Sitzungsberichte

der

mathematisch-naturwissenschaftlichen Klasse

der

Bayerischen Akademie der Wissenschaften zu München

Jahrgang 1952

München 1953

Verlag der Bayerischen Akademie der Wissenschaften

In Kommission bei der C. H. Beck'schen Verlagsbuchhandlung

Über Verallgemeinerungen der Schwarzschen Polygonabbildung

Von **Hanfried Lenz** in München

Vorgelegt von Herrn J. Lense am 1. Februar 1952

Mit einer Figurentafel

Einleitung

Ziel dieser Arbeit ist die Ausdehnung der Schwarzschen Ergebnisse über die konforme Abbildung einfach zusammenhängender Geraden- und Kreisbogenpolygone (Schwarz 1, 2), die seither auch manche physikalische und technische Anwendungen gefunden haben, auf allgemeinere Bereiche, insbesondere mehrfach zusammenhängende Polygonbereiche. Der Schlüssel zur Lösung des Problems liegt darin, daß man das gegebene Polygon auf ein solches abbilden kann, dessen sämtliche Seiten über der reellen Achse liegen, das aber i. allg. natürlich nicht mehr schlicht sein kann. Ein solches Polygon ist Hälfte einer symmetrischen Riemannschen Fläche. Diesen Gedanken hat schon F. Schottky in seiner Dissertation ausgesprochen und angewendet. Die allgemeinen Prinzipien der vorliegenden Arbeit sind bei Schottky und später in der Theorie der automorphen Funktionen zu finden, wenn man auch beim Lesen der Schottkyschen Dissertation den Zusammenhang mit dem Schwarzschen Ansatz zunächst nicht erkennt. Daß Schottky diesen Zusammenhang kannte, geht jedoch eindeutig aus einer beiläufigen Bemerkung in einer zu anderen Zwecken geschriebenen Arbeit (Sitzungsber. der Preuß. Akad. der Wiss. vom 2. 11. 1922, S. 414) hervor. Thiry hat den Schwarzschen Ansatz auf zweifach zusammenhängende Polygone ausgedehnt[1]. Die späteren Ergebnisse von Achiezer und Komatu (Achiezer 1, Komatu 1) über

[1] (Zusatz bei der Korrektur).

die konforme Abbildung von zweifach zusammenhängenden Polygonen scheinen von ihren Verfassern ohne Kenntnis der Schottkyschen Gedanken – die ja die Abbildungsfunktionen beliebiger Polygongebiete endlichen Zusammenhangs liefern, allerdings mit einer Anzahl schwierig zu bestimmender Parameter behaftet – gefunden worden zu sein. Ein weiterer für die konforme Abbildung von Polygonen wichtiger Gedanke ist die Einteilung der Polygone nach der Gruppe linearer Substitutionen, die durch Spiegelungen an den Seiten in gerader Anzahl erzeugt wird und die sich in dem bekannten Kleinschen Werk über die hypergeometrische Funktion (Klein 1 S. 280 ff.) findet; doch scheint auch dieser Gedanke nicht in dem Maß auf Polygonabbildungen angewendet worden zu sein, wie es möglich ist. Die vorliegende Arbeit will den Schwarzschen Ansatz mit Hilfe der erwähnten, bei Schottky und Felix Klein zu findenden Prinzipien auf Geraden- und Kreisbogenpolygone beliebigen endlichen Zusammenhangs ausdehnen und damit die Abbildungsprobleme unter einem einheitlichen Gesichtspunkt zusammenstellen und ordnen. Den Herren Professoren Dr. Egon Ullrich und Dr. Josef Heinhold danke ich für wertvolle Literaturhinweise.

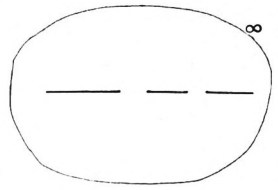
§ 1. Polygone und ihre Gruppen

Definition 1: Ein Teilbereich einer geschlossenen Riemannschen Fläche heiße Kreispolygon bzw. Polygon, wenn sein Rand aus mindestens einem, höchstens endlich vielen Kreisbogen (einschl. Geradenstücken) bzw. Geradenstücken besteht.

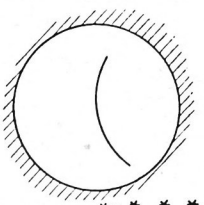
Ein Kreispolygon kann also innere Verzweigungspunkte und Unendlichkeitsstellen enthalten.

Definition 2: Spiegelt man ein Kreispolygon $\mathfrak{P}$ hintereinander an zwei verschiedenen Randbogen, so erfährt es eine lineare Substitution. Diese Substitutionen erzeugen eine Gruppe, die Gruppe des Polygons. Ist diese Gruppe Untergruppe einer anderen Gruppe $\mathfrak{G}$, so heißt $\mathfrak{P}$ ein Kreispolygon zur Gruppe $\mathfrak{G}$.

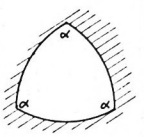
Definition 3: Ein Kreispolygon, dessen Gruppe nur aus der identischen Substitution besteht, d. h. dessen sämtliche Rand-



Alle Gruppen außer Nr. 9a 10a-e.
Fig. 1.

