = 0, 1, 2, \ldots). \tag{17}$$

Durch Zusammensetzung der einzelnen Kollineationen ergibt sich die Behauptung.

Wir können nun leicht die *Gleichung der allgemeinen Hyperebene des projektiven Raumes* angeben. Es sei nämlich auf die gegebene Hyperebene eine solche Koordinatentransformation ausgeübt, daß sie im gestrichenen System uneigentliche Hyperebene wird, also die Gleichung $x'_0 = 0$ erhält. Im ursprünglichen System ist ihre Gleichung daher $x_i c_0^i = 0$ oder

$$x_i u^i = 0, \tag{18}$$

wobei nur endlich viele x_i, aber u. U. unendlich viele u^i, von 0 verschieden sind. Man kann die u^i in üblicher Weise als *Hyper-*

ebenenkoordinaten, die Hyperebenen als Punkte eines *dualen Raumes* und die *Hyperebenenbüschel* als dessen Geraden definieren. Die u^i sind homogene Koordinaten des dualen Raumes, doch ist zu beachten, daß bei dieser Deutung der zugehörige Vektorraum ein *Rechtsvektorraum* ist und daß sich das Dualitätsprinzip *nicht* auf den Fall unendlicher Dimension übertragen läßt (vgl. B. Segre, Baer 1).

Definition 14: Eine umkehrbar eindeutige Abbildung eines projektiven Raumes *auf* seinen dualen Raum, bei der Punkten einer Geraden stets Hyperebenen eines Büschels entsprechen und umgekehrt, heiße eine *Korrelation.*

Ist die Dimension $\mathfrak{n}$ des Raumes unendlich, so ist die Dimension des dualen Raumes $> \mathfrak{n}$. *Daher sind Korrelationen nur in Räumen endlicher Dimension möglich* (Baer 1 S. 95 ff.).

Satz 10: Jede Korrelation läßt sich durch Gleichungen

$$(19) \qquad u^i = c^{ik} \bar{A}(x_k) \text{ oder aufgelöst } x_h = \bar{A}^{-1}(u^i) c_{hi}$$

beschreiben, wobei $\bar{A}$ ein Antiautomorphismus des Koordinatenkörpers K ist, d. h. es sei $\bar{A}(a+b) = \bar{A}a + \bar{A}b$, $\bar{A}(ab) = \bar{A}b \cdot \bar{A}a$ für a, b aus K.

Der Beweis ergibt sich unmittelbar aus Satz 9, wenn man die Rechtsschreibweise des dualen Raumes beachtet.

In der Gruppe der Kollineationen eines projektiven Raumes auf sich bilden diejenigen, für die der Körperautomorphismus J ein *innerer* ist, einen Normalteiler, wie man verifiziert, wenn man eine Kollineation mit innerem Automorphismus durch eine allgemeine Kollineation transformiert. Wir nennen die Kollineationen dieses Normalteilers *lineare Abbildungen* oder *lineare Kollineationen.*

Die restlichen Betrachtungen dieses Kapitels dienen der geometrischen Kennzeichnung der linearen Abbildungen.

Hilfssatz 25: Jede projektive Abbildung einer Geraden auf eine andere wird durch mindestens eine lineare Abbildung des Raumes vermittelt.

Beweis: I. Die spezielle lineare Abbildung $x_1' = x_2$, $x_2' = x_1$, $x_i' = x_i$ für $i = 0, 3, 4, 5, \ldots$ ist eine Perspektivität der ersten beiden Koordinatenachsen aufeinander.

II. Diese spezielle Perspektivität läßt sich durch eine Koordinatentransformation in *jede* Perspektivität zwischen zwei Geraden überführen. Bei dieser Koordinatentransformation gehen lineare Abbildungen in ebensolche über, d. h. jede Perspektivität und daher jede Projektivität zwischen zwei Geraden wird durch eine lineare Abbildung vermittelt.

Hilfssatz 26: Jede Kollineation, die eine Gerade g punktweise fest läßt, ist eine lineare Abbildung.

Beweis: (a_i), (b_i) seien homogene Koordinaten zweier Punkte der punktweise fest bleibenden Geraden g. Die Kollineation (16) – der Einfachheit halber mit $\mu = 1$ – führe sie in (a'_j) bzw. (b'_j) über. Es wird

$$a'_j = J(a_i)\, c^i_j = \alpha a_j, \qquad b'_j = J(b^i_j)\, c^i_j = \beta b_j,$$

$$(\lambda a_j + \rho b_j)' = J(\lambda)\, \alpha a_j + J(\rho)\, \beta b_j = \gamma(\lambda a_j + \rho b_j)$$

für beliebige λ, μ aus K, also wegen der linearen Unabhängigkeit von (a_j) und (b_j):

$$J(\lambda)\alpha = \gamma\lambda, \quad J(\rho)\beta = \gamma\rho. \quad \text{Daraus folgt}$$

$$J(\lambda^{-1}\rho) = \alpha\lambda^{-1}\rho\beta^{-1}.$$

Das kann für beliebige λ, ρ nur sein, wenn $\alpha = \beta$ ist. J ist also ein innerer Automorphismus, w. z. b. w.

Jede Kollineation, die eine Gerade projektiv abbildet, ist also eine lineare Abbildung. Auch die Umkehrung gilt. Zu ihrem Beweis genügt, weil sich jede Gerade g projektiv so auf jede Gerade h abbilden läßt, daß drei gegebene Punkte von g in drei gegebene Punkte von h übergehen, der Beweis von

Hilfssatz 27: Jede lineare Abbildung, die drei Punkte einer Geraden g fest läßt, bildet g projektiv ab.

Beweis: (a_i), (b_i), $(a_i + b_i)$ seien die drei Fixpunkte in homogenen Koordinaten. (Das läßt sich durch geeignete Wahl der willkürlichen Linksfaktoren erreichen.) Unsere lineare Abbildung können wir schreiben $x'_j = x_i c^i_j$. Das ist, wenn wir über den willkürlichen Linksfaktor μ geeignet verfügen, keine Einschränkung gegenüber der scheinbar allgemeineren Form $x'_j = \mu\gamma x_i \gamma^{-1} c^i_j$.

Dann wird

$$a'_j = a_i c^i_j = \alpha a_j,\quad b'_j = b_i c^i_j = \beta b_j,$$
$$(a_j + b_j)' = \alpha a_j + \beta b_j = \gamma(a_j + b_j),\quad \text{also}\quad \alpha = \beta = \gamma.$$

Ferner wird

$$(a_j + \mu b_j)' = \alpha(a_j + \alpha^{-1}\mu\alpha b_j).$$

Das Koordinatensystem sei nun so gewählt, daß $(a_j) = (1, 0, 0, \ldots)$, $(b_j) = (0, 1, 0, 0, \ldots)$ wird, was offenbar möglich ist. Dann bildet die gegebene Abbildung die Gerade g genau so ab wie die Abbildung

$$x'_j = x_j\alpha \text{ oder (in inhomogenen Koordinaten) } \xi'_j = \alpha^{-1}\xi_j\alpha.$$

Diese Abbildung läßt sich aber innerhalb einer Ebene durch g und eine weitere den Koordinatenursprung enthaltende Gerade h durch Parallelprojektionen von g auf h und zurück erzeugen, ist also projektiv. Das ergibt sich aus der Definition der Multiplikation genau wie in der gewöhnlichen Hilbertschen Streckenrechnung (Hilbert § 24). Wir haben damit

Satz 11: Die linearen Abbildungen sind genau diejenigen Kollineationen, die eine – und damit jede – Gerade des Raumes projektiv abbilden.

Der wesentliche Gehalt dieses Satzes, der Zusammenhang zwischen inneren Automorphismen des Koordinatenkörpers und projektiven Abbildungen der Geraden des Raumes wird von K. Reidemeister in seinem Buch über Grundlagen der Geometrie als *Fundamentalsatz der projektiven Geometrie* bezeichnet.

Der Zusammenhang mit dem gewöhnlichen Fundamentalsatz (für kommutativen Koordinatenkörper K) ergibt sich aus folgendem Satz, der in unseren Ergebnissen enthalten ist:

Bleiben die Punkte mit den inhomogenen Koordinaten $(0, 1, \infty)$ auf einer Geraden bei einer projektiven Abbildung fest, so geht ein beliebiger Punkt mit der Koordinate $\mu \in K$ in einen Punkt $\alpha^{-1}\mu\alpha$ mit $\alpha \in K$ über. Umgekehrt gibt es stets eine projektive Abbildung, die die Punkte $(0, 1, \infty)$ fest läßt und einen weiteren Punkt mit der Koordinate μ in einen Punkt mit der Koordinate $\alpha^{-1}\mu\alpha$ mit beliebigem $\alpha \in K$ (natürlich $\neq 0$) überführt (Reidemeister S. 139).

Die Ergebnisse des vorstehenden Paragraphen finden sich zum größten Teil, jedoch in koordinatenfreier Schreibweise, in dem mehrfach zitierten Werk von Reinhold Baer: Linear Algebra and Projective Geometry (Baer 1).

II. Kapitel

Die Hyperebene als geometrischer Grundbegriff

§ 7. Hyperebenenaxiome der projektiven Geometrie

Die Axiomensysteme des I. Kapitels bilden zwar eine einfache Grundlage für die analytische Geometrie über allgemeinen Körpern, doch erscheint es für manche Teile der projektiven Geometrie naturgemäßer, die zueinander dualen Begriffe Punkt und Hyperebene an Stelle von Punkt und Gerade als Grundbegriffe einzuführen. Das gilt vor allem für die Teile der projektiven Geometrie, die sich mit den Begriffen der Dualität, der Polarität und der Orthogonalität befassen; und gerade diese Teile sind ja wichtig für die Begründung der metrischen Geometrie, wie im III. Kapitel näher erläutert werden soll.

Das Axiomensystem, von dem wir in diesem Kapitel ausgehen, ersetzt also den Geradenbegriff durch den Hyperebenenbegriff und lehnt sich im übrigen weitgehend an § 1 an. Es soll nur als vorläufige Lösung betrachtet werden; denn es ist zu hoffen, daß es sich noch vereinfachen läßt. Für die in dieser Arbeit zu behandelnden Anwendungen genügt es, die Axiome so zu fassen, daß die Dimension des Raumes endlich wird. Das geht, wenn man von der Hyperebene als Grundbegriff ausgeht, völlig mühelos, während man von der Geraden ausgehend etwa das folgende Axiom einführen müßte, das den übrigen Geradenaxiomen an Einfachheit nachsteht:

Axiom $\mathrm{G_p V}$: *Es gibt endlich viele Punkte $P_1, \ldots P_{n+1}$ von folgender Eigenschaft: Es gibt höchstens eine Punktmenge, die $P_1, \ldots, P_{n+1}$ enthält und die mit je zwei Punkten A, B deren Verbindungsgerade $\overline{AB}$ ganz enthält* (vgl. Pickert 2, S. 387).

