Sitzungsberichte

der

mathematisch-naturwissenschaftlichen Klasse

der

Bayerischen Akademie der Wissenschaften
zu München

Jahrgang 1951

München 1952
Verlag der Bayerischen Akademie der Wissenschaften
In Kommission bei der C. H. Beck'schen Verlagsbuchhandlung München

Über äquimeßbare (verteilungsgleiche) Funktionen

Von **Demetrios A. Kappos** in Erlangen

Vorgelegt von Herrn Otto Haupt am 1. Juni 1951

Einleitung

Es sei $E = \{x\}$ eine beliebige Grundmenge. Es sei ferner $\mathfrak{E} = \{X\}$ der Boolesche Vollverband aller Teilmengen von E. Es sei $\mathfrak{K}$ ein Boolescher σ-Unterverband von $\mathfrak{E}$ mit $E \in \mathfrak{K}$ und μ ein totaladditives, endliches Maß über $\mathfrak{K}$ mit $m(E) = 1$; wir sprechen dann kurz vom σ-Mengenmaßverband $(\mathfrak{K}, \mu)$. Wir bezeichnen mit $\mathfrak{M}_{\mathfrak{K}}$ die Gesamtheit aller μ-meßbaren reellen und endlichen Funktionen $f(x)$, $x \in E$, auf E. Jeder Funktion $f(x) \in \mathfrak{M}_{\mathfrak{K}}$ ordnen wir ihre Urbildmengen (sog. Mengenskala oder Spektralschar) $[f(x) \leqq \xi]$, $-\infty < \xi < +\infty$, in $\mathfrak{K}$ zu und definieren durch

$$\varphi_f(\xi) = \mu([f(x) \leqq \xi]), \quad -\infty < \xi < +\infty$$

die sog. μ-Verteilungsfunktion von $f(x)$. Sie ist bekanntlich monoton wachsend, rechtsseitig stetig und es gilt $\varphi_f(-\infty) = 0$, $\varphi_f(+\infty) = 1$. Gilt für zwei $f, g \in \mathfrak{M}_{\mathfrak{K}}$

$$(1) \qquad \varphi_f(\xi) = \varphi_g(\xi) \text{ für jedes } \xi, \ -\infty < \xi < +\infty,$$

so bezeichnen wir f und g als μ-äquimeßbar (oder μ-verteilungsgleich).

Ist speziell $E = \{x : 0 \leqq x < 1\}$, $\mathfrak{K}$ der σ-Körper (Lebesguesche Verband) aller nach Lebesgue meßbaren Teilmengen von E, und μ das Lebesguesche lineare Maß, so gilt folgender Satz (s. [1], [2]):[1]

Zu jeder beliebigen Folge $f_1, f_2, \ldots$ aus $\mathfrak{M}_{\mathfrak{K}}$ existiert immer eine Folge $g_1, g_2, \ldots$ aus $\mathfrak{M}_{\mathfrak{K}}$, so daß $g_1, g_2, \ldots$ gegenseitig μ-

[1] Zahlen in eckigen Klammern beziehen sich auf das Literaturverzeichnis am Schluß der Arbeit.

unabhängig (bezüglich dieses Begriffes vgl. [3 b]) und außerdem g_i und f_i μ-äquimeßbar für jedes $i = 1, 2, \ldots$ sind.

Der Marcinkiewicz-Zygmundsche Beweis dieses Satzes stützt sich auf spezielle Eigenschaften des linearen Lebesgueschen Maßes und kann daher auf den allgemeinen Fall eines beliebigen Maßes über einem beliebigen σ-Körper nicht übertragen werden. Dies liegt insofern in der Natur der Sache, als der in Rede stehende Satz nicht allgemein gilt, in dem Sinne nämlich, daß im allgemeinen die Behauptung nicht für jede (beliebige) Folge zutrifft. Dies ergibt sich aus den in der vorliegenden Arbeit aufzustellenden notwendigen und hinreichenden Bedingungen, unter denen für einen σ-Mengenmaßverband $(\mathfrak{K}, \mu)$ der Satz richtig bleibt. Um diese Bedingungen hier anzudeuten, bemerken wir folgendes:

Ist $\mathfrak{N}$ das σ-Ideal der μ-Nullmengen aus $\mathfrak{K}$, so bezeichnet man zwei Funktionen $f, g \in \mathfrak{M}_{\mathfrak{K}}$ als μ-äquivalent (μ-fastgleich) in Zeichen $f \approx g \bmod \mathfrak{N}$, wenn $[f(x) \dotplus g(x)] \in \mathfrak{N}$. Aus der μ-Äquivalenz folgt die μ-Äquimeßbarkeit, aber die Umkehrung gilt im allgemeinen nicht: Jeder Klasse von μ-äquivalenten Funktionen aus $\mathfrak{M}_{\mathfrak{K}}$ entspricht eindeutig eine μ-Verteilungsfunktion; umgekehrt aber kann dieselbe μ-Verteilungsfunktion mehreren Klassen entsprechen. Im Falle beispielsweise des linearen Lebesgueschen Maßes existieren abzählbar unendlich viele gegenseitig μ-unabhängige Klassen mit derselben μ-Verteilungsfunktion. Geht man vermöge Restklassenbildung nach $\mathfrak{N}$ zu dem zu $\mathfrak{K}$ homomorphen Booleschen σ-Verband $\mathfrak{B} = \mathfrak{K}/\mathfrak{N}$ über, so entspricht dem der Übergang vom Vektorverband $\mathfrak{M}_{\mathfrak{K}}$ der meßbaren Punktfunktionen zum Vektorverband $\mathfrak{B}_{\mathfrak{B}}$ der Ortsfunktionen über $\mathfrak{B}$. Und gerade von der speziellen Struktur des Booleschen σ-Verbandes $\mathfrak{B}$ hängt es ab, ob der obige Satz gilt oder nicht. Besitzt z. B. $\mathfrak{B}$ eine abzählbare Basis $\mathfrak{S}$, ist also $\mathfrak{S}^{\frown \dotplus \sigma\delta} = \mathfrak{B}$, so gilt der obige Satz für jede beliebige Folge von Funktionen dann und nur dann, wenn $\mathfrak{B}$ atomfrei ist.

Um Wiederholungen zu vermeiden, beziehen wir uns auf frühere Resultate (s. [3 a, b]) und sprechen daher im folgenden nicht von Maß bzw. Funktionen, sondern von Wahrscheinlichkeit bzw. Zufallsvariablen. Außerdem betrachten wir reduzierte Wahrscheinlichkeitsfelder (positive Maßverbände) also Wahrscheinlichkeiten w mit $0 < w(x) < 1$, falls $x \neq \theta$, e; demgemäß sind unsere Zufallsvariablen Ortsfunktionen. Nach dem bekannten Isomorphiesatz von Loomis (s. [4] § 11 und [5]) kann man einen positiven σ-Maßverband (vollideelles W-Feld) $(\mathfrak{F}, w)$ immer durch einen Booleschen σ-Mengenmaßverband $(\mathfrak{K}, \mu)$ von Teilmengen einer Grundmenge E realisieren (darstellen) derart, daß $(\mathfrak{F}, w)$ isometrisch zu $\mathfrak{K}/\mathfrak{N}$ ist, wobei $\mathfrak{N}$ das σ-Ideal der μ-Nullmengen in $\mathfrak{K}$ bedeutet. Jede Zufallsvariable ist dann durch eine Klasse von μ-äquivalenten μ-meßbaren Funktionen auf E realisierbar. Es ist daher klar, daß alle Sätze, die wir unten beweisen, bei entsprechender Formulierung auch für meßbare Funktionen gelten.

§ 1. Atomfreie empirische W-Felder

1.1. Es sei $(\mathfrak{F}, w)$ ein vollideelles W-Feld (s. [3]). Wir bezeichnen mit $\mathfrak{B}_{\mathfrak{F}}$ den Vektorverband aller Zufallsvariablen über $\mathfrak{F}$. Jeder Zufallsvariablen $X \in \mathfrak{B}_{\mathfrak{F}}$ entspricht eine Spektralschar $[X \leqq \xi]$, $-\infty < \xi < +\infty$, in $\mathfrak{F}$. Wir definieren durch

$$\varphi_X(\xi) = w([X \leqq \xi]), \quad -\infty < \xi < +\infty,$$

die sogenannte w-Verteilungsfunktion von X. Gilt für zwei X, $Y \in \mathfrak{B}_{\mathfrak{F}}$:

$$\varphi_X(\xi) = \varphi_Y(\xi) \text{ für alle } \xi, \quad -\infty < \xi < +\infty,$$

so definieren wir X und Y als w-verteilungsgleich (w-äquimeßbar).[1]