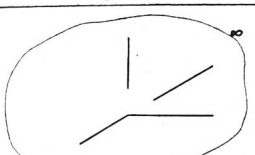


Nr. 2, 3–6, 7a*, 8*, 10*, 11*, 12.
Fig. 2

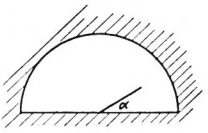


α	Nr.
$\frac{1}{2}, \frac{3}{2}$	3, 5
$\frac{2}{3}, \frac{4}{3}$	4, 5
$\frac{2}{5}, \frac{8}{5}$	6
$\frac{1}{3}, \frac{5}{3}$*	10, 11
stets	12

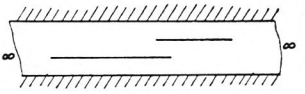
Fig. 3.



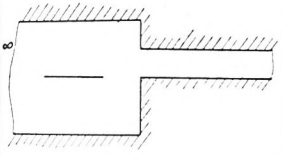
Nr. 2, 3, 7a, 8, 10, 11, 12.
Fig. 4.



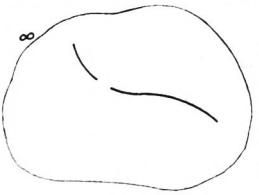
Nr. 3 (falls α rational), 8, 12.
Fig. 5.



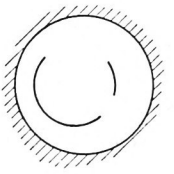
Nr. 9, 9a, 10, 10a, 11, 12.
Fig. 6.



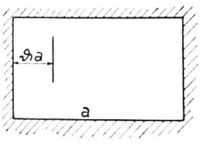
Nr. 10, 10a, 11, 12.
Fig. 7.



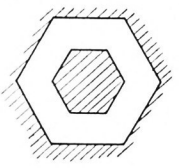
Nr. 9*, 10*, 11*, 12.
Fig. 8.



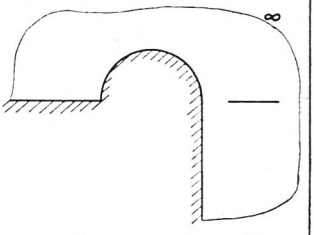
Nr. 7b*, 8*, 12.
Fig. 9.



Nr. 10, 10b (falls ϑ rational), 11, 12.
Fig. 10.



Nr. 10, 10c, 10e, 11, 12.
Fig. 11.



Nr. 10*, 11*, 12.
Fig. 12.

* nach linearer Hilfsabbildung

Fig. 1–12

Beispiele von Polygonen zu den Gruppen Nr. 1–12

bögen über einem festen Kreis liegen, heiße eine Riemannsche Halbfläche.

Spiegelt man eine Riemannsche Halbfläche $\mathfrak{H}$ an einer ihrer Seiten, so kommt das Bild $\bar{s}$ jeder Seite s über s selbst zu liegen. Verheftet man jede Seite s mit ihrem Spiegelbild $\bar{s}$, so entsteht eine geschlossene (nach Felix Klein orthosymmetrische) Riemannsche Fläche $\mathfrak{F}$. Wir nennen diesen Prozeß Verdoppelung der Halbfläche $\mathfrak{H}$, $\mathfrak{F}$ die verdoppelte Halbfläche. $\mathfrak{F}$ ist unabhängig davon, an welcher Seite man $\mathfrak{H}$ zuerst gespiegelt hat.

§ 2. Der Schottkysche Abbildungssatz

Wir beschränken uns im folgenden, wenn nichts anderes gesagt wird, auf solche Kreispolygone, die sich umkehrbar eindeutig und konform auf schlichte Bereiche abbilden lassen, setzen also alle vorkommenden Kreispolygone stillschweigend als schlichtartig voraus. Es gilt der im wesentlichen auf Schottky zurückgehende bekannte Satz 1: Jeder schlichte Bereich von endlichem Zusammenhang und ohne punktförmige Randkomponenten läßt sich auf eine Riemannsche Halbfläche abbilden. (In den inneren Unendlichkeitsstellen und Verzweigungspunkten der Riemannschen Halbfläche ist die Abbildung nur noch konform im weiteren Sinn, d. h. bezogen auf eine Ortsuniformisierende der betreffenden Stelle der Halbfläche).

Literaturangaben über Beweise dieses Satzes für den Fall, daß die Riemannsche Halbfläche ein mehrblättriger Kreis ist, findet man in der Übersicht „Naturforschung und Medizin in Deutschland 1939–1946" Band I (Reine Mathematik) Teil I S. 221. Hier soll ein einfacher Beweis angegeben werden, der nur den Inhalt des bekannten Bieberbachschen Göschenbändchens über konforme Abbildung (Bieberbach 1, insbes. § 26) voraussetzt. Für einfachen Zusammenhang des gegebenen Bereichs $\mathfrak{B}$ ist Satz 1 im Riemannschen Abbildungssatz enthalten. $\mathfrak{B}$ sei also ab jetzt mindestens zweifach zusammenhängend. a, b, c seien drei beliebige innere Punkte des Bereiches $\mathfrak{B}$ über der W-Ebene. Wir bilden $\mathfrak{B}$ durch zwei lineare Funktionen w und $\hat{w}$ so linear ab, daß

$$w(a) = \hat{w}(a) = 0; \qquad w(b) = \hat{w}(c) = \infty$$

wird. Die Bildbereiche $\mathfrak{B}_1$, $\hat{\mathfrak{B}}_1$ können wir nach Bieberbach 1 S. 136 ff. so auf Radialschlitzbereiche $\mathfrak{Z}$, $\hat{\mathfrak{Z}}$ über der Z- bzw. $\hat{Z}$-Ebene (mit endlichen, in ihrer Verlängerung durch den Nullpunkt gehenden Schlitzen als Rändern) abbilden, daß

