Sitzungsberichte

der

mathematisch-naturwissenschaftlichen

Klasse

der

Bayerischen Akademie der Wissenschaften

zu München

Jahrgang 1953

München 1954

Verlag der Bayerischen Akademie der Wissenschaften

In Kommission bei der C. H. Beck'schen Verlagsbuchhandlung

Aus Gesprächen mit Gustav Herglotz

Von **Heinrich Tietze** in München

Vorgelegt am 3. Juli 1953.

Im engen Rahmen eines Nachrufs[1] auf den heimgegangenen Freund habe ich davon gesprochen, daß schwerlich feststellbar ist, wieviel an gelegentlich gesprächsweise geäußerten Gedanken, an Bearbeitungen einzelner Probleme oder an vereinfachten Beweisdarstellungen man ihm verdankt. Zu den l. c. erwähnten Beispielen seien hier zwei weitere angeführt.

1. Es ist bekannt, daß für jede abgeschlossene beschränkte Punktmenge M der Ebene aus der Eigenschaft a), konvex zu sein (d. h. mit je zwei Punkten deren Verbindungsstrecke zu enthalten), die Eigenschaft b) folgt, daß durch jeden ihrer Randpunkte eine Stützgerade g geht (derart daß auf einer Seite von g kein Punkt von M liegt); desgleichen umgekehrt a) aus b). Auf die Frage, die ich mir, von anschaulichen Betrachtungen ausgehend, einmal vorlegte, ob für zusammenhängende Mengen M die Eigenschaft a) auch gefolgert werden könne aus der (gegenüber b) schwächeren) Eigenschaft c), daß in jedem Randpunkt A von M eine Stützstrecke s vorhanden ist (derart daß A der Mittelpunkt von s ist, und innerhalb des Kreises um A über s als Durchmesser auf einer der Seiten von s kein Punkt von M liegt), ergab sich eine negative Antwort, wie Beispiele[2] zeigten[3]. Als ich da-

[1] Erscheint im Jahrbuch der Bayerischen Akademie der Wissenschaften, 1953.

[2] Sei beispielsweise M die Punktmenge, bestehend aus den Punkten einer Kreisfläche zusammen mit den Punkten einer Strecke, die den Kreis in einem seiner Peripheriepunkte, B, berührt. Andere Beispiele siehe l. c. [3], S. 172, Nr. 4, Beispiel C und l. c. [5], S. 395, Nr. 1, Beispiel 4.

[3] Wohl aber ist die Konvexität gesichert, wenn M die Eigenschaft c) hat und der zusätzlichen Forderung genügt, die abgeschlossene Hülle einer zusammenhängenden offenen Menge zu sein; vgl. Journal für die reine und angewandte Mathematik, 158 (1927); ebenda die Erweiterung auf n Dimensionen.

mals (wohl 1926 oder 1927) Herglotz bei einem seiner Besuche in München von diesen Dingen erzählte, meinte er, es könnte vielleicht sein, daß man auf Konvexität auch schließen könne, wenn man für jeden Randpunkt das Vorhandensein einer Stützstrecke von fester Länge fordert[4]. Diese Vermutung konnte ich dann tatsächlich (unter Verallgemeinerung auf beliebig viele Dimensionen) als richtig erweisen[5]. Ich habe damals l. c. der gesprächsweisen Bemerkung von Herglotz nicht Erwähnung getan, da ich mir dessen bewußt war, daß alle die Probleme, die ihn beschäftigten und deren Klärung er seine Kraft widmete, ungleich tiefer lagen als eine geringfügige Frage, mit der ich mich gerade herumschlug. Ihn in Verbindung mit meiner Frage zu nennen, mochte nach meinem Empfinden eher etwas anmaßlich erscheinen. Als nachher der Fragestellung auch von anderen Seiten ein freundliches Interesse entgegengebracht wurde, bedauerte ich meine vormalige Scheu. Und wenn Herglotz selbst wohl nie gewünscht hätte, von seiner hingeworfenen Vermutung viel Aufhebens zu machen, so war sie doch kennzeichnend für seine Fähigkeit, den Dingen auf den Grund zu sehen.

2. Auf einem Spaziergang in der Umgebung Göttingens erzählte mir Herglotz u. a. von einer Art, die Differenzierbarkeit einer Funktion $f(x)$ an einer Stelle a so zu definieren, daß sich die Regeln des Differenzierens daraus besonders glatt gewinnen lassen; nämlich durch die Möglichkeit einer Darstellung

$$f(x)-f(a)=\varphi(x;\,a)\cdot(x-a), \tag{1}$$

wo $\varphi(x; a)$ eine an der Stelle $x=a$ stetige Funktion von x ist. Wird als Ableitung $f'(a)$ der Wert $\varphi(a; a)=\lim\limits_{x\to a}\varphi(x; a)$ definiert, so deckt sich die Definition inhaltlich mit jener als Differentialquotient $\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$; und Differentiationsregeln wie die für $f_1(x)+f_2(x)$, $f_1(x)\cdot f_2(x)$, $\frac{1}{f(x)}$ fließen aus der üblichen Definition nicht leichter als aus (1). Wesentlich vorzuziehen ist aber (1)

---

[4] In dem in Anm. 2 gegebenen Beispiel sinkt für Punkte der Kreisperipherie, die sich B nähern, die Länge ihrer Stützstrecken unter jede positive Zahl.