Wir stellen nun ein Axiomensystem mit der Hyperebene als Grundbegriff zusammen:

Der *Raum* ist eine Menge von *Punkten.* Gewisse Untermengen heißen *Hyperebenen.*

Axiom H I*: Zu je zwei Punkten A, $B \neq A$ gibt es*

a) *eine Hyperebene, die A enthält, aber nicht B,*

b) *eine Hyperebene, die weder A noch B enthält.*

Axiom H II*: A, B, C, D seien vier beliebige, nicht notwendig verschiedene Punkte. Wenn dann D in jeder Hyperebene durch A, B, C liegt, aber nicht in jeder Hyperebene durch A, B, so liegt C in jeder Hyperebene durch A, B, D.*

Axiom H III*: Ist h eine Hyperebene und sind A, $B \neq A$ Punkte, so gibt es einen Punkt $H \in h$, der in jeder A und B enthaltenden Hyperebene liegt.*

Axiom H IV*: Ist H ein Punkt und sind a, b verschiedene Hyperebenen, so gibt es eine Hyperebene h durch H, die jeden in a und in b liegenden Punkt enthält* (dual zu H III).

Axiom H V*: Es gibt endlich viele, aber nicht weniger als vier, Hyperebenen mit leerem Durchschnitt.*

Axiom H VI*: Keine Hyperebene enthält alle Punkte.*

Axiom H VI dient nur dazu, die Bezeichnung „Hyperebene“ für den ganzen Raum auszuschließen. Würde H VI nicht gelten, so wäre H IV trivialerweise erfüllt.

Aus H V folgt die Existenz von vier Hyperebenen und die Existenz von zwei verschiedenen Punkten. Denn seien $a, b, c, \ldots, k$ endlich viele Hyperebenen mit leerem Durchschnitt von der Eigenschaft, daß der Durchschnitt einer kleineren Zahl von Hyperebenen niemals leer ist. Dann sind $a \cap b$ und $c \cap d \cap \ldots \ldots \cap k$ nicht leer und punktfremd, d. h. es gibt *zwei* Punkte. (Nach H V und H I besteht der Durchschnitt zweier Hyperebenen aus mindestens drei Punkten, also gibt es mindestens *vier* Punkte.) Ohne H V dagegen ließe sich weder die Existenz von Punkten noch die von Hyperebenen behaupten. Aus H Ia folgt, daß jeder Punkt ebenso wie die leere Menge Durchschnitt von Hyperebenen ist.

Definition 15: Der Durchschnitt aller Hyperebenen durch zwei verschiedene Punkte A, B heiße die *Gerade* $\overline{AB}$. Im Fall $A = B$ sei $\overline{AB}$ gleichbedeutend mit A.

Setzt man in Axiom H II die Punkte A und B gleich, so ergibt sich

Hilfssatz 28: Liegt der Punkt D auf der Geraden $\overline{AC}$, so ist entweder $D = A$ oder C liegt auf der Geraden $\overline{AD}$.

Ferner ist nach Voraussetzung $\overline{AD} \subseteqq \overline{AC}$ und im Fall $A \neq D$ nach Hilfssatz 28 ebenso $\overline{AC} \subseteqq \overline{AD}$, also $\overline{AC} = \overline{AD}$. Wiederholung dieses Schlusses liefert die eindeutige Bestimmtheit einer Geraden durch irgend zwei ihrer Punkte, d. h. *in einem durch unsere Hyperebenenaxiome erklärten Raum gilt das Geradenaxiom* G_p I.

Hilfssatz 29: Wenn der Punkt D in jeder Hyperebene durch die drei verschiedenen Punkte A, B, C liegt und von C verschieden ist, so haben die Geraden $\overline{AB}$ und $\overline{CD}$ einen Punkt gemein.

Beweis: Wenn drei der vier Punkte A, B, C, D in einer Geraden liegen, ist die Behauptung trivial; wir nehmen daher das Gegenteil an. Es gebe also eine Hyperebene h durch A und B, die D nicht enthält. Nach Voraussetzung enthält sie auch C nicht. Nach Axiom H III schneidet die Gerade $\overline{CD}$ die Hyperebene h in einem Punkt H. Wir nehmen an, H liege nicht auf $\overline{AB}$. H liegt in jeder Hyperebene durch C und D, also nach Voraussetzung in jeder Hyperebene durch A, B und C. Nach Axiom H II läge also C in jeder Hyperebene durch A, B und H, d. h. in h, was nicht der Fall ist. Damit ist Hilfssatz 29 bewiesen.

Sind nun A, B, C, D vier verschiedene Punkte und schneiden sich die Geraden $\overline{AB}$ und $\overline{CD}$ in einem Punkt P, so ist – außer, wenn $P = C$ ist – D in jeder Hyperebene durch C und P, also in jeder Hyperebene durch A, B und C gelegen. Nach Hilfssatz 29 schneiden sich daher die Geraden $\overline{AC}$ und $\overline{BD}$, was in dem vorher ausgeschlossenen Fall $P = C$ trivial ist.

Es gilt also das Geradenaxiom G_p II *des § 1.*

Aus H I b *und* H III *folgt, daß auch* G_p III *gilt.*

Nach Definition 15 sind die Hyperebenen *Unterräume* im Sinne des I. Kapitels. Die Dimensionssätze des § 3 gelten; aus H III und H VI folgt daher, daß die *Codimension der Hyperebenen* 0 ist. Aus H IV folgt, daß die Hyperebenen in dem von den Unterräumen der Codimension 0 gebildeten *dualen Raum* einen *Unterraum* bilden; kurz gesagt, daß die Menge der Hyperebenen ein *Bündel* solcher Unterräume (Hyperebenen *im Sinn des I. Kapitels*) ist. Aus H V folgt, daß die Dimension des Raumes *endlich*, also eine natürliche Zahl $n > 2$ ist. Die Hyperebenen bilden also ein Bündel von gleichfalls endlicher Dimension $k \leqq n$. Weil der Durchschnitt aller Hyperebenen leer ist, muß $k = n$ sein, d. h. *jeder Unterraum der Codimension Null ist eine Hyperebene.*

Erst dieses Ergebnis rechtfertigt die Verwendung des Wortes „Hyperebene" in unserem Axiomensystem.

Man sieht, daß in analytisch definierten projektiven Räumen unsere Hyperebenenaxiome gelten. Wir haben damit

Satz 12: Die Räume, in denen die Hyperebenenaxiome H I *bis* H VI *gelten, sind genau die durch endlich viele (mindestens vier) homogene Koordinaten über einem (nicht notwendig kommutativen) Körper beschreibbaren Räume.*

Zur Unabhängigkeit der Axiome sei folgendes bemerkt:

Die Frage, ob H I a von den übrigen Axiomen unabhängig ist, bleibe offen. Alle Axiome außer H I b werden erfüllt von den sog. reduziblen Räumen (vgl. § 1), deren einfachstes Beispiel eine Menge aus vier Punkten ist, in der die Untermengen aus drei Punkten als Hyperebenen bezeichnet werden. Axiom H III ist unabhängig von den anderen, weil in der um genau einen Punkt und keine Hyperebene verminderten gewöhnlichen projektiven Geometrie des Raumes von mindestens vier Dimensionen alle Axiome außer H III gelten. Axiom H IV ist unabhängig von den anderen, weil der gewöhnliche projektive Raum, wenn man genau einer seiner Hyperebenen den Namen „Hyperebene" entzieht, alle übrigen Axiome erfüllt. Axiom H V ist unabhängig von den anderen, weil ein projektiver Raum unendlicher Dimension alle anderen Axiome erfüllt. Axiom VI ist unabhängig, weil man ohne dieses Axiom auch dem ganzen Raum den Namen „Hyperebene" beilegen könnte. Ob Axiom H II von den anderen unabhängig ist (was zu vermuten ist), soll hier nicht entschieden werden.

Um die Geometrie unendlicher Dimension zu begründen, könnte man etwa noch fordern (an Stelle von H IV bis H VI):

Axiom H IV′: *Drei Punkte liegen stets in einer Hyperebene.*

Axiom H V′: *Enthält eine echte Untermenge des Raumes mit je zwei Punkten A, B den Durchschnitt aller Hyperebenen durch A, B, so liegt sie ganz in einer Hyperebene, dagegen ist der Raum keine Hyperebene.*

Axiom H VI′: *Es gibt zwei verschiedene Punkte.*

Ein Axiom wie H V′ erscheint aber doch gekünstelt.

§ 8. Axiomatische Polarentheorie

Gegeben sei ein projektiver Raum der *endlichen* Dimension $n \geqq 2$, etwa durch die Hyperebenenaxiome des vorigen Paragraphen definiert. Im Fall $n = 2$ gelte der Desarguessche Satz.

Definition 16: Eine Abbildung der Menge der Punkte eines projektiven Raumes auf die Menge der Hyperebenen desselben Raumes heißt eine *Polarität*, wenn sie den folgenden drei Forderungen genügt:

P I: *Zu jedem Punkt P existiert genau eine Polarhyperebene (kurz Polare) p.*

P II: *Zu jeder Hyperebene q existiert genau ein Pol Q, d. h. ein Punkt, dessen Polarhyperebene q ist.*

P III: *Liegt der Punkt P auf der Polarhyperebene q des Punktes Q, so liegt der Punkt Q auf der Polarhyperebene p des Punktes P.*

Wir bezeichnen in diesem Paragraphen Punkte und die zugehörigen Polaren stets mit zusammengehörigen großen bzw. kleinen lateinischen Buchstaben.

Hilfssatz 30: Liegen die drei Punkte A, B, C in einer Geraden, so gehören die zugehörigen Polaren einem Hyperebenenbündel an; d. h. wenn die drei Punkte A, B, C verschieden sind, so sind auch a, b, c verschieden und es ist $a \cap b = a \cap c$. Die Umkehrung gilt gleichfalls.