$Z(0) = \hat{Z}(0) = 0$ wird und in der Umgebung von w bzw. $\hat{w} = \infty$

Entwicklungen

$$Z = w + \mathfrak{P}\left(\frac{1}{w}\right) \quad \text{bzw. } \hat{Z} = \hat{w} + \mathfrak{P}\left(\frac{1}{\hat{w}}\right) \quad \text{gelten,}$$

wobei $\mathfrak{P}$ eine Potenzreihe bedeutet. Wenn b und c verschieden sind, so ist die durch $Z = Z(\hat{Z})$ vermittelte Abbildung keine Bewegung, daher ist die Funktion

$$z = \frac{dZ}{Z} : \frac{d\hat{Z}}{\hat{Z}}$$

nicht konstant. Denn für konstantes $z = c$ wäre $Z = c_1 \cdot \hat{Z}^c$, was wegen der regulären Abbildung im Nullpunkt nur mit $c = 1$ möglich ist, d. h. wenn die Abbildung eine Bewegung ist. Andererseits ist z im Innern des Bereiches überall regulär und von Null verschieden mit Ausnahme einer einfachen Nullstelle bei $\hat{Z} = \infty$ und eines einfachen Poles bei $Z = \infty$. Nach dem Spiegelungsprinzip läßt sich Z (also auch z) als Funktion von $\hat{Z}$ an allen Randstellen von $\hat{\mathfrak{Z}}$ mit Ausnahme der Schlitzenden über den Rand fortsetzen. An den Schlitzenden $\hat{Z}_\nu$, ist Z als Funktion der Ortsuniformisierenden $(\hat{Z} - \hat{Z}_\nu)^{1/2}$ regulär, z hat dort also höchstens Pole 1. Ordnung. z ist, wie aus der Abbildung unmittelbar folgt, am Rand von $\hat{\mathfrak{Z}}$ reell, bildet daher $\hat{\mathfrak{Z}}$ – und als Funktion von W betrachtet damit auch $\mathfrak{B}$ – auf einen u. U. verzweigten Bereich endlichen Zusammenhangs mit Rändern über der reellen Achse, d. h. auf eine Riemannsche Halbfläche ab, w. z. b. w.

Die Bedeutung des Schottkyschen Abbildungssatzes beruht darauf, daß alle physikalisch interessanten Potentiale, die auf den Rändern stückweise konstant sind und im Innern gegebene Quellen, Senken oder Dipolsingularitäten haben, nach der Abbildung des Bereiches $\mathfrak{B}$ auf eine Riemannsche Halbfläche zu Realteilen von Abelschen Integralen der verdoppelten Halbfläche werden.

Aus Satz 1 folgt, daß $\mathfrak{B}$ auf unendlich viele Arten auf eine Riemannsche Halbfläche $\mathfrak{H}$ abgebildet werden kann. Denn jede auf den Rändern von $\mathfrak{H}$ reelle algebraische Funktion der verdoppelten Halbfläche bildet $\mathfrak{H}$ wieder auf eine Riemannsche Halbfläche ab. Man kann die Halbfläche $\mathfrak{H}$ auch durch eine reelle algebraische Gleichung definieren. Je 2 solche Gleichungen, die aufeinander konform abbildbare Halbflächen bestimmen, lassen sich durch reelle, birationale Transformationen ineinander überführen, wie gleichfalls Schottky erkannt hat (vgl. Schottky 1, Klein 2).

§ 3. Die Kleinsche Tabelle und der Schwarzsche Ansatz zur Gewinnung von Differentialgleichungen bzw. Integralformeln für die Abbildungsfunktionen

Wir setzen von einem gegebenen Kreispolygon $\mathfrak{P}$ ab jetzt stets voraus, daß es sich auf eine Riemannsche Halbfläche über der z-Ebene mit Rändern über der reellen Achse abbilden lasse. Die verdoppelte Halbfläche sei $\mathfrak{F}$. Nach einem Gedanken von Schwarz wird also die aus Vorder- und Rückseite des Kreispolygons gebildete geschlossene Diederfläche auf $\mathfrak{F}$ abgebildet. $\mathfrak{P}$ sei über der w-Ebene ausgebreitet.

Definition 4: Eine Funktion $J(w, w', w'', w''')$ von w und seinen ersten drei Ableitungen nach z heiße invariante Funktion der Gruppe $\mathfrak{G}$, wenn sie jedes Kreispolygon $\mathfrak{P}$ zur Gruppe $\mathfrak{G}$ auf eine Riemannsche Halbfläche abbildet, sobald z das Kreispolygon $\mathfrak{P}$ auf eine Riemannsche Halbfläche mit Rändern über der reellen Achse abbildet. Grundlegend für den Schwarzschen Ansatz zur Polygonabbildung ist der folgende Satz 2: $\mathfrak{P}$ sei ein Kreispolygon zur Gruppe $\mathfrak{G}$, das durch die Funktion $z(w)$ auf eine Riemannsche Halbfläche $\mathfrak{H}$ abgebildet werde. Dann ist jede invariante Funktion $J\left(w, \frac{dw}{dz}, \ldots\right)$ der Gruppe $\mathfrak{G}$ eine auf der aus $\mathfrak{H}$ durch Verdoppelung hervorgehenden Riemannschen Fläche $\mathfrak{F}$ eindeutige algebraische Funktion.