---

[1] Wir haben hier zur Definition der w-Verteilungsgleichheit die obere Spektralschar $[X \leqq \xi]$ gewählt. Die Definition ist aber unabhängig von der Wahl der Spektralschar, d. h. man kann auch zur Definition die untere Spektralschar $[X < \xi]$ bzw. jede beliebige Spektralschar aus der Klasse der Spektralscharen $s_X(\xi)$ (Somenskalen) nehmen, die jeder Zufallsvariablen (Ortsfunktion) nach Carathéodory zugeordnet sind. Nur muß man in diesem letzten Fall definieren: X ist w-verteilungsgleich zu Y, wenn $\varphi_X(\xi) = w(s_X(\xi)) = w(s_Y(\xi)) = \varphi_Y(\xi)$ für alle ξ gilt, für welche φ_X und φ_Y gleichzeitig stetig sind. Es gilt nämlich ${}^*\varphi_X(\xi) = w([X < \xi]) \leqq w(s_X(\xi)) = \varphi_X(\xi) \leqq \varphi_X^*(\xi) = w([X \leqq \xi])$ und zwar Gleichheit für alle ξ, für welche alle drei Verteilungs-

Es gilt nun folgender Satz:

1.2. Satz: *Es sei* $(\mathfrak{F}, w)$ *vollideell, mit empirischer Basis und atomfrei. Es sei ferner* $X_1, X_2, \ldots$ *eine beliebige Folge von Zufallsvariablen aus* $\mathfrak{V}_{\mathfrak{F}}$. *Dann existiert immer eine Folge von gegenseitig w-unabhängigen Zufallsvariablen* $Y_1, Y_2, \ldots$ *aus* $\mathfrak{V}_{\mathfrak{F}}$ *derart, daß* X_i *w-verteilungsgleich zu* Y_i, $i = 1, 2, \ldots,$ *ist.*

1.2.1. Zusatz: *Das Lebesguesche W-Feld* $(\mathfrak{J}, \mu)$ *genügt den Voraussetzungen für die Gültigkeit des Satzes* 1.2.

Beweis des Satzes 1.2.: Mit Komponenten $(\mathfrak{F}_i, w_i) = (\mathfrak{F}, w)$, $i = 1, 2, \ldots,$ bilden wir das vollideelle W-Produktfeld (s. [3b] Nr. 2. 3): $(\overline{\Phi}, \pi) = \bar{P}(\mathfrak{F}_i, w_i)$, $i \in (1, 2, \ldots)$, was zu $(\mathfrak{F}, w)$ isometrisch ist (vgl. [3b] Nr. 1.2.2). Es sei $\alpha = f(a)$, $a \in \mathfrak{F}$. $\alpha \in \overline{\Phi}$, die Abbildung, welche diese Isometrie erklärt. Wir bilden (nach [3b] Nr. 3.3) den Booleschen Unterverband Φ_j von Φ also auch von $\overline{\Phi}$ für alle $j = 1, 2, \ldots$. Dann ist (Φ_j, π) isometrisch zu $(\mathfrak{F}_j, w_j) = (\mathfrak{F}, w)$ für alle $j = 1, 2, \ldots$. Wir bezeichnen durch $\beta = f_j(b)$, $b \in \mathfrak{F}$, $\beta \in \Phi_j$, $j = 1, 2, \ldots,$ diese Isometrien. Wir setzen $s_j(\xi) = [X_j \leqq \xi] \in \mathfrak{F}$, $-\infty < \xi < +\infty$, $j = 1, 2, \ldots,$ und erhalten durch Transformation mittels f_j

$$(1) \quad \sigma_j(\xi) = f_j\left(s_j(\xi)\right) \in \Phi_j, \quad -\infty < \xi < +\infty, \quad j = 1, 2, \ldots.$$