Beweis: Es sei $C \in \overline{AB}$. Der Durchschnitt $a \cap b = \mathfrak{D}$ ist wegen $n \geqq 2$ nicht leer. Es sei D ein Punkt aus $\mathfrak{D}$, d seine Polare. D liegt auf den Polaren von A und B, nach P III ist also $\overline{AB} \subseteqq d$, also $C \in d$. Daher liegt D in der Polaren c von C. Weil $D \in \mathfrak{D}$ ganz beliebig gewählt war, folgt $\mathfrak{D} \subseteqq c$, d. h. c gehört dem von a und b erzeugten Büschel an. Daraus folgt die Behauptung.

Die Umkehrung folgt nach dem Dualitätsprinzip, das ja im projektiven Raum endlicher Dimension gilt; denn die Forderungen P I bis P III sind zu sich selbst dual.

Hilfssatz 31: Ist a die Polarhyperebene des Punktes A, so ist A der Durchschnitt aller Polarhyperebenen x von Punkten $X \in a$.

Beweis: Jede Polarhyperebene x enthält A. Wir nehmen an, es gebe zwei Punkte A, B, die in allen Hyperebenen x liegen. Dann liegen alle Punkte X in den zwei verschiedenen Hyperebenen a, b, was nicht sein kann. Hilfssatz 30 zeigt, daß die Polarität eine Korrelation ist, Hilfssatz 31, daß sie eine *involutorische Korrelation* ist (vgl. v. d. Waerden 2, S. 24–25).

Mit Hilfe der Ergebnisse des I. Kapitels folgt daraus der – in koordinatenfreier Schreibweise in dem Baerschen Buch (Baer 1) enthaltene –

Satz 13: Jede Polarität läßt sich analytisch darstellen durch Gleichungen

$$x^i = g^{ik} \bar{A}(x_k) \tag{20}$$

oder aufgelöst

$$x_k = \bar{A}^{-1}(x^i) g_{ki} \tag{21}$$

zwischen den homogenen Punktkoordinaten x_i $(i = 0, 1, \ldots, n)$ des Poles und den Hyperebenenkoordinaten x^i der Polaren. $\bar{A}$ ist dabei ein involutorischer Antiautomorphismus des Koordinatenkörpers K. Es ist also für alle x aus K

$$\bar{A}^2(x) = x. \tag{22}$$

Die Matrizen g^{ik}, g_{ik} sind nichtsingulär und entweder

$$g^{ik} = \bar{A}(g^{ki}) \tag{23}$$

$$g_{ik} = \bar{A}(g_{ki}) \tag{24}$$

oder K ist kommutativ, die Dimension des Raumes ungerade und

(23a) $$g^{ik} = -g^{ki}$$

(24a) $$g_{ik} = -g_{ki},$$

d. h. die Polarität ist ein Nullsystem.

Die Punkte bzw. Hyperebenen, die mit ihren Polaren bzw. Polen inzidieren, sind die Lösungen der Gleichungen

(25) $$x_i g^{ik} \bar{A}(x_k) = 0 \quad \text{bzw.}$$

(26) $$\bar{A}^{-1}(x^i) g_{ki} x^k = 0.$$

Beweis: I. Die Gleichungen (20), (21), (25), (26) gelten nach Satz 10, weil die Polarität eine Korrelation ist.

II. y^k seien die Koordinaten einer Hyperebene h, der Punkt mit den Koordinaten x_k sei beliebig in h gelegen. Der Pol y_i von y^k liegt in der Polarhyperebene x^i von x_k, d. h. es wird (wenn wir in (20) $\bar{A}_0$ für $\bar{A}$ und h^{ik} für g^{ik} schreiben)

$$y_i x^i = y_i h^{ik} \bar{A}_0(x_k) = 0 \quad \text{oder (nach Anwendung von } \bar{A}_0^{-1})$$
$$x_k \bar{A}_0^{-1}(h^{ik}) \bar{A}_0^{-1}(y_i) = 0;$$

d. h. x_k liegt in der Hyperebene h' mit den Koordinaten

$$u^k = \bar{A}_0^{-1}(h^{ik}) \bar{A}_0^{-1}(y_i).$$

Weil x_k ganz beliebig in h angenommen war, muß $h' = h$ sein, also $y^k = u^k \mu$ mit von 0 verschiedenem $\mu \in K$ oder ausgeschrieben

$$h^{ki} \bar{A}_0(y_i) = \bar{A}_0^{-1}(h^{ik}) \cdot \bar{A}_0^{-1}(y_i) \cdot \mu$$

oder (mit $\bar{A}_0(\mu) = \alpha$)

$$\bar{A}_0^2(y_i) \bar{A}_0(h^{ki}) = \alpha y_i h^{ik}.$$

α hängt scheinbar vom Vektor $\mathfrak{y} = (y_j)$ ab. Wir schreiben daher vorläufig $\alpha_{\mathfrak{y}}$ für α. Wählt man speziell für $\mathfrak{y}$ die *Grundvektoren* $\mathfrak{y}^{(i)}$ mit den Koordinaten $y_j^{(i)} = \delta_j^i$ (Kronecker-Symbol), so wird (mit der Abkürzung $\overset{i}{\alpha}$ für $\alpha_{\mathfrak{y}^{(i)}}$) wegen $\bar{A}_0(1) = 1$

$$\bar{A}_0(h^{ki}) = \overset{i}{\alpha}\, h^{ik} \quad {}^{1}$$

[1] Über i ist nicht zu summieren!

und daher allgemein

$$\bar{A}_0^2(y_i)\,\bar{A}_0(h^{ki}) = \alpha_{\mathfrak{y}}\, y_i \overset{i}{\alpha}{}^{-1}\,\bar{A}_0(h^{ki}) \quad \text{oder}$$
$$h^{ki}\,\bar{A}_0(y_i) = h^{ki}\,\bar{A}_0^{-1}(\alpha_{\mathfrak{y}}\, y_i \overset{i}{\alpha}{}^{-1}).$$

Weil die Matrix h^{ki} nichtsingulär ist, folgt koordinatenweise

$$\bar{A}_0^2(y_i)\overset{i}{\alpha} = \alpha_{\mathfrak{y}}\, y_i.$$

Für je zwei Vektoren $\mathfrak{y}$, $\mathfrak{y}'$, die in *einer* von o verschiedenen Koordinate übereinstimmen, ist daher $\alpha_{\mathfrak{y}} = \alpha_{\mathfrak{y}'}$. Das kann nur sein, wenn $\alpha_{\mathfrak{y}} = \alpha$ allgemein von $\mathfrak{y}$ unabhängig ist. Also wird

$$\bar{A}_0^2(y) = \alpha y \alpha^{-1} \tag{27}$$

für alle $y \in K$ und weiter

$$\bar{A}_0(h^{ki}) = \alpha\, h^{ik}, \tag{27a}$$

$$\bar{A}_0(x_i y^i) = \alpha y_i x^i \tag{28}$$

für beliebige Vektoren x_i, y_i.

III. Nun sind zwei Fälle zu unterscheiden.

Fall 1: Es gibt einen Punkt z_i, der nicht auf seiner Polaren liegt.

Dann gibt es ein γ aus K mit

$$z_i z^i = \gamma^{-1} \neq 0.$$

Wir setzen nun

$$\begin{aligned} &\text{I. } g^{ik} = h^{ik}\gamma \\ &\text{II. } \delta = \gamma^{-1}\bar{A}_0(\gamma)\alpha \\ &\text{III. } \bar{A}(y) = \gamma^{-1}\bar{A}_0(y)\gamma \text{ für alle } y \text{ aus } K. \end{aligned} \tag{29}$$

$\bar{A}$ ist gleichfalls ein Antiautomorphismus von K. Es wird

$$\begin{aligned} &\text{I. } \bar{A}^2(y) = \delta y \delta^{-1} \\ &\text{II. } x^i\gamma = g^{ik}\bar{A}(x_k) \\ &\text{III. } g^{ik} = \delta^{-1}\bar{A}(g^{ki}); \qquad \text{ferner} \end{aligned} \tag{30}$$

$$z_i g^{ik}\bar{A}(z_k) = 1.$$

Weiter wird

$$\bar{A}\,[x_i g^{ik}\bar{A}(x_k)] = \delta x_k g^{ki}\bar{A}(x_i).$$

Das gilt auch für $x_i = z_i$, also wird $\bar{A}(1) = \delta$ oder $\delta = 1$. Schreiben wir nun wieder x^i statt $x^i\gamma$, was geometrisch nichts ändert, so erhalten wir die Formeln der Behauptung.

IV. *Fall 2: Jeder Punkt liegt auf seiner Polarhyperebene.*

Sind die Koordinaten eines Punktes x_i gegeben, so kann man stets Koordinaten eines Punktes y_i so wählen, daß $x_i y^i$ eine beliebig vorgegebene Größe z des Körpers K wird. Dann wird

$$0 = (x_i + y_i)(x^i + y^i) = x_i y^i + y_i x^i \quad \text{oder}$$
$$y_i x^i = -z, \quad \text{ferner nach (28)}$$
$$\bar{A}(z) = -\alpha z \quad \text{für alle } z \in K.$$

Daher ist $\alpha = -1$, $\bar{A}$ die Identität und K kommutativ, w. z. b. w.

Der Beweis der Formeln (24) bzw. (24a) erfolgt dual zu dem der Formeln (23) bzw. (23a).

Satz 13 ist umkehrbar, d. h. jede Korrelation, die sich durch die Gleichungen (20), (22) und (23) oder (23a) beschreiben läßt, ist eine Polarität, wie man durch Verifikation der drei Polaritätspostulate erkennt.

Wir betrachten nun besondere Polaritäten, die wir *quasiprojektiv* nennen (vgl. Baer 1, S. 131 ff.).

Definition 17: Die Menge der Punkte einer Geraden heiße auch *Punktreihe*. Zwei Punktreihen heißen *quasiprojektiv* aufeinander bezogen, wenn es eine Kollineation gibt, die die Abbildung der einen auf die andere vermittelt.

Definition 18: Eine Korrelation heiße *quasiprojektiv* bzw. *projektiv*, wenn sie die Punkte einer Punktreihe so auf die Hyperebenen eines Büschels abbildet, daß diese aus einer Geraden eine zur ersten quasiprojektive bzw. projektive Punktreihe ausschneiden.

Satz 14: Eine Korrelation ist dann und nur dann quasiprojektiv, wenn der Koordinatenkörper K kommutativ ist. Sie ist projektiv, wenn darüber hinaus der Antiautomorphismus $\bar{A}$ in den die Korrelation beschreibenden Gleichungen die Identität ist.