Denn sie bildet die verdoppelte Halbfläche $\mathfrak{H}$ wieder auf eine verdoppelte Riemannsche Halbfläche ab. Eine konforme Abbildung einer geschlossenen Riemannschen Fläche $\mathfrak{F}$ auf eine

andere wird aber stets durch eine auf $\mathfrak{F}$ eindeutige algebraische Funktion vermittelt.

Wir klassifizieren die Kreispolygone nun nach ihren Gruppen, indem wir eine Reihe besonders wichtiger Gruppen (nach Klein 1 S. 280) herausheben und in einer Tabelle zusammenstellen. Als Winkeleinheit sei, wenn nichts anderes gesagt wird, der gestreckte Winkel gewählt. (Das empfiehlt sich bei Polygonabbildungsproblemen). Um den Anwendungsbereich des Satzes 2 noch etwas zu erweitern, wollen wir für die in der Tabelle gleich anzugebenden Gruppen Nr. 9a, 10a bis 10e den Begriff der invarianten Funktion etwas weiter fassen:

Definition 4a: Eine Funktion von w und den 3 ersten Ableitungen von w nach z, die jedes beschränkte bzw. ganz zwischen zwei parallelen Geraden gelegene Polygon zu einer der Gruppen Nr. 10b bis 10e bzw. Nr. 9a oder 10a auf eine Riemannsche Halbfläche abbildet, sobald z es auf eine Halbfläche mit Rändern über der reellen Achse abbildet, heiße eine invariante Funktion der Gruppe.

Satz 2 gilt bei dieser erweiterten Definition für die entsprechenden Gruppen nur, falls $\mathfrak{P}$ ein beschränktes bzw. zwischen zwei parallelen Geraden gelegenes Polygon ist, doch umfaßt auch dieser Fall so viele Möglichkeiten, daß sich seine Betrachtung lohnen dürfte.

Die folgende Tabelle gibt in der ersten Spalte die laufende Nr., in der zweiten die Gruppe, in der dritten zugehörige Polygone, für die Satz 2 gilt, und in der vierten invariante Funktionen der betr. Gruppen. Man vergleiche auch die Beispiele der Figurentafel.

Zum Beweis der in der Tabelle enthaltenen Aussagen ist zu bemerken:

I. Daß in der dritten Spalte wirklich Kreispolygone zu den Gruppen der zweiten Spalte stehen, ist so leicht zu sehen, daß sich ein näheres Eingehen darauf erübrigt.

II. Daß die Funktionen $J(w, w', \ldots)$ der vierten Spalte invariante Funktionen der betreffenden Gruppen im Sinne der Definitionen 4 und 4a sind, ergibt sich wie folgt:

Für die Gruppen Nr. 3 bis Nr. 6, 9a und 10a bis 10e ist $J(w, w' \ldots)$ eine Funktion, die das Elementardreieck bzw. -rechteck der betreffenden Einteilung der vollen bzw. punktierten Ebene auf die Halbebene (bzw. eine Riemannsche Halbfläche)

Nr.	Gruppe, erzeugende Substitutionen	zugehörige Kreispolygone	Invariante Funktion $J(w, w', w'', w''')$
1	Identität	Riemannsche Halbflächen	w
2	Drehungsgruppe (Kreisteilungsgruppe) $Sw = w \cdot e^{2\pi i/n}$	Radialschlitzbereiche (alle Seiten liegen auf Strahlen durch den Ursprung) mit rationalen Winkeln zwischen den u. U. verlängerten Seiten. (Alle Winkel sind Vielfache von $1/n$).	w^n
3	Diedergruppe $S_1 w = w \cdot e^{2\pi i/n}$ $S_2 = w^{-1}$	Alle Polygonseiten liegen über Strahlen durch o mit rationalen Winkeln und dem Einheitskreis.	$w^n + w^{-n}$
4	Tetraedergruppe	Alle Polygonseiten liegen über den 6 bzw. 9 bzw. 15 Symmetriekreisen der Tetraeder- bzw. Oktaeder- bzw. Ikosaederteilung der Zahlenkugel.	Rationale Funktion vom 12. bzw. 24. bzw. 60. Grade. (Klein 1,3, Schwarz 2).
5	Oktaedergruppe		
6	Ikosaedergruppe		
7	Gruppe der o fest lassenden Drehstreckungen.		$\frac{w'}{w}$
7a	Gruppe aller Drehungen um o $Sw = w \cdot e^{\varphi i}$	Die Polygonseiten liegen auf beliebigen Geraden durch o.	$\frac{w'}{w}$
7b	Gruppe aller o fest lassenden Strekkungen. $Sw = A \cdot w,\ A > 0$	Die Polygonseiten liegen auf Kreisen um o.	$\frac{w'}{w}$
8	Erweiterte Diedergruppe, zusammengesetzt aus Spiegelungen an Geraden durch o und Kreisen um o.	Die Polygonseiten liegen auf Geraden durch o und Kreisen um o.	$\left(\frac{w'}{w}\right)^2$
9	Schiebungs- oder Translationsgruppe $Sw = w + \text{const.}$	Parallelschlitzbereiche (alle Seiten liegen über parallelen Geraden).	w'