$\{\sigma_j(\xi)\}$, $-\infty < \xi < +\infty$, besitzt für jedes $j = 1, 2, \ldots,$ die Eigenschaften einer Spektralschar in Φ_j und definiert daher in Φ_j sowie demgemäß in $\overline{\Phi}$, eine Zufallsvariable $X_j^* \in \mathfrak{V}_{\Phi_j} \subset \mathfrak{V}_{\overline{\Phi}}$. Außerdem gilt, wegen der Isometrie der Abbildung (1): $\varphi_{X_j^*}(\xi) = \varphi_{X_j}(\xi)$, $-\infty < \xi < +\infty$ und die Folge $X_1^*, X_2^*, \ldots$ besteht aus gegenseitig π-unabhängigen Zufallsvariablen in $\overline{\Phi}$. Es sei nun $a = f^{-1}(\alpha)$, $\alpha \in \overline{\Phi}$, $a \in \mathfrak{F}$, die inverse Abbildung von $\alpha = f(a)$. Wir transformieren die Spektralschar (1) aus $\overline{\Phi}$ mittels dieser Abbildung in $\mathfrak{F}$ und erhalten die Spektralschar

$$(2) \quad t_j(\xi) = f^{-1}\left(\sigma_j(\xi)\right), \quad -\infty < \xi < +\infty, \quad \text{in } (\mathfrak{F}, w)$$

---

funktionen gleichzeitig stetig sind. Wir bemerken, daß die Unstetigkeitsstellen höchstens abzählbar und für alle drei Funktionen die gleichen sind und zwar ist an einer Unstetigkeitsstelle ${}^*\varphi_X$ linksseitig stetig, φ_X^* rechtsstetig, also ${}^*\varphi_X(\xi) < \varphi_X^*(\xi)$ und $\varphi_X(\xi)$ liegt zwischen diesen beiden Werten.

für jedes $j = 1, 2, \ldots$, durch welche eine Zufallsvariable $Y_j \in \mathfrak{V}_{\mathfrak{F}}$, $j = 1, 2, \ldots$, erklärt wird. Die so entstehenden Zufallsvariablen $Y_1, Y_2, \ldots$ bilden eine Folge von gegenseitig w-unabhängigen Zufallsvariablen; wegen der Isometrie der Abbildungen f und f_j gilt außerdem

$$\varphi_{X_j}(\xi) = \varphi_{X_j^*}(\xi) = \varphi_{Y_j}(\xi)$$

$$\text{für } -\infty < \xi < +\infty \text{ und jedes } j = 1, 2, \ldots$$

Damit ist der Satz bewiesen.

Der Beweis des Zusatzes 1.2.1 folgt unmittelbar aus der Isometrie der W-Felder $(\mathfrak{F}, w)$ und $(\mathfrak{J}, \mu)$ (vgl. [3b] Nr. 1.2).

§ 2. Kriterium

2.1. Es sei $(\mathfrak{F}, w)$ ein vollideelles W-Feld und $(X_i)_{i \in I}$ eine Familie von Zufallsvariablen $X_i \in \mathfrak{V}_{\mathfrak{F}}$. Wir ordnen (nach [3b] Nr. 5) jeder Zufallsvariablen X_i das kleinste vollideelle W-Unterfeld $(\mathfrak{F}_{X_i}, w)$ von $\mathfrak{F}, w)$ über der Spektralschar $[X \leqq \xi]$, $-\infty < \xi < +\infty$ zu. Es gilt dann der Satz:

2.2. Satz: Vor. *Es sei $(\mathfrak{F}, w)$ ein vollideelles W-Feld und $(X_i)_{i \in I}$ eine Familie von Zufallsvariablen aus $\mathfrak{V}_{\mathfrak{F}}$.*

Beh. *Folgende zwei Aussagen sind gleichwertig:*

(a) *Man kann jeder Zufallsvariablen X_i, $i \in I$, eine w-verteilungsgleiche Zufallsvariable Y_i, $i \in I$, in $\mathfrak{V}_{\mathfrak{F}}$ so zuordnen, daß die Familie $(Y_i)_{i \in I}$ aus gegenseitig w-unabhängigen Zufallsvariablen $Y_i \in \mathfrak{V}_{\mathfrak{F}}$ besteht.*

(b) *Das vollideelle W-Produktfeld $\overline{P}_{i \in I} (\mathfrak{F}_{X_i}, w)$ ist isometrisch zu einem vollideellen W-Unterfeld von $(\mathfrak{F}, w)$.*