Beweis: I. Bei kommutativem K ist die spezielle Korrelation $x^i = x_i$ nach der gewöhnlichen analytischen Geometrie projektiv und jede Korrelation setzt sich aus ihr und einer Kollineation zusammen, ist also quasiprojektiv.

II. Die gegebene Korrelation $x^i = g^{ik} \bar{A}(x_k)$ sei quasiprojektiv. Sie führe die Punkte a_i, b_i in die Hyperebenen a^i, b^i über. Aus der Geraden $\lambda a_i + \mu b_i$ wird das Büschel $a^i \bar{A}(\lambda) + b^i \bar{A}(\mu)$. c_i, d_i seien zwei Punkte auf einer Geraden, die von diesem Büschel in einer Punktreihe geschnitten wird; es sei etwa

$$c_i a^i = 0, \quad d_i b^i = 0, \quad c_i b^i \neq 0, \quad d_i a^i \neq 0.$$

Nun soll die Gerade durch a_i, b_i auf die Gerade durch c_i und d_i quasiprojektiv abgebildet werden. Bei geeigneter Wahl der willkürlichen Linksfaktoren für die homogenen Punktkoordinaten können wir (nach Satz 9) daher schreiben

$$c_k = J(a_i) e^i_k, \quad d_k = J(b_i) e^i_k, \qquad \text{also}$$
$$J(\lambda) c_k + J(\mu) d_k = J(\lambda a_i + \mu b_i) e^i_k.$$

Diese quasiprojektive Beziehung zwischen den beiden Geraden soll durch die Korrelation und den Schnitt der Büschelhyperebenen mit der zweiten Geraden vermittelt werden, d. h. es soll die *Inzidenzbedingung*

$$[J(\lambda) c_i + J(\mu) d_i]\, [a^i \bar{A}(\lambda) + b^i \bar{A}(\mu)] = 0$$

für alle λ, μ aus K gelten, also

$$J(\lambda) c_i b^i \bar{A}(\mu) + J(\mu) d_i a^i \bar{A}(\lambda) = 0.$$

Für $\lambda = \mu = 1$ wird daraus $c_i b^i = - d_i a^i = \gamma \neq 0$,
für $\mu = 1$, λ beliebig also

$$\bar{A}(\lambda) = \gamma^{-1} J(\lambda) \gamma,$$

d. h. der Antiautomorphismus $\bar{A}$ ist ein Automorphismus und K kommutativ, w. z. b. w.

Folgerungen: I. Jede projektive Polarität wird entweder durch eine quadratische Form vermittelt oder sie ist (aber nur bei ungerader Dimension n) ein Nullsystem.

II. Quasiprojektive, aber nicht projektive Polaritäten existieren nur in projektiven Räumen mit kommutativen Koordinatenkörpern K, die separable quadratische Erweiterungen eines Unterkörpers $K_0 \subset K$ sind.

Denn die Elemente $x \in K$ mit $x = \bar{A}(x)$ bilden einen Körper $K_0 \subset K$. Jedes nicht in K_0 liegende Element $z \in K$ genügt einer quadratischen Gleichung $(x - z)(x - \bar{A}(z)) = 0$, deren Koeffizienten K_0 angehören. z ist also quadratisch über K_0. Nach dem Satz vom primitiven Element ist also K selbst quadratisch über K_0.

Die quasiprojektiven, nicht projektiven Polaritäten werden also durch verallgemeinerte Hermitesche Formen (vgl. Witt, Birkhoff-v. Neumann) vermittelt.

Überhaupt kann man, wie in der Theorie der Hermiteschen Formen, an Stelle von $\bar{A}(y)$ einfach $\bar{y}$, an Stelle von $\overline{g^{ik}}$, $\overline{x^i}$ usw. $\bar{g}^{ik}$, $\bar{x}^i$ usw. schreiben. Die Gleichungen des Satzes 13 lauten dann, wenn die Polarität kein Nullsystem ist,

$$(31) \qquad \begin{aligned} x^i &= g^{ik}\bar{x}_k, \qquad & x_k &= \bar{x}^i g_{ki}, \\ g^{ki} &= \bar{g}^{ik}, & g_{ki} &= \bar{g}_{ik} \end{aligned}$$

und die verallgemeinerten Hermiteschen Formen auf den linken Seiten von (25) und (26) schreiben sich

$$(32) \qquad x_i x^i = x_i g^{ik} \bar{x}_k = \bar{x}^i g_{ki} x^k.$$

Aus (28) wird

$$(33) \qquad \overline{x_i y^i} = y_i x^i.$$

Die nicht quasiprojektiven Polaritäten streifen wir nur durch ein Beispiel:

K sei der Quaternionenschiefkörper über dem Körper R der reellen Zahlen. Der Antiautomorphismus sei erklärt durch

$$\overline{a + bi + cj + dk} = a - bi - cj - dk,$$

wobei wie üblich $i, j, k, 1$ Elemente einer linearen Basis über R mit $i^2 = j^2 = k^2 = -1$, $ij = -ji = k$, $jk = -kj = i$, $ki = -ik = j$ sind. Für die Matrix g^{ik} nehmen wir speziell die Einheitsmatrix δ^{ik} (Kroneckersymbol!) an. Setzen wir

$$x_i = a_i + b_i i + c_i j + d_i k, \quad \text{so wird aus (32)}$$

$$x_i x^i = \sum_{r=0}^{r=n} (a_r^2 + b_r^2 + c_r^2 + d_r^2).$$

Unser Beispiel gibt also eine nicht quasiprojektive Polarität an, bei der kein Punkt auf seiner Polarhyperebene liegt, ähnlich wie bei der klassischen Polarität an einer nullteiligen Quadrik.

Man kann nun die Kollineationsgruppen studieren, die eine gegebene Polarität fest lassen. So kommt man auf Verallgemeinerungen der Cayley-Kleinschen projektiven Deutung der nicht euklidischen Geometrie. Man vergleiche dazu die am Schluß zitierten Bücher von E. Cartan und R. Baer (Baer 1 S. 144 ff.).

Zu der Frage, welche Punkte bei einer gegebenen Polarität auf ihren Polarhyperebenen liegen, findet man gleichfalls Untersuchungen in dem Baerschen Buch (Chapter IV). Ferner wird man die algebraische Theorie der quadratischen Formen heranziehen müssen (vgl. Witt, Eichler, Jones).

III. Kapitel

Das Senkrechtstehen als geometrischer Grundbegriff

§ 9. Senkrechte Geraden in der Desarguesschen Ebene

In diesem dritten Kapitel sollen *Orthogonalitätsaxiome* aufgestellt werden, welche zur Einführung einer absoluten Polarität im Sinne des vorigen Paragraphen und damit zur analytischen Behandlung der Orthogonalität ausreichen. Wir betrachten zunächst senkrechte Geraden in der Ebene, dann im Raum, jedoch unter der einschränkenden Voraussetzung, daß keine Gerade auf sich selbst senkrecht steht. Nach einer kurzen Betrachtung über den Satz vom Höhenschnittpunkt folgt die Betrachtung eines Axiomensystems, das als Grundbegriff das Senkrechtstehen von Hyperebenen verwendet und ohne einschränkende Annahme auskommt. Eine leichte Modifikation dieses Axiomensystems führt schließlich auf Geometrien mit ausgearteter Polarität nach Art der projektiven Fassung der Euklidischen Geometrie.

Gegeben sei also zunächst eine projektive Ebene, in der der Desarguessche Satz gilt und in der jede Gerade mindestens drei Punkte enthält. Weiter sei zwischen Geraden eine Beziehung des Senkrechtstehens ($a \perp b$) durch folgende *Rechtwinkelaxiome* erklärt:

Axiom R_e I: *Aus* $a \perp b$ *folgt* $b \perp a$.

Axiom R_e II: *a und b seien zwei nicht aufeinander senkrechte Gerade, die nicht notwendig verschieden sein müssen. B sei ein Punkt von b. Dann geht durch B genau eine zu a senkrechte Gerade.*

Axiom R_e III: *Zu jeder Geraden gibt es eine nicht auf ihr senkrechte Gerade.*

Die Widerspruchsfreiheit dieses Axiomensystems (zu dem natürlich auch die projektiven Axiome mit dem Desarguesschen Satz gehören) erkennt man am Beispiel der ebenen elliptischen Geometrie.

Hilfssatz 32: Zu jeder Geraden a gibt es genau einen Pol, d. h. einen Punkt von der Eigenschaft, daß alle und nur die Geraden durch ihn auf a senkrecht stehen.

Beweis (s. Fig. 13): d sei eine nicht auf a senkrechte Gerade, ferner seien C_1, C_2 zwei verschiedene Punkte auf d. Die nach Axiom R_e II eindeutig bestimmten Lote c_1, c_2 von C_1, C_2 auf d

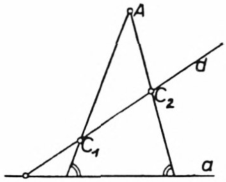

Fig. 13[1]

schneiden sich in einem Punkt A. A ist ein Pol von a; denn gäbe es eine A enthaltende, nicht auf a senkrechte Gerade, so hätten wir einen Widerspruch gegen Axiom R_e II. Gäbe es einen zweiten Punkt A' von der Eigenschaft, daß zwei – also alle – Geraden durch ihn auf a senkrecht ständen, so wäre offenbar jeder nicht auf $\overline{AA'}$ liegende Punkt P ein solcher Pol von a, d. h. jede Gerade (auch $\overline{AA'}$) stände auf a senkrecht im Widerspruch zu Axiom R_e III.

Hilfssatz 33: Verschiedene Gerade haben verschiedene Pole.

Beweis: Wir nehmen an, die Behauptung sei falsch, d. h. es gebe zwei Gerade b, c mit dem Schnittpunkt P und dem gemeinsamen Pol B.

[1] Doppelbogen in den Figuren bezeichnen das Senkrechtstehen von Geraden.

Fall 1 (s. Fig. 14): $B \neq P$.

g sei eine von $\overline{PB} = p$ verschiedene Gerade durch B. Es ist $p \perp b$, $p \perp c$, $g \perp b$, $g \perp c$; also ist P Pol von g, daher $p \perp g$. Die beiden Schnittpunkte von g mit b und c sind also Pole von p im Widerspruch zu Hilfssatz 32.

Fall 2 (s. Fig. 15): $B = P$.