Nr.	Gruppe, erzeugende Substitutionen	zugehörige Kreispolygone	Invariante Funktion $J(w, w', w'', w''')$
9a	Zyklische Schiebungsgruppe $Sw = w + 2n \cdot d$, $d > 0$	Parallelschlitzbereich zwischen zwei vertikalen Geraden mit kommensurablen Abständen zwischen den Seiten. (Alle Abstände sind Vielfache von d).	$e^{\pi i w/d}$
10	Bewegungsgruppe mit rationalen Drehwinkeln	Polygone mit rationalen Winkeln zwischen allen (u. U. verlängerten) Seiten. (Alle Winkel seien Vielfache von $1/n$).	$(w')^n$
10a	Gruppe des Halbstreifens $S_1 w = w + 2nd$ $S_2 w = -w$	Alle Polygonseiten liegen entweder über der reellen Achse oder über einer Parallelen zur imaginären Achse im Abstand kd mit ganzzahligem k.	$\cos \frac{\pi w}{d}$
10b	Gruppe des Rechtecks $S_1 w = w + 2ma$ $S_2 w = w + 2nbi$ $S_3 w = -w$	Beschränkte Polygone, deren Seiten über dem Rechteckgitter mit dem horizontalen Gitterabstand a und dem vertikalen Gitterabstand bi liegen.	Jede elliptische Funktion, die das Elementarrechteck des Gitters mit den Ekken 0, a, $a+bi$, bi auf die Halbebene (allgemeiner eine Riemannsche Halbfläche) abbildet.
10c 10d 10e	Gruppen der Dreiecke mit den Winkeln $(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3})$, $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{4})$, $(\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{6})$, (Elementardreiecke)	Beschränkte Polygone, deren Seiten über Geraden liegen, die aus den Seiten des Elementardreiecks durch wiederholte Spiegelung an diesen Seiten entstehen. (Klein 1 S. 289)	Jede (elliptische) Funktion, die das Elementardreieck (s. zweite Spalte) auf die Halbebene (allgemeiner eine Riemannsche Halbfläche) abbildet.
11	Allgemeine Bewegungsgruppe.	Beliebige Geradenpolygone.	$\frac{w''}{w'}$
12	Gruppe aller linearen Substitutionen.	Beliebige Kreispolygone.	$[w]_z = \left(\frac{w''}{w'}\right)' - \frac{1}{2}\left(\frac{w''}{w'}\right)^2$ (Schwarzsche Ableitung, vgl. Schwarz 2, Klein 1 S. 140).

abbildet. Daher bildet J nach dem Spiegelungsprinzip auch das gegebene Polygon $\mathfrak{P}$ auf eine Riemannsche Halbfläche ab.

Für die Gruppe Nr. 1 ist die Behauptung trivial. Für Nr. 2 führt derselbe Schluß wie für Nr. 3–6 usw. zum Ziel. Für die übrigen Gruppen zeigen wir:

a) Wenn w eine Substitution der Gruppe erfährt, transformiert sich J identisch, was man für die Gruppen Nr. 7–12 unmittelbar verifizieren kann und was für die Gruppen Nr. 1–6 schon bewiesen ist.

b) Ist w_0 ein innerer Punkt einer Polygonseite s, so ist $\frac{w'}{w}$ reell, wenn s ein Radialschlitz ist; rein imaginär, wenn s ein Kreisbogen um 0 ist. Für die Gruppen Nr. 9, 10, 11, 12 ist, wie man gleichfalls leicht verifiziert, $J(w, w' \ldots)$ an der Stelle w_0 reell.

c) An allen Stellen der verdoppelten Halbfläche $\mathfrak{F}$ über der z-Ebene, die von den Polygonecken entsprechenden Stellen verschieden sind, ist w regulär (d. h. bekanntlich als Funktion einer Ortsuniformierenden der betr. Stelle von $\mathfrak{F}$), wie aus den Abbildungseigenschaften von $w(z)$ und dem Spiegelungsprinzip folgt. Später wird gezeigt, daß infolgedessen $J(w, w' \ldots)$ bis auf Pole regulär ist.

d) In den den Polygonecken entsprechenden Stellen hat $J(w)$ keine anderen Singularitäten als Pole. Der Beweis für c) und d) wird im nächsten Paragraphen nachgeholt.

Aus diesen Tatsachen folgt: J ist eine algebraische Funktion der verdoppelten Halbfläche $\mathfrak{F}$, die an den Rändern von $\mathfrak{H}$ im Fall der Gruppe Nr. 7b rein imaginär, in den anderen Fällen reell ist, d. h. J bildet die Halbfläche $\mathfrak{H}$ wieder auf eine Riemannsche Halbfläche ab, w. z. b. w.

Aus Satz 2 in Verbindung mit den in der Tabelle zusammengestellten Tatsachen folgt insbesondere:

Alle Polygone zu den Gruppen Nr. 1–6 lassen sich durch algebraische Funktionen auf Riemannsche Halbflächen abbilden, alle Polygone zu den Gruppen Nr. 9 und 10 durch (u. U. allerdings sehr komplizierte) Abelsche Integrale, alle Polygone zu den Gruppen Nr. 7 und 8 durch Exponentialfunktionen von Abelschen Integralen dritter Gattung (die Integrale im Exponenten müssen frei von Polen sein, weil sonst die Abbildungsfunktionen Unbestimmtheitsstellen hätten, was nicht der Fall ist).