Beweis. Wir bemerken zuerst: Sind X und $Y \in \mathfrak{V}_{\mathfrak{F}}$ w-verteilungsgleich, so sind $(\mathfrak{F}_X, w)$ und $(\mathfrak{F}_Y, w)$ isometrisch, in Zeichen $(\mathfrak{F}_X, w) \equiv (\mathfrak{F}_Y, w)$. Kann man also jedem X_i, $i \in I$, eine verteilungsgleiche Zufallsvariable $Y_i \in \mathfrak{V}_{\mathfrak{F}}$ zuordnen, so daß die Y_i, $i \in I$, gegenseitig w-unabhängig sind, so gilt: es ist $(\mathfrak{F}_{X_i}, w) \equiv \equiv (\mathfrak{F}_{Y_i}, w)$, $i \in I$, und daher auch $\overline{P}_{i \in I} (\mathfrak{F}_{X_i}, w) \equiv \overline{P}_{i \in I} (\mathfrak{F}_{Y_i}, w)$, außerdem ist (nach Satz 5.3 [3b]) $\bar{P}_{i \in I} (\mathfrak{F}_{Y_i}, w)$ und demgemäß auch $\bar{P}_{i \in I} (\mathfrak{F}_{X_i}, w)$ isometrisch zu einem vollideellen W-Unterfeld von $(\mathfrak{F}, w)$.

Umgekehrt folgt aus der Isometrie von $\bar{P}_{i \in I} (\mathfrak{F}_{X_i}, w)$ mit einem W-Unterfeld von $(\mathfrak{F}, w)$ die Existenz einer Familie $(Y_i)_{i \in I}$ von gegenseitig w-unabhängigen Zufallsvariablen derart, daß X_i w-verteilungsgleich zu Y_i, $i \in I$, ist. Man zeigt dies analog wie in Satz 1.2. Bew.

§ 3. Beliebige empirische Felder

3.1. Es sei $(\mathfrak{F}, w)$ ein vollideelles W-Feld. Es sei $\mathfrak{B}$ eine Basis von $\mathfrak{F}$, d. h. eine Boolescher Unterverband von $\mathfrak{F}$, so daß $\mathfrak{B}^{\sigma\delta} = \mathfrak{F}$ gilt. Es sei $\mathfrak{m}_{\mathfrak{B}}$ die Mächtigkeit von $\mathfrak{B}$. Durchläuft $\mathfrak{B}$ alle möglichen Basen von $\mathfrak{F}$, so existiert unter allen Mächtigkeiten $\mathfrak{m}_{\mathfrak{B}}$ eine kleinste, die wir als den Charakter $C_{\mathfrak{F}}$ von $\mathfrak{F}$ bezeichnen.[1] Für ein empirisches W-Feld ist $C_{\mathfrak{F}} \leqq \aleph_0$. Wenn $C_{\mathfrak{F}} = \aleph_0$, dann folgt aus der Definition der Basis, daß $\mathfrak{m}_{\mathfrak{F}} = \mathfrak{c}$ (Mächtigkeit des Kontinuums); denn ein vollideelles atomares W-Feld mit $C_{\mathfrak{F}} = \aleph_0$ ist von der Mächtigkeit des Kontinuums und dieses W-Feld ist vom niedrigsten Typus mit $C_{\mathfrak{F}} = \aleph_0$ (vgl. unten Nr. 3.3). Aus $\mathfrak{m}_{\mathfrak{F}} = \mathfrak{c}$ folgt nicht immer, daß $C_{\mathfrak{F}} = \aleph_0$ ist. Beispiel: Das W-Produktfeld $(\bar{\Phi}, \pi) = P_{i \in I}(\mathfrak{F}_i, w_i)$, wobei $C_{\mathfrak{F}_i} = \aleph_0$, $i \in I$, und $\mathfrak{m}_I = \mathfrak{c}$. Für W-Felder mit $\mathfrak{m}_{\mathfrak{F}} > \mathfrak{c}$ fallen Charakter und Mächtigkeit des W-Feldes immer zusammen.

3.2. Definition. *Ein vollideelles W-Feld $(\mathfrak{F}, w)$ heißt σ-streckungsisomorph zu einem σ-Maßverband $(\mathfrak{M}, \mu)$ (d. h. einem Booleschen σ-Verband mit reduziertem, totaladditivem endlichem Maß, sowie mit Einheit), wenn $(\mathfrak{