Ist h eine beliebige Gerade durch P, so ist P Pol von h, d. h. alle Geraden durch P stehen aufeinander senkrecht. Eine nicht

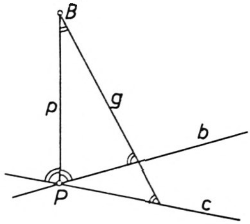

Fig. 14

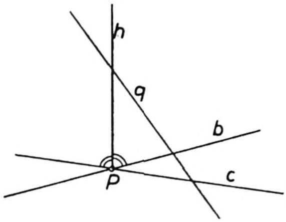

Fig. 15

durch P gehende Gerade q steht niemals auf h senkrecht; denn sonst hätte h zwei Pole, nämlich P und einen Punkt von q. Der Pol Q von q ist also von P verschieden. $\overline{PQ}$ steht senkrecht auf q im Widerspruch zu dem eben gefundenen Ergebnis, daß keine Gerade durch P auf q senkrecht steht. Damit ist Hilfssatz 33 bewiesen.

Hilfssatz 34: Zu jedem Punkt A gibt es genau eine Gerade a, deren Pol A ist. Wir nennen a die Polare von A.

Beweis: Es seien b und $c \neq b$ zwei Gerade durch A. Sie haben nach den beiden vorigen Hilfssätzen zwei wohlbestimmte, verschiedene Pole B, C. Die Gerade $\overline{BC}$ steht auf b und auf c senkrecht, daher ist A der Pol von $\overline{BC}$. Nach Hilfssatz 33 ist A Pol keiner anderen Geraden.

Satz 15: Die Zuordnung Pol-Polare (im Sinn der Erklärungen dieses Paragraphen) ist eine Polarität im Sinn des § 8, läßt sich also durch Formeln von der Form (20) bis (26) oder (31) bis (33) analytisch darstellen.

Beweis: Die Polaritätspostulate P I und P II wurden soeben bewiesen. Sind nun a, b Gerade mit den Polen A, B und liegt B

auf a, so ist $a \perp b$, also liegt auch A auf b, d. h. P III gilt. Daraus folgt nach § 8 die Behauptung.

Gelten in der Ebene außerdem noch die projektiven Anordnungs- (d. h. Trennungs-) axiome und die Stetigkeitsaxiome von Eudoxos (meist nach Archimedes benannt) und Dedekind bzw. Cantor, so ist der Koordinatenkörper bekanntlich kommutativ und dem Körper der reellen Zahlen isomorph. Weil dieser außer der Identität keinen Automorphismus gestattet (Darboux, Math. Ann. 17), gilt daher

Satz 16: Gelten in einer Desarguesschen Ebene Anordnungs- und Stetigkeitsaxiome im selben Umfang wie in der euklidischen Geometrie und weiter die ebenen Rechtwinkelaxiome R_e I *bis* R_e III, *so ist sie entweder die elliptische oder die projektiv erweiterte hyperbolische Ebene, je nachdem ob auf sich selbst senkrechte Gerade ausgeschlossen sind oder nicht* (vgl. dazu Prüfer).

Denn der Automorphismus $\bar{A}$ ist die Identität, also die Polarität eine gewöhnliche zu einer quadratischen Form gehörige; über dem reellen Zahlenkörper gibt es aber nur zwei nicht projektiv äquivalente Klassen quadratischer Formen, nämlich diejenigen, die gleich 0 gesetzt die Gleichungen des Kreises mit Radius 1 bzw. i ergeben.

Leider hat dieses Ergebnis den Schönheitsfehler, daß der Desarguessche Satz (oder eine gleichwertige Forderung) *postuliert* werden muß.

§ 10. Senkrechte, aber nicht auf sich selbst senkrechte Gerade im n-dimensionalen Raum

Gegeben sei ein projektiver Raum der endlichen Dimension $n > 2$, erklärt etwa durch die Geradenaxiome des § 1 und ein die Endlichkeit der Dimension festlegendes Postulat, etwa G_pV auf S. 44.

Zwischen Geraden des Raumes sei eine Beziehung des Senkrechtstehens gemäß den folgenden *räumlichen Rechtwinkelaxiomen* erklärt:

Axiom R_r I: *Aus $a \perp b$ folgt $b \perp a$ und ferner, daß $a \cap b$ ein Punkt ist.*

Folgerung: Es gibt keine isotropen, d. h. auf sich selbst senkrechten Geraden. Das ist eine wesentliche Einschränkung des Gültigkeitsbereiches der betrachteten Rechtwinkelgeometrie, da ja z. B. die projektiv erweiterte hyperbolische Geometrie ausgeschlossen bleibt.

Axiom R_r II: *Schneiden sich die nicht aufeinander senkrechten Geraden a und c und liegt der Punkt C auf c, aber nicht auf a, so gibt es höchstens ein Lot von C auf a.*

Axiom R_r III: *Schneiden sich die Geraden a und c (d. h. ist ihr Durchschnitt ein Punkt), so gibt es zwei auf c, aber nicht auf a liegende Punkte, von denen aus sich Lote auf a fällen lassen (diese Lote brauchen nicht verschieden zu sein).*

Bemerkung: Dieses Axiom macht das Geradenaxiom G_p III überflüssig.

Axiom R_r IV (s. Fig. 16): *b, c, d seien drei durch einen Punkt P gehende Gerade. Es gebe eine vierte Gerade, die b, c, d in verschiedenen Punkten schneidet. Es sei ferner a eine Gerade durch P, die auf b und c senkrecht steht. Dann steht a auch auf d senkrecht.*

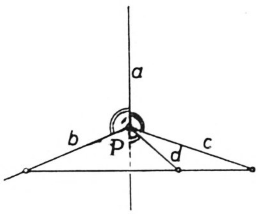

Fig. 16

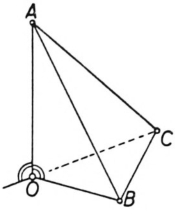

Fig. 17

Bemerkung: *a* ist wegen R_r I von *b*, *c* und *d* verschieden.

Axiom R_r V (s. Fig. 17): $\overline{OA}$ *und* $\overline{CB}$ *seien punktfremde Gerade. Ist* $\overline{OA} \perp \overline{OB}$, $\overline{OA} \perp \overline{OC}$ *und steht* $\overline{AB}$ *nicht senkrecht auf* $\overline{OB}$, *so steht auch* $\overline{AC}$ *nicht senkrecht auf* $\overline{OC}$.

Bemerkung: Die Axiome dieses Paragraphen sind Aussagen über Gerade. Im Gegensatz zu den noch folgenden §§ 12 und 13 ist es daher hier sachgemäß, die *projektiven* Eigenschaften des Raumes nicht durch Hyperebenen-, sondern durch Geradenaxiome festzulegen.

Hilfssatz 35: Zu jeder Geraden a gibt es in jeder sie enthaltenden Ebene α genau einen Punkt A von der Eigenschaft, daß eine in α liegende Gerade dann und nur dann auf a senkrecht steht, wenn sie A enthält. Ein Punkt, dessen Verbindungsgeraden mit Punkten von a sämtlich auf a senkrecht stehen, heiße ein Pol von a.

Beweis: I. Liegt der Punkt P auf a, so gibt es innerhalb α höchstens ein Lot auf a, das P enthält. Denn wären b, c zwei solche Lote, so wäre nach Axiom R_r IV (für $a = d$) a isotrop im Widerspruch zu Axiom R_r I. Es gibt daher in α eine von a verschiedene Gerade, die nicht auf a senkrecht steht.

II. Die Gerade c liege in α und stehe nicht senkrecht auf a. Nach Axiom R_r III gibt es zwei auf c, aber nicht auf a liegende Punkte, von denen sich Lote auf a fällen lassen. Diese Lote sind verschieden, schneiden sich also in einem Punkt A. A liegt nach Teil I des Beweises nicht auf a. Nach Axiom R_r II ist jede in α liegende, also a schneidende, Gerade durch A ein Lot auf a. A ist also ein Pol von a.

III. Gäbe es ein nicht durch A gehendes, in α liegendes Lot b auf a, so ließen sich innerhalb α im Punkt $a \cap b$ zwei Lote auf a errichten, was dem Ergebnis von I widerspricht, w. z. b. w.

Hilfssatz 36: Die Gesamtheit aller Lote, die man in einem Punkt A einer Geraden a errichten kann, besteht aus allen und nur den Geraden durch A, die in einer durch A und a eindeutig bestimmten Hyperebene $\mathfrak{A}$ liegen. Wir sagen, diese Hyperebene stehe senkrecht auf a oder: a sei ein Lot der Hyperebene $\mathfrak{A}$.

Beweis: Ist $\overline{AB} \perp a$, $\overline{AC} \perp a$, $A \,\overline{\in}\, \overline{BC}$, $D \in \overline{BC}$, so ist (nach R_r IV) $\overline{AD} \perp a$. Die Menge $\mathfrak{M}$, die aus dem Punkt A und allen Punkten besteht, deren Verbindungsgeraden mit A auf a senkrecht stehen, ist also ein Unterraum, der mit a nur den Punkt A gemein hat.

Jede a enthaltende Ebene α schneidet $\mathfrak{M}$ in einer A enthaltenden Geraden, weil α nach Hilfssatz 35 einen von A verschiedenen Pol von a enthält. Ist $B \neq A$ ein beliebiger Punkt von a und P ein weiterer Punkt, so schneidet $\overline{BP}$ also die Menge $\mathfrak{M}$, d. h. der ganze Raum ist die Hülle von $\mathfrak{M}$ und B. $\mathfrak{M}$ ist also eine Hyperebene, w. z. b. w.

Hilfssatz 37: Ist $\mathfrak{H}$ eine Hyperebene, so läßt sich in jedem ihrer Punkte eindeutig ein Lot errichten.

Beweis: P_0 sei ein beliebiger Punkt von $\mathfrak{H}$. $P_0, P_1, \ldots, P_{n-1}$ sei eine Basis von $\mathfrak{H}$. Die Gesamtheit der in P_0 errichteten Lote auf der Geraden $\overline{P_0 P_i}$ $(i > 0)$ erfüllt nach Hilfssatz 38 für jedes i eine Hyperebene. Der Durchschnitt dieser $n - 1$ Hyperebenen enthält, wie sich leicht aus den Dimensionsformeln des § 3 ergibt, mindestens eine Gerade durch P_0, etwa $\overline{P_0 Q}$. Aus Axiom R_r IV folgt, daß $\overline{P_0 Q}$ ein Lot auf $\mathfrak{H}$ ist. Gäbe es ein zweites solches Lot $\overline{P_0 Q'}$, so hätte die Gerade $\overline{P_0 Q Q'} \cap \mathfrak{H}$ in der Ebene $\overline{P_0 Q Q'}$ die beiden Lote $\overline{P_0 Q'}$ und $\overline{P_0 Q}$, wäre also nach einem schon mehrfach verwendeten Schluß isotrop (s. Beweis zu Hilfssatz 35, I), was nicht der Fall ist; w. z. b. w. Bei diesem Beweis wurde (in diesem Paragraphen zum ersten Mal) von der Endlichkeit der Dimension Gebrauch gemacht.