§ 4. Funktionentheoretische Betrachtung der invarianten Funktionen $J(w, w', \ldots)$

Für die Gruppen Nr. 7–12 sollen zunächst die invarianten Funktionen $J(w, w' \ldots)$ durch die Ortsuniformisierende t einer beliebigen Stelle der verdoppelten Halbfläche $\mathfrak{F}$ ausgedrückt werden. Die Beziehung zwischen z und t ist (in möglichst einfacher Form) $z - z_0 = t^m$ für einen Verzweigungspunkt $(m - 1)$. Ordnung im Endlichen und $z = t^m$ mit $m < 0$ für eine Unendlichkeitsstelle $|m|$. Ordnung, d. h. einen Verzweigungspunkt $(|m| - 1)$. Ordnung im Unendlichen. Differentiation nach t sei durch Punkte bezeichnet. Dann wird

für Gruppe Nr. 7: $$\frac{w'}{w} = \frac{1}{m}\, t^{1-m}\, \frac{\dot{w}}{w}$$

Nr. 8: $$\left(\frac{w'}{w}\right)^2 = \frac{1}{m^2} \cdot t^{2-2m} \cdot \left(\frac{\dot{w}}{w}\right)^2$$

Nr. 9 und 10: $$(w')^n = \left(\frac{1}{m}\, t^{1-m} \cdot \dot{w}\right)^n$$

Nr. 11: $$\frac{w''}{w'} = \frac{1}{m}\, t^{1-m} \left(\frac{\ddot{w}}{\dot{w}} - \frac{m-1}{t}\right)$$

Nr. 12 $$[w]_z = \frac{1}{\dot{z}^2}\, [w]_t + [t]_z =$$

$$= \frac{t^{2-2m}}{m^2}\, [w]_t + \frac{1 - \frac{1}{m^2}}{2\, t^{2m}}$$

Die eben angegebenen Formeln drücken $J\left(w, \frac{dw}{dz}, \ldots\right)$ durch t und $J\left(w, \frac{dw}{dt}, \ldots\right)$ aus. Daraus folgt: Wenn an jeder Stelle von $\mathfrak{F}$ die Funktion $J\left(w, \frac{dw}{dt}, \ldots\right)$ regulär ist oder höchstens einen Pol hat, so gilt dasselbe für $J(w, w', \ldots)$. Wir zeigen jetzt, daß $J(w, \dot{w}, \ldots)$ tatsächlich keine anderen Singularitäten hat, womit dann der im vorigen Paragraphen noch ausstehende Beweis erbracht ist, und bestimmen gleichzeitig die Singularitäten und bei einigen Gruppen auch die Nullstellen von $J(w, \dot{w}, \ldots)$. Wir beschränken uns auf schlichte Polygone. (Der allgemeine Fall bringt demgegenüber nichts wesentlich Neues.) Gruppe Nr. 7a

und 7b: In jedem, einem inneren, von $w = 0$ und $w = \infty$ verschiedenen Punkt von $\mathfrak{P}$ entsprechenden Punkt ist $\frac{\dot{w}}{w}$ regulär und $\neq 0$. Für Schlitzenden über dem endlichen Punkt w_0 wird

$$w - w_0 = t^2 \cdot E(t)$$

($P(t)$ soll stets eine Potenzreihe, $E(t)$ eine Potenzreihe mit $E(0) \neq 0$ bedeuten). Daher wird

$$\frac{\dot{w}}{w} = t \cdot E(t).$$

Ist $w = 0$ bzw. $w = \infty$ innerer Punkt von $\mathfrak{P}$, so gelten Entwicklungen

$$w = t \cdot E(t) \quad \text{bzw.} \quad w = t^{-1} \cdot E(t), \quad \text{also}$$

$$\frac{\dot{w}}{w} = \frac{1}{t} + P(t) \quad \text{bzw.} \quad \frac{\dot{w}}{w} = -\frac{1}{t} + P(t).$$

Analoge Entwicklungen gelten an den gespiegelten Stellen der anderen Halbfläche von $\mathfrak{F}$.

Ist $w = 0$ Randpunkt mit dem Innenwinkel α (nur im Fall 7a möglich), so wird

$$w = t^{\alpha} \cdot E(t)$$

$$\frac{\dot{w}}{w} = \frac{\alpha}{t} + P(t).$$

Dieselben Formeln gelten, falls $w = \infty$ Randpunkt ist, nur ist in diesem Fall (wenigstens, wenn $\mathfrak{P}$ schlicht ist) $0 > \alpha \geqq -2$.

Gruppe Nr. 8: In den Punkten $w = 0$ und $w = \infty$ sowie an Schlitzenden ergibt sich das Verhalten von $\left(\frac{\dot{w}}{w}\right)^2$ aus dem eben behandelten von $\frac{\dot{w}}{w}$ durch Quadrieren. In einem von 0 und ∞ verschiedenen Randpunkt von $\mathfrak{P}$ mit dem Innenwinkel $\alpha = \frac{1}{2}$ bzw. $\alpha = \frac{3}{2}$ gelten Entwicklungen

$$w - w_0 = t^{\alpha} \cdot E(t)$$

$$\left(\frac{\dot{w}}{w}\right)^2 = t^{2(\alpha-1)} \cdot E(t)$$

Gruppe Nr. 9: An Schlitzenden ist $w = t^2 E(t)$, also

$$\dot{w} = t E(t).$$

Ist ∞ innerer Punkt, so wird für ihn $w = t^{-1} E(t)$, $\dot{w} = t^{-2} E(t)$. Entsprechendes gilt für den gespiegelten Punkt.

Ist $w = \infty$ Randpunkt mit dem Innenwinkel α ($= 0$, -1 oder -2), so wird $\dot{w} = t^{\alpha-1} E(t)$. Das Residuum von $\dot{w}$ kann dabei noch aus dem Abstand der beiden angrenzenden Seiten bestimmt werden. Weitere Nullstellen und Pole von $\dot{w}$ können nicht auftreten.