[5] Math. Annalen 99 (1928) S. 394–398.

bei Herleitung der „Kettenregel" für eine zusammengesetzte Funktion $F(x) = g(f(x))$. Diese Regel ergibt sich nämlich aus (1) und der analog durch

$$(2) \qquad g(u) - g(b) = \psi(u; b) \cdot (u - b)$$

nebst

$$g'(b) = \psi(b; b) = \lim_{u \to b} \psi(u; b)$$

dargestellten Differenzierbarkeit von $g(u)$ an der Stelle $b = f(a)$ – u. zw. bloß mittels des Satzes von der Stetigkeit der aus stetigen Funktionen zusammengesetzten Funktionen – sofort gemäß

$$(3) \quad F(x) - F(a) = g(f(x)) - g(f(a)) = \psi(f(x); f(a)) \cdot \varphi(x; a) \cdot (x - a)$$

somit

$$(4) \qquad F'(a) = \psi(f(a); f(a)) \cdot \varphi(a; a) = g'(f(a)) \cdot f'(a);$$

also unter Vermeidung jener beschwerlichen Fallunterscheidung, die mit der Umformung

$$(5) \qquad \frac{F(x) - F(a)}{x - a} = \frac{g(u) - g(b)}{u - b} \cdot \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

verknüpft ist, wenn auch solche Fälle mit berücksichtigt werden sollen, in denen es in jeder Nähe von a Stellen x gibt, wo $f(x)$ den Wert $f(a)$ hat, so daß die Erweiterung des Bruches (5) mit dem (dann null werdenden) Faktor $u - b = f(x) - f(a)$ nicht zulässig ist.

Eine mit (1) gleichwertige Kennzeichnung der Differenzierbarkeit liegt in der Formel

$$(6) \qquad f(x + \xi) - f(x) = f'(x) \cdot \xi + \xi\, \rho(\xi)$$

mit der Festsetzung $\rho(0) = 0 = \lim_{\xi \to 0} \rho(\xi)$, wie sie O. Stolz, l. c.[6], p. 28, gibt, ohne sie jedoch für die Herleitung der Kettenregel für zusammengesetzte Funktionen heranzuziehen, für die er vielmehr

---

[6] A. Genocchi-G. Peano, Calcolo differenziale e principii di calcolo integrale, Torino 1884; s. die deutsche Ausgabe von Bohlmann und Schepp, 1899, Nr. 37, p. 37, 38; O. Stolz, Grundzüge der Differential- und Integralrechnung, Bd. I (1893), Nr. 14, p. 45, 46. Vgl. dazu etwa auch G. Kowalewski, Einführung in die Infinitesimalrechnung, Aus Natur- und Geisteswelt, Nr. 197 (1908), § 32.

nach Peano die erwähnte Fallunterscheidung macht[6]. Vielleicht hat Herglotz die Darstellung (1) aus der Stolz'schen – unter Zusammendrängung auf einen noch einfacheren Kern – entnommen, wobei es sehr wohl möglich ist, daß die gleiche Wendung auch in manchen anderen Vorlesungen oder Lehrbüchern vorgenommen wurde[7]. Seit er mir nun von dieser Darstellung erzählt hatte, habe ich in Vorlesungen, sobald die zusammengesetzten Funktionen darankamen, zu der üblichen Definition der Differenzierbarkeit, unter Berufung auf Herglotz als Quelle, auch jene durch die Darstellung (1) gebracht, die ja auch für die vollständige Differenzierbarkeit von Funktionen $f(x) = f(x_1, \ldots, x_n)$ von mehreren Veränderlichen brauchbar ist[8], wenn, dabei $f(a_1, \ldots, a_n) = f(a)$ gesetzt, die rechte Seite von (1) durch $\sum \varphi_{(\nu)}(x; a)\;(x_\nu - a_\nu)$ ersetzt wird[9] und die $\varphi_{(\nu)}(x; a) = \varphi_{(\nu)}(x_1, \ldots, x_n; a_1, \ldots, a_n)$ als an der Stelle $(x) = (a)$, d. h. $(x_1, \ldots, x_n) = (a_1, \ldots, a_n)$ stetige Funktionen von (x) genommen werden, die freilich, bei gegebener Funktion $f(x)$, für $n > 1$ nicht eindeutig bestimmt sind[10].

---

[7] In der Tat hat mir Herr Perron dieser Tage erzählt, daß er in seinen Vorlesungen seit längerer Zeit im Hinblick auf die Herleitung der Kettenregel ebenso vorgegangen sei, und er hat mich nachher noch hingewiesen auf Salvatore Pincherle, Lezioni di Calcolo infinitesimale, t. I, 3. ed., Bologna 1926 (prima ed. 1915), wo die Kettenregel zunächst (No. 151, p. 132) mit der Umformung (5) hergeleitet wird, dann aber (p. 133) gestützt auf die Kennzeichnung der Differenzierbarkeit in der Gestalt (6), bei analoger Darstellung (No. 234, p. 216; No. 246, p. 228, 229) für Funktionen mehrerer Veränderlicher. Vgl. auch J. Lense, Vorlesungen über höhere Mathematik (1948) p. 38.