Hilfssatz 38: Sind A, O, B, C Punkte, die nicht alle in einer Ebene liegen und ist $\overline{OA} \perp \overline{OB}$, $\overline{OA} \perp \overline{OC}$, $\overline{AB} \perp \overline{OB}$; ist ferner g eine beliebige in der Ebene $\overline{OBC}$ liegende Gerade, so steht jede A enthaltende und g schneidende Gerade auf g senkrecht. A heiße ein Pol der Ebene $\overline{OBC}$.

Beweis (s. Fig. 18): I. Für eine Gerade g, die O enthält, folgt die Behauptung aus R_r IV und dem (positiv gewendeten) Axiom R_r V.

II. g gehe nicht durch O. Nach Hilfssatz 35 gibt es ein Lot von A auf g; L sei sein Fußpunkt. Nach R_r IV ist $\overline{OL} \perp \overline{OA}$, nach Axiom R_r V also $\overline{AL} \perp \overline{OL}$. (Dieser Schluß wurde in I verwendet.) Nochmalige Anwendung von R_r V (mit L statt O) ergibt die Behauptung.

Hilfssatz 39: Zu jeder Hyperebene $\mathfrak{A}$ gibt es genau einen Punkt A, so daß alle und nur die A enthaltenden Geraden auf $\mathfrak{A}$ senkrecht stehen. A heiße ein Pol der Hyperebene $\mathfrak{A}$. A liegt nicht in $\mathfrak{A}$.

Beweis (s. Fig. 19): P sei ein beliebiger Punkt der Hyperebene $\mathfrak{A}$; a sei das in P errichtete Lot auf $\mathfrak{A}$ (Hilfssatz 37). α sei eine Ebene durch a, $A \in a$ der in α liegende Pol der Geraden $p = \alpha \cap \mathfrak{A}$ (Hilfssatz 35). Nach Hilfssatz 38 ist A Pol jeder in $\mathfrak{A}$ liegenden Ebene durch p. h sei eine beliebige in $\mathfrak{A}$ liegende

Gerade, die p nicht schneidet; H sei ein Punkt von h. A ist Pol der Ebene $\overline{pH}$, also auch Pol der Geraden $\overline{PH}$. Q sei ein weiterer Punkt von h. Aus $Q \in \mathfrak{A}$ folgt $\overline{AP} \perp \overline{PQ}$. Nach Hilfssatz 38

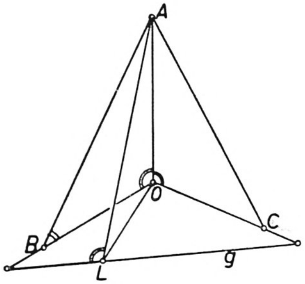

Fig. 18

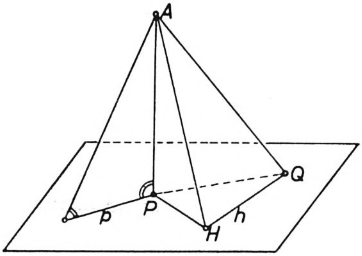

Fig. 19

ist A daher Pol der Ebene $\overline{PHQ}$, also auch Pol von h. Weil h in $\mathfrak{A}$ ganz beliebig gewählt war, ist damit die Behauptung bewiesen, daß jede Gerade durch A senkrecht auf $\mathfrak{A}$ steht. Wäre nun r eine *nicht* durch A gehende, auf $\mathfrak{A}$ senkrechte Gerade (s. Fig. 20)

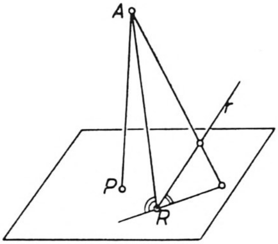

Fig. 20

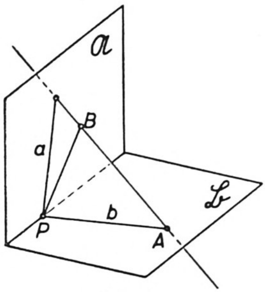

Fig. 21

und $R = r \cap \mathfrak{A}$, so gäbe es in der Ebene $\overline{rA}$ zwei R enthaltende Lote auf der Geraden $\overline{rA} \cap \mathfrak{A}$; diese Gerade wäre also (s. Beweis zu Hilfssatz 35 I) isotrop, was nicht der Fall ist.

Hilfssatz 40: Zu jedem Punkt A gibt es genau eine Hyperebene, deren Pol A ist. Sie heiße Polarhyperebene von A.

Beweis: b und c seien Gerade durch A; B und C seien ihre Pole in der Ebene $\overline{bc}$. B und C müssen verschieden sein; denn sonst stünde $\overline{AB}$ auf b und c senkrecht, wäre also isotrop. $\overline{BC}$ steht auf b und c senkrecht, hat also A als Pol. Die Gesamtheit aller Lote auf $\overline{AB}$, die sich in B errichten lassen, bilden eine Hyperebene $\mathfrak{A}$. A ist Pol einer Geraden dieser Hyperebene (nämlich $\overline{BC}$). Daraus folgt nach dem im Beweis zu Hilfssatz 39 durchgeführten Schluß, daß A Pol der Hyperebene $\mathfrak{A}$ ist.

Gäbe es eine zweite Hyperebene, deren Pol A ist, so schneide man beide Hyperebenen mit einer Ebene α, die durch einen Punkt geht, der der zweiten Hyperebene $\mathfrak{A}'$ angehört, aber nicht $\mathfrak{A}$. Die Schnittgeraden $p = \alpha \cap \mathfrak{A}$, $q = \alpha \cap \mathfrak{A}'$ sind dann verschieden. Es sei $P = p \cap q$. $\overline{AP}$ stände auf p und auf q senkrecht, wäre also isotrop.

Hilfssatz 41: Liegt der Punkt A auf der Hyperebene $\mathfrak{B}$, so liegt der Pol B von $\mathfrak{B}$ auf der Polarhyperebene $\mathfrak{A}$ von A.

Beweis (s. Fig. 21): Wir nehmen an, B liege nicht in $\mathfrak{A}$. B liegt auch nicht in $\mathfrak{B}$. α sei eine Ebene durch $\overline{AB}$, a ihr Schnitt mit $\mathfrak{A}$, b ihr Schnitt mit $\mathfrak{B}$. Es ist $a \neq b$, weil A in b, aber nicht in a liegt. $P = a \cap b$ ist also ein Punkt. Daher ist $a \perp b$. Außerdem war $\overline{PB} \perp b$; b müßte also isotrop sein, was nicht der Fall ist.

Damit sind für die Pol- und Polarenbegriffe dieses Paragraphen die drei Polaritätspostulate des § 9 nachgewiesen und wir haben

Satz 17: Die um ein Endlichkeitsaxiom erweiterten Geradenaxiome des § 1 und die räumlichen Rechtwinkelaxiome des § 10 reichen hin, um die durch sie erklärte Geometrie als verallgemeinerte Cayleysche Geometrie über einem nicht notwendig kommutativen Körper zu kennzeichnen, in der eine absolute Polarität ausgezeichnet ist. Setzt man wie in Satz 16 Anordnung und volle Stetigkeit voraus, so ist die Geometrie dadurch als die n-dimensionale elliptische Geometrie festgelegt.

Denn würde die Polarität durch eine indefinite quadratische Form oder ein Nullsystem bestimmt, so gäbe es Hyperebenen, die mit ihren Polen inzidieren, was Hilfssatz 39 widerspricht. Es muß noch gezeigt werden, daß die elliptische Geometrie tatsächlich unser Axiomensystem erfüllt. Wir beweisen gleich

Satz 18: Ist in einem n-dimensionalen ($n > 2$) projektiven Raum eine Polarität im Sinn des § 8 gegeben, inzidiert keine Hyperebene mit ihrem Pol und erklärt man das Senkrechtstehen zweier Geraden ($b \perp a$) dadurch, daß erstens a und b sich schnei-

den und zweitens b der Polarhyperebene $\mathfrak{B}$ eines Punktes $B \in a$ angehört, so sind die räumlichen Rechtwinkelaxiome dieses Paragraphen erfüllt.

Beweis: I. Eine Gerade p hat niemals einen Punkt mit der Durchschnittshypergeraden $\mathfrak{p}$ der Polarhyperebenen zweier (und damit aller) ihrer Punkte gemein; denn aus $P \in p \cap \mathfrak{p}$ würde folgen, daß P mit seiner Polarhyperebene inzidieren müßte. $\mathfrak{p}$ heiße Polarhypergerade von p.

II. Es sei $b \perp a$ und $\mathfrak{P}$ die Polare von $b \cap a = P$. b gehört der Polaren $\mathfrak{B}$ eines Punktes $B \in a$ an. Der Schnittpunkt $C = b \cap \mathfrak{P}$ liegt also in $\mathfrak{B} \cap \mathfrak{P}$. Daher liegen B und P, also a, in der Polaren $\mathfrak{C}$ von C, d. h. es ist $a \perp b$. Also gilt R_r I.

III. Von jedem Punkt $Q \overline{\in} a$ läßt sich entweder auf a genau ein Lot fällen oder jede a schneidende Gerade durch Q steht auf a senkrecht. Denn die Polarhypergerade $\mathfrak{a}$ von a schneidet die Ebene $\overline{aQ}$ in einem Punkt $P \overline{\in} a$, und eine a schneidende Gerade steht dann und nur dann senkrecht auf a, wenn sie auch $\mathfrak{a}$ schneidet. In der damit bewiesenen Aussage sind die Axiome R_r II und R_r III enthalten.

IV. Durch jeden Punkt von a geht nach I genau eine Polare eines Punktes von a. Daraus folgt, daß sich auf keiner Geraden innerhalb einer sie enthaltenden Ebene zwei Lote mit gleichem Fußpunkt errichten lassen. Denn zwei solche Lote müßten verschiedenen Polarhyperebenen von Punkten der Geraden a angehören, weil keine solche Polarhyperebene eine a enthaltende Ebene ganz enthalten kann. In Axiom R_r IV ist daher die Annahme, daß die dort mit b, c und a bezeichneten Geraden in einer Ebene liegen (also auch die Annahme $a = d$), unerfüllbar. Andernfalls folgt R_r IV unmittelbar aus der Definition und der ersten Aussage dieser Ziffer IV.