Gruppe Nr. 10: $\dot{w}^n$ ist im Innern von $\mathfrak{H}$ regulär und $\neq 0$, außer für $w = \infty$. Ist ∞ innerer Punkt von $\mathfrak{P}$, so gilt eine Entwicklung

$w = t^{-1} E(t)$

$\dot{w}^n = t^{-2n} E(t)$, ebenso in dem Spiegelpunkt.

In einem Randpunkt mit dem Innenwinkel α ($0 < \alpha \leqq 2$ im Endlichen, $0 \geqq \alpha \geqq -2$ im Unendlichen) wird

$w = t^\alpha E(t)$ bzw. $\log t \cdot E(t)$ (für $\alpha = 0$)

$\dot{w}^n = t^{n(\alpha-1)} E(t)$.

Gruppe Nr. 11: In einem inneren Punkt $P \neq \infty$ von $\mathfrak{P}$ ist $\dot{w}$ regulär und $\neq 0$, $\frac{\ddot{w}}{\dot{w}}$ also regulär. Im Unendlichen (falls im Innern von $\mathfrak{P}$ gelegen) ist $\frac{\ddot{w}}{\dot{w}} = -\frac{2}{t} + \mathfrak{P}(t)$. In einem Randpunkt mit dem Innenwinkel α ($0 < \alpha \leqq 2$ im Endlichen, $0 \geqq \alpha \geqq -2$ im Unendlichen) wird wie in dem bekannten Fall einfachen Zusammenhangs

$$\frac{\ddot{w}}{\dot{w}} = \frac{\alpha-1}{t} + P(t).$$

Gruppe Nr. 12: In inneren Punkten, gleich ob im Endlichen oder Unendlichen, ist $[w]_t$ regulär. In einem Randpunkt mit dem Innenwinkel α — gleichgültig ob im Endlichen oder Unendlichen — wird

$$[w]_t = \frac{1-\alpha^2}{2t^2} + t^{-1} P(t),$$

was man genau so wie in dem bekannten Fall des einfachzusammenhängenden Kreisbogenpolygons zeigt. Auf die Gruppen Nr. 2–6, 9a, 10a–10e soll in dieser Arbeit nicht näher eingegangen werden.

§ 5. Gliederung des Abbildungsproblems

Die vorstehenden Betrachtungen führen die konforme Abbildung eines gegebenen $(p+1)$-fach zusammenhängenden Kreispolygons $\mathfrak{P}$ auf eine Riemannsche Halbfläche $\mathfrak{H}$ auf folgende Teilaufgaben zurück:

I. Ermittlung einer Riemannschen Halbfläche, auf die sich $\mathfrak{P}$ abbilden läßt. Für diese Aufgabe gibt es i. allg. keinen direkten Lösungsweg; man muß sich daher damit begnügen, eine von so vielen unbestimmten Parametern abhängige algebraische Gleichung (oder mehrere solcher Gleichungen zur Auswahl) anzugeben, daß bei geeigneter Parameterwahl jede algebraische Kurve daraus entsteht, die einer topologisch möglichen symmetrischen Riemannschen Fläche $\mathfrak{F}$ entspricht oder wenigstens einer solchen birational äquivalent ist. $\mathfrak{F}$ ist vom Geschlecht p, die entsprechende Kurve also gleichfalls, und zwar hat sie $p+1$ reelle Züge (vgl. Klein 2 S. 75).

II. Bestimmung der zutreffenden Gruppe der Tabelle, wobei man eine möglichst wenig umfassende Gruppe wählen wird, wenn die Möglichkeit zur Auswahl besteht. Ermittlung der Singularitäten und gegebenenfalls Nullstellen der zugehörigen invarianten Funktion nach den Betrachtungen des vorigen Paragraphen. Die Lage dieser Pole bzw. Nullstellen auf der verdoppelten Halbfläche $\mathfrak{F}$ ist nicht von vornherein bekannt, kann also vorläufig nur durch weitere unbestimmte Parameter festgelegt werden – wie bei der gewöhnlichen Schwarzschen Polygonabbildung.

III. Bestimmung der invarianten Funktion aus ihren Polen und gegebenenfalls ihren Nullstellen – eine Hauptaufgabe der verschiedenen Theorien der algebraischen Funktionen – d. h. Aufstellung der Abbildungsgleichung (i. allg. eine Differentialgleichung)

$$J(w,\ w',\ \ldots) = R(s, z).$$

Dabei bedeutet $R(s, z)$ eine rationale Funktion der Variabeln s und z, die durch die $\mathfrak{F}$ erzeugende, irreduzible algebraische Gleichung mit reellen Koeffizienten $F(s, z) = 0$ verbunden sind.

IV. Integration der Abbildungsgleichung und Ermittlung der unbestimmt gebliebenen Parameter durch geeignete Näherungsverfahren. Diese letztere Aufgabe muß „im Prinzip" stets lösbar sein, weil die Existenz der Abbildungsfunktion feststeht. In den meisten Fällen sind aber die der wirklichen numerischen Lösung des Problems entgegenstehenden Schwierigkeiten praktisch unüberwindlich. Das Integrationsproblem führt bekanntlich im Fall der Gruppe Nr. 12 auf lineare Differentialgleichungen 2. Ordnung, sonst auf einfache Quadraturen (Klein 1).