[8] Bei der aus bekannten Ursachen entstandenen Schwierigkeit, eine annähernd vollständige Einsicht in die einschlägigen Publikationen zu gewinnen, vermag ich nicht zu sagen, welche Stellen in der Literatur hier am passendsten anzuführen wären. Es sei aus älteren Werken etwa hingewiesen auf De la Vallée Poussin, Cours d'Analyse infinitésimale, t. I, 3. éd. (1914) p. 140, 5. éd. (1923), p. 110–114; doch wird dort bei der Kettenregel nicht der unten (Anm. 10) hervorgehobene Standpunkt eingenommen, daß die Differenzierbarkeitsvoraussetzungen jeweils nur für eine Stelle gefordert werden müssen. Das Werk W. H. Young, The fundamental theorems of Differential Calculus, Cambridge 1910, das De la Vallée Poussin l. c., 3. éd., p. V, zitiert, konnte ich nicht einsehen.

[9] Eingeklammerte Indizes sollen, ebenso wie in Anm. 10, die Nummer der Variablen angeben, auf die sich eine Differentiation bezieht.

[10] Ebenso wie für die Gültigkeit der Kettenregel (4) die Differenzierbarkeit von $f(x)$ bzw. $g(u)$ nur an der einen Stelle $x = a$ bzw. $u = b$ erforderlich ist

(an allen anderen Stellen können die Funktionen sogar unstetig sein), so ist das Entsprechende zu sagen über die analoge Kettenregel für Funktionen mehrerer Veränderlicher, die aus vollständig differenzierbaren Funktionen zusammengesetzt sind. Aus

$$f_\mu(x)-f_\mu(a) = \sum_\nu \varphi_{\mu(\nu)}(x;\,a)\,(x_\nu-a_\nu)\,,$$

$$g(u)-g(b) = \sum_\mu \psi_{(\mu)}(u;\,b)\,(u_\mu-b_\mu)$$

mit $u_\mu = f_\mu(x), b_\mu = f_\mu(a)$ ergibt sich ja für $F(x) = g(f(x)) = g(f_1(x), \ldots, f_m(x))$

$$F(x)-F(a) = \sum_\nu \Phi_{(\nu)}(x;\,a)\,(x_\nu-a_\nu) \quad \text{mit}$$

$$\Phi_{(\nu)}(x;\,a) = \sum_\mu \psi_{(\mu)}(f(x));\,b)\,\varphi_{\mu(\nu)}(x;\,a)\,,$$

und die Stetigkeit der $\varphi_{\mu(\nu)}(x;a)$ bzw. der $\psi_{(\mu)}(u;b)$ ist nur an der einen Stelle $(x) = (a)$ bzw. $(u) = (b)$ erforderlich, um daraus die zu (4) analoge Regel

$$F'_{(\nu)}(a) = \lim_{x\to a} \Phi_{(\nu)}(x;a) = \sum_\mu \psi_{(\mu)}(b;b)\,\varphi_{\mu(\nu)}(a;a) = \sum_\mu g'_{(\mu)}(f(a))\,f'_{\mu(\nu)}(a)$$

und die vollständige Differenzierbarkeit von $F(x)$ an der Stelle $(x) = (a)$ zu gewinnen. Ersichtlich sind also weitergehende Voraussetzungen über Vorhandensein von Ableitungen an anderen Stellen (oder außerdem Voraussetzungen über Stetigkeit dieser Ableitungen), wie sie häufig gemacht werden, entbehrlich. Und man kann beispielsweise, indem man irgendwelche Werte $f_\mu(a) = b_\mu$, $g(b) = c$ sowie lineare Funktionen $l_\mu(x) = b_\mu + \sum_\nu b_{\mu\nu}(x_\nu - a_\nu)$, $k(u) = c + \sum_\mu c_\mu(u - b_\mu)$ vorschreibt, an allen Stellen (x) bzw. (u), wo alle x_ν bzw. alle u_μ rational sind, die $f_\mu(x)$ gleich $l_\mu(x) +$ einer definiten quadratischen Form der $|x_\nu - a_\nu|$, ferner die Funktion $g(u)$ gleich $k(u) +$ einer definiten quadratischen Form der $|u_\mu - b_\mu|$ nehmen, an allen anderen Stellen (x) bzw. (u) aber $f_\mu(x) = l_\mu(x)$, $g(u) = k(u)$ setzen, sodaß diese Funktionen an allen von $(x) = (a)$ bzw. $(u) = (b)$ verschiedenen Stellen unstetig werden.

Vgl. noch „über nur lokal definierte Ableitungen beliebiger Ordnung“, für die eine an (6) anschließende Definition gegeben wird, die Mitteilung in diesen Sitzungsber., Bericht über die Sitzung vom 3. Juli 1953, Punkt 3.