V. Es sei $\overline{OA} \cap \overline{BC}$ leer, ferner $\overline{OA} \perp \overline{OB}$, $\overline{OA} \perp \overline{OC}$, $\overline{OC} \perp \overline{AC}$ (s. Fig. 17). $\overline{OC}$ liegt also in der Polaren eines Punktes $P \in \overline{AO}$. Wäre $P \neq A$, so hätte $\overline{OC}$ in der Ebene $\overline{AOC}$ die beiden Lote $\overline{PC}$ und $\overline{AC}$ im Widerspruch zu IV. Also ist auch $\overline{AB} \perp \overline{OB}$; d. h. Axiom R_r V und damit ist Satz 18 bewiesen.

In § 8 wurde ein Beispiel einer Polarität über nichtkommutativem Koordinatenkörper angegeben, bei der kein Punkt in seiner

Polarhyperebene liegt. Es ist daher nicht möglich, aus unseren Rechtwinkelaxiomen den Satz des Pappos zu beweisen. Daß die Frage nach den Geometrien mit kommutativem Koordinatenkörper, in denen die Rechtwinkelaxiome dieses Paragraphen gelten, auf die Theorie der quadratischen Formen führt, wurde schon am Schluß des § 8 anläßlich einer äquivalenten Fragestellung betont. Man vgl. auch F. Bachmann, Math. Ann. 117 (1940), insbes. S. 218 ff.

Der Versuch, das Senkrechtstehen von Geraden ohne das einschränkende Verbot isotroper Geraden zur Begründung der analytischen Polarentheorie zu verwenden, führte auf Schwierigkeiten und wurde daher zurückgestellt. Eine einfachere und allgemeinere Begründung wird sich mit Hilfe senkrechter *Hyperebenen* ergeben. Es sei erwähnt, daß Prüfer in seinem erwähnten Werk vom Senkrechtstehen von *Geraden* auf *Ebenen* ausgeht.

§ 11. Über den Satz vom Höhenschnittpunkt im Dreieck

Gegeben sei eine ebene Rechtwinkelgeometrie nach § 9 oder eine Ebene in einer räumlichen nach § 10. Dann gilt

Satz 19: Die Gültigkeit des Satzes vom Höhenschnittpunkt ist notwendig und hinreichend dafür, daß die absolute Polarität projektiv ist, d. h. daß sie durch eine quadratische Form über kommutativem Koordinatenkörper vermittelt wird.

(Zum Satz vom Höhenschnittpunkt vgl. auch Baer 2 S. 107 ff.).

Beweis: I. Der Satz vom Höhenschnittpunkt gelte, a, b seien zwei Gerade (s. Fig. 22), A, B ihre Pole. Die absolute Polarität bildet die Geraden durch $P = a \cap b$ auf die Punkte der Geraden $\overline{AB}$ ab und umgekehrt. (Das gilt auch im räumlichen Fall, denn nach Hilfssatz 35 gelten in jeder Ebene einer räumlichen Rechtwinkelgeometrie nach § 10 die ebenen Rechtwinkelaxiome des § 9). Wir setzen voraus, daß a und b nicht aufeinander senkrecht stehen. g sei eine feste Gerade durch A, die nicht durch P geht; h sei eine bewegliche Gerade durch P. Der Pol H von h kann leicht konstruiert werden. Man verbinde nämlich B mit dem Schnittpunkt $S = g \cap h$. Ferner verbinde man die Punkte

$\overline{BS} \cap a$ und $g \cap b$. Die erhaltene Gerade schneidet $\overline{AB}$ in dem gesuchten Pol H. Diese Konstruktion setzt sich aus projektiven Konstruktionen zusammen, nämlich dem Schneiden einer be-

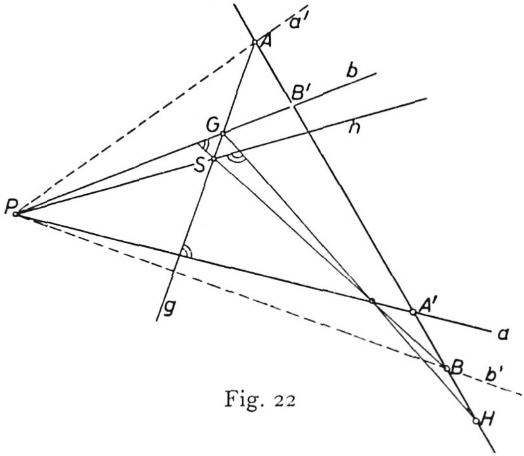

Fig. 22

weglichen Geraden mit einer festen und dem Verbinden eines beweglichen Punktes mit einem festen. Daher ist die absolute Polarität in der gegebenen Ebene projektiv.

Um zu zeigen, daß auch die räumliche Polarität (im Fall $n > 2$) projektiv ist, fassen wir a, b und h in Fig. 22 jetzt als Schnitte der Figurenebene α mit drei Hyperebenen $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{H}$ auf, deren Pole A, B, H seien. H liegt erstens auf $\overline{AB}$ und zweitens in der Polarhypergeraden $\mathfrak{h}$ von h. $\mathfrak{h}$ enthält $\overline{AB}$ nicht ganz, nämlich den Schnittpunkt mit h nicht. Also ist $H = \overline{AB} \cap \mathfrak{h}$. Findet man also *eine* $\overline{AB}$ schneidende, auf h senkrechte Gerade, so ist H ihr Schnittpunkt mit $\overline{AB}$. Daher führt die eben angegebene Konstruktion auch im Raum zum Pol H von $\mathfrak{H}$ und die absolute Polarität ist projektiv. Nach Satz 14 wird sie durch eine quadratische Form vermittelt, die im Fall $n > 2$ die Null nicht darstellen darf.

II. Die absolute Polarität sei projektiv. Dann gilt der Satz des Pappos und der (übliche) Fundamentalsatz der projektiven Geometrie. Es gibt nichtisotrope Geraden; denn wären andernfalls p, q zwei senkrechte Gerade, so wäre ihr Schnittpunkt ihr gemeinsamer Pol im Widerspruch zu Hilfssatz 34. Die ebene Betrachtung genügt hier.

Wir betrachten wieder die nicht aufeinander senkrechten Geraden a und b der Figur 22, wobei a nicht isotrop sei; sowie die auf ihnen senkrechten, dem von ihnen erzeugten Büschel angehörigen Geraden a', b' mit den Polen A', B'. Mindestens drei der Geraden a, b, a', b' sind verschieden. Die absolute Polarität bildet das Büschel durch P so auf die Gerade $\overline{AB}$ ab, daß die Geraden a, b, a', b' in ihre Pole A, B, $A' \in a$, $B' \in b$ übergehen. Die im ersten Teil des Beweises angegebene Konstruktion leistet offenbar dasselbe, gibt also nach dem Fundamentalsatz die absolute Polarität wieder, d. h. der Satz von Höhenschnittpunkt gilt.

§ 12. Senkrechte Hyperebenen im projektiven Raum

Hyperebenen seien in diesem Paragraphen mit kleinen lateinischen Buchstaben bezeichnet.

Gegeben sei ein projektiver Raum der endlichen Dimension $n > 2$, etwa durch die Hyperebenenaxiome des § 7. Zwischen Hyperebenen a, b, ... sei durch die folgenden Axiome eine Beziehung des Senkrechtstehens implizit definiert:

Axiom R_h I: *Aus* $a \perp b$ *folgt* $b \perp a$.

Axiom R_h II: *Ist* $a \perp b$, $a \perp c$, $d \supseteqq b \cap c$, *so ist* $a \perp d$.

Axiom R_h III: a, $b \neq a$, c *seien Hyperebenen. Dann gibt es eine* $a \cap b$ *enthaltende Hyperebene* d, *die senkrecht auf* c *steht.*

Axiom R_h IV: *Keine Hyperebene steht auf allen Hyperebenen senkrecht.*

Folgerungen: Aus R_h II folgt, daß die Menge $\mathfrak{M}$ der zu einer Hyperebene a senkrechten Hyperebenen mit je zwei Hyperebenen das von ihnen erzeugte Büschel enthält. $\mathfrak{M}$ ist also ein *Hyperebenenbündel*, d. h. ein Unterraum des dualen Raumes, und zwar ein echter wegen R_h IV. $\mathfrak{M}$ enthält nach R_h III aus jedem Büschel mindestens eine Hyperebene, ist also von der Dimension $n - 1$; d. h. $\mathfrak{M}$ besteht aus allen und nur den Hyperebenen durch einen wohlbestimmten Punkt A. A heiße der *Pol* der Hyperebene a. Wegen R_h I haben wir damit

Hilfssatz 42: Jede Hyperebene hat einen eindeutig bestimmten Pol. Liegt der Pol A der Hyperebene a in der Hyperebene b, so liegt der Pol B von b in a.

Hilfssatz 43: Ordnet man jeder Hyperebene ihren Pol zu, so erhält man eine eindeutige und geradentreue Abbildung des dualen Raumes in den gegebenen Raum.

Beweis: a und b seien verschiedene Hyperebenen mit den Polen A, B. c sei eine Hyperebene durch $a \cap b$. Der Pol H jeder Hyperebene h durch A und B liegt in $a \cap b$, also in c; d. h. der Pol C von c liegt in h; weil h ganz beliebig war, also in $\overline{AB}$, w. z. b. w. Das gilt auch für $A = B$; d. h. ist ein Punkt Pol zweier Hyperebenen, so ist er Pol jeder Hyperebene des von ihnen erzeugten Büschels.

Hilfssatz 44: Verschiedene Hyperebenen haben verschiedene Pole.

Beweis: Wir nehmen an, der Satz sei falsch, d. h. es gebe zwei Hyperebenen b, c mit dem gemeinsamen Pol P. P ist Pol jeder Hyperebene des von b und c erzeugten Büschels. Eine nicht durch P gehende Hyperebene steht auf keiner Hyperebene dieses Büschels senkrecht, weil sie sonst doch durch P gehen müßte. Das widerspricht Axiom R_h III, d. h. unsere Annahme trifft nicht zu.

Hilfssatz 45: Zu jedem Punkt A gibt es genau eine Hyperebene, deren Pol er ist. Sie heiße seine Polarhyperebene oder kurz Polare.