Das Problem I kann in den Fällen $p < 3$ bekanntlich unmittelbar gelöst werden. Für $p = 0$ ist $\mathfrak{H}$ die Halbebene, für $p = 1$ die zweifach längs der reellen Achse geschlitzte Ebene. Es wird also in diesem Fall

$$F(s, z) \equiv s^2 - z(z-1)(z-a) = 0 \text{ mit } a > 1 \quad \text{oder}$$

$$F(s, z) \equiv s^2 - (1 - z^2)(1 - k^2 z^2) \text{ mit } 0 < k < 1.$$

Für $p = 2$ ist $\mathfrak{H}$ die längs der reellen Achse dreifach geschlitzte Ebene, wir dürfen also setzen:

$$F(s,z) \equiv s^2 - z(z-1)(z-a)(z-b)(z-c) = 0 \text{ mit } 1 < a < b < c.$$

Denn man kann $\mathfrak{P}$ auf einen von 3 Vollkreisen begrenzten Bereich abbilden (Bieberbach 1 § 26). Die drei Vollkreise haben einen gemeinsamen Orthogonalkreis. Bildet man den von diesem und den 3 Vollkreisen begrenzten einfach zusammenhängenden Bereich auf die Halbebene ab, so ist die Abbildung von $\mathfrak{P}$ auf die dreifach geschlitzte Ebene geleistet.

Das Problem III gehört im Fall $p = 0$ der elementaren Funktionentheorie an. Im Fall $p = 1$ greift man es – was Thiry,[1] Villat,[1] Achiezer und Komatu mit Erfolg getan haben – am besten mit Hilfe der Theorie der elliptischen Funktionen an.

[1] (Zusatz bei der Korrektur).

Um Problem IV zu lösen, müssen die Parameter so bestimmt werden, daß nicht nur die Polygonseiten die richtigen Längenverhältnisse und Winkel zueinander bekommen, sondern auch w beim Umlauf um jede Randkomponente von $\mathfrak{P}$ die identische Substitution erfährt (Schließungsbedingungen).

Das Abbildungsproblem wird i. allg. (vor allem wegen Problem IV) um so schwieriger, je umfassender die zugehörige Gruppe der Kleinschen Tabelle ist. Doch ist es auch in den Fällen der endlichen Gruppen Nr. 1 bis 6 alles andere als einfach. Darauf kann jedoch hier nicht näher eingegangen werden. Man vergleiche zu diesem Gegenstand Klein 1 und 3 sowie die in Klein 1 angebene Literatur.

Selbstverständlich kann der Fall eintreten, daß ein Polygon, das nach der Tabelle zu einer sehr umfassenden Gruppe (z. B. Nr. 12) gehört, nach einer linearen Hilfstransformation zu einer einfacheren Gruppe gehört. So kann man die Abbildung der längs zweier beliebiger Kreisbogen geschlitzten Ebene durch eine lineare Hilfstransformation stets auf ein Problem zu einer der Gruppen Nr. 7a, 7b, 9 zurückführen und so die Abbildungsfunktion durch elementare Funktionen und elliptische Integrale darstellen. Auf diese Weise hat Graeser dieses Abbildungsproblem im Prinzip gelöst (Graeser 1 S. 856ff.).

Literaturhinweise

Achiezer: 1. „Aerodynamische Untersuchung" (Ukrainisch). Abh. der phys.-math. Klasse der Ukrain. Akad. d. Wiss. 7 (etwa 1927). Vgl. Jahrb. über d. Fortschr. d. Math. 60/II (1934) S. 1028.[1] – 2. „Elementi teorij ellipticeskich funkcij", Moskau-Leningrad 1948, insbes. S. 179–197.[1]

L. Bieberbach: 1. „Einführung in die konforme Abbildung", vierte Aufl., Berlin 1949. Sammlung Göschen Nr. 768.

E. Graeser: 1. „Anwendung der Funktionentheorie auf die Theorie der Profilströmungen". Deutsche Math. 1 (1936) S. 825–858.

F. Klein: 1. „Vorlesungen über die hypergeometrische Funktion", herausgegeben von O. Haupt, Berlin 1933, Verl. Springer. – 2. „Über Riemanns Theorie der algebraischen Funktionen und ihrer Integrale", Leipzig 1882 oder Werke III S. 499–573. – 3. „Vorlesungen über das Ikosaeder", Leipzig 1884, Verl. Teubner.

[1] Dem Verfasser nicht zugänglich.

Y. Komatu: 1. „Conformal Mapping of Polygonal Domains." Journal of the Math. Soc. of Japan, Vol. 2 (1950) p. 133–147.

F. Schottky: 1. „Über die conforme Abbildung mehrfach zusammenhängender Flächen." Dissertation Berlin 1875. In umgearbeiteter Form erschienen im Journal für die reine u. angew. Math. 83 (1877), S. 300–351.

H. A. Schwarz: 1. „Über einige Abbildungsaufgaben." Journal f. Math. 70 S. 105–120 oder Werke II S. 65 ff. – 2. „Über diejenigen Fälle, in welchen die Gaußsche hypergeometrische Reihe eine algebraische Funktion ihres vierten Elementes darstellt." Journ. f. Math. 75 S. 292–335 oder Werke II.

R. Thiry: 1. „Sur la représentation conforme de domaines doublement connexes à contours rectilignes." Comptes Rendus de Paris 170 (1920) S. 1366–1368.[2]

2. „Sur les solutions multiples des problèmes d'hydrodynamique relatifs aux mouvements glissants". Ann. Éc. Norm. (3) 38 (1921) S. 229–339.[2]

H. Villat: 1. „Sur certaines équations différentielles du second ordre." Comptes Rendus de Paris 178 (1924) S. 604–607.[2]

---

[2] (Zusatz bei der Korrektur).