Beweis: Die Hyperebenen durch A bilden einen Unterraum der Dimension $n - 1$ des dualen Raumes; ihre Pole liegen daher nach Hilfssatz 43 in (mindestens) einer Hyperebene a. Der Pol von a liegt nach Hilfssatz 42 in jeder Hyperebene durch A, ist also mit A identisch. Nach Hilfssatz 44 kann es keine zweite Hyperebene dieser Eigenschaft geben. Es gelten also die drei Polaritätspostulate und damit nach § 8

Satz 20: Ein projektiver Raum, in dem die Rechtwinkelaxiome R_h I bis R_h IV gelten, läßt sich analytisch durch homogene Koordinaten mit einer absoluten Polarität beschreiben. Senkrechte Hyperebenen x^i, y^i sind gekennzeichnet durch $x_i y^i = y_i x^i = 0$.

Offenbar sind auch umgekehrt in jeder analytischen, projektiven Geometrie mit absoluter Polarität die Rechtwinkelaxiome dieses Paragraphen erfüllt.

Wir ändern unser Axiomensystem nun ab, indem wir das Axiom R_h IV ersetzen durch

Axiom R_h IV′: *Es gibt genau eine Hyperebene u, die auf jeder Hyperebene senkrecht steht.*

Wir bezeichnen die Hyperebene u, sowie die in ihr liegenden Punkte, Geraden usw. als *uneigentlich.*

Hilfssatz 46: Jede eigentliche Hyperebene hat genau einen Pol, d. h. einen Punkt, durch den alle und nur die auf der gegebenen senkrechten Hyperebenen gehen. Der Pol jeder eigentlichen Hyperebene ist uneigentlich.

Der einfache Beweis verläuft wie bei Hilfssatz 42.

Zwei Hyperebenen, die eine uneigentliche Hypergerade gemein haben, heißen *parallel.*

Hilfssatz 47: Sind a, b, c eigentliche Hyperebenen und ist $a \perp b$, $c \parallel a$, so ist $c \perp b$.

Beweis: Nach Voraussetzung enthält a den Pol B von b. Im Fall $c = a$ ist die Behauptung trivial, andernfalls ist $a \cap c = a \cap u = c \cap u$. Daher ist $B \in c \cap u$, also $B \in c$, d. h. $b \perp c$ w. z. b. w.

Dieser Hilfssatz ermöglicht die Definition der *Orthogonalität uneigentlicher Hypergeraden* (wir bezeichnen solche mit kleinen griechischen Buchstaben).

Definition 19: Zwei uneigentliche Hypergeraden α, β heißen *aufeinander senkrecht*, wenn es eigentliche Hyperebenen a, b mit $u \cap a = \alpha$, $u \cap b = \beta$, $a \perp b$ gibt.

Nach Hilfssatz 47 ist diese Definition unabhängig von der Wahl der Hyperebenen a, b durch α bzw. β.

Hilfssatz 48: Für uneigentliche Hypergeraden α, β, γ, δ gelten folgende Tatsachen

I. *Aus* $\alpha \perp \beta$ *folgt* $\beta \perp \alpha$.

II. *Ist* $\alpha \perp \beta$, $\alpha \perp \gamma$, $\delta \supseteqq \beta \cap \gamma$, *so ist* $\alpha \perp \delta$.

III. α, $\beta \neq \alpha, \gamma$ *seien uneigentliche Hypergeraden. Dann gibt es eine $\alpha \cap \beta$ enthaltende uneigentliche Hypergerade δ, die auf γ senkrecht steht.*

IV. *Zu jeder uneigentlichen Hypergeraden gibt es eine nicht auf ihr senkrechte uneigentliche Hypergerade.*

Die Beweise zu I und IV folgen aus den Axiomen und Definition 19.

Um II zu beweisen, betrachten wir eigentliche Hyperebenen a, b, c mit $a \cap u = \alpha$, $b \cap u = \beta$, $c \cap u = \gamma$ und $a \perp b$, $a \perp c$. Den trivialen Fall $\beta = \gamma$ schließen wir aus. Der Unterraum $\overline{(b \cap c)\,\delta}$ ist eine Hyperebene d, denn es ist $(b \cap c) \cap \delta = \beta \cap \gamma$, also dim $(b \cap c \cap \delta = n - 3$; ferner sind $b \cap c$ und δ Hypergeraden, also von der Dimension $n - 2$. Nach der Dimensionsformel (2) des § 3 ist also dim $\overline{(b \cap c)\,\delta} = n - 1$. Nach Axiom R_h II ist $a \perp d$. d enthält einen eigentlichen Punkt, weil b und c wegen $\beta \neq \gamma$ einen eigentlichen Punkt gemein haben. Daher ist $d \cap u$ eine Hypergerade, die δ enthält, also mit δ identisch. Folglich ist $\alpha \perp \delta$, w. z. b. w.

Um III zu beweisen, nehmen wir an, a, b, c seien drei eigentliche Hyperebenen durch α, β, γ und a und b seien nicht parallel. Es gibt eine Hyperebene $d \supset a \cap b$ mit $d \perp c$. Sie ist eigentlich, weil $a \cap b$ einen eigentlichen Punkt enthält. Setzt man $\delta = d \cap u$, so ist $\delta \perp \gamma$, w. z. b. w.

Die uneigentliche Hyperebene ist also ein projektiver Raum, in dem alle Axiome R_h I bis R_h IV gelten und wir haben daher

Satz 21: Jede projektive Geometrie, die den Hyperebenenaxiomen des § 7 und den Rechtwinkelaxiomen R_h I, R_h II, R_h III, R_h IV *genügt, ist eine analytische projektive Geometrie mit ausgezeichneter uneigentlicher Hyperebene und einer absoluten Polarität in dieser.*

Die uneigentliche Hyperebene habe wie üblich die Koordinaten $(1, 0, \ldots, 0)$. Betrachtet man sie als projektiven Raum, so sind in ihr $x_1, \ldots, x_n$ homogene Punktkoordinaten, $x^1, \ldots, x^n$ homogene Hyperebenenkoordinaten. Die absolute Polarität hat die Form

$$x^i = g^{ik}\bar{x}_k \quad \text{oder aufgelöst} \quad x_k = \bar{x}^i g_{ki},$$

wobei von 1 bis n zu summieren ist und die Formeln (31) bis (33) gelten. (Überstreichen bedeutet die Anwendung des Antiautomorphismus $\bar{A}$).

Im eigentlichen (affinen) Raum sind (unter der Annahme $x_0 = 1$) $x_1, \ldots, x_n$ inhomogene Punktkoordinaten. Zwei Vektoren x_i, y_i, $(i = 1, \ldots, n)$ wird man als aufeinander senkrecht bezeichnen, wenn der eine einer O enthaltenden Hyperebene (die also die erste Koordinate $x^0 = 0$ hat) parallel ist, deren Pol der zur Richtung des anderen gehörige uneigentliche Punkt ist, d. h. wenn

$$x_i y^i = x_i g^{ik} \bar{y}_k = 0 \tag{34}$$ ist.

Das ist die sinngemäße Verallgemeinerung der üblichen Bedingung, daß das Skalarprodukt zweier Vektoren verschwindet.

Offenbar verschwindet mit $x_i y^i$ auch $y_i x^i$.

Als verallgemeinerte Ähnlichkeitsgruppe kann man die Gruppe aller die uneigentliche Hyperebene und alle rechten Winkel fest lassenden Kollineationen, als verallgemeinerte Bewegungsgruppe die Gruppe der die uneigentliche Hyperebene und alle Skalarprodukte fest lassenden Kollineationen auffassen.

Literaturhinweise

E. Artin: Coordinates in affine geometry, Reports of a Math. Colloquium, Univ. of Notre Dame (2) 2 (1940) S. 15–20.

F. Bachmann: Verschiedene Arbeiten über die Grundlagen der Geometrie, insbes. Math. Ann. 113 (1936) S. 424–451 und S. 748–765; Math. Ann. 117 (1940) S. 197–234.

R. Baer: 1. Linear algebra and projective geometry, New York 1952.
2. The fundamental theorems of elementary geometry, Trans. Am. Math. Soc. 56 (1944) S. 94–129.

L. Bieberbach: Einleitung in die höhere Geometrie, Leipzig 1933.

G. Birkhoff und J. v. Neumann: The logic of quantum mechanics, Ann. of Math. 37 (1936) S. 823–843.

N. Bourbaki: Éléments de mathématique II/2, Algèbre linéaire, Paris 1947.

É. Cartan: Leçons sur la géométrie projective complexe, Paris 1931.

M. Eichler: Quadratische Formen und orthogonale Gruppen, Berlin-Göttingen-Heidelberg 1952.

G. Hessenberg: Grundlagen der Geometrie, Berlin u. Leipzig 1930.

J. Hjelmslev: Neue Begründung der ebenen Geometrie, Math. Ann. 64 (1907) S. 449–472.

D. Hilbert: Grundlagen der Geometrie, VII. Aufl., Leipzig 1930.

B. W. Jones: The arithmetic theory of quadratic forms, New York 1950.

F. Klein: Vorlesungen über nichteuklidische Geometrie, Berlin 1928.

G. Köthe: Unendliche Abelsche Gruppen und Grundlagen der Geometrie Jber. DMV 49 (1939) S. 97–113.

H. Lenz: Herleitung von Dimensionsformeln der projektiven Geometrie aus eingeschränkten Verknüpfungsaxiomen, Sitz-Ber. Bayer. Akad. Wiss. 1953, S. 81–87.

K. Menger: New foundations of projective and affine geometry, Ann. of Math. 37 (1936) S. 456–482.

G. Pickert: 1. Einführung in die höhere Algebra, Göttingen 1951.
2. Analytische Geometrie, Leipzig 1953.

H. Prüfer: Projektive Geometrie, Leipzig 1939.

K. Reidemeister: Vorlesungen über Grundlagen der Geometrie, Berlin 1930.

H. Schiek: Mengen mit affiner Anordnung, Arch. d. Math. 1 (1948/49), S. 473–479.

W. Schwan: Gruppentheorie und Streckenrechnung, Math. Z. 3 (1919) S. 11 ff.

B. Segre: Lezioni di geometria moderna, Bologna 1948.

O. Veblen u. J. W. Young: Projective geometry, Boston 1910/1918.

B. L. v. d. Waerden: 1. Moderne Algebra I, II, Berlin 1950 bzw. 1940.
2. Einführung in die algebraische Geometrie, Berlin 1939.

E. Witt: Theorie der quadratischen Formen in beliebigen Körpern, Journ. f. Math. 176 (1937) S. 31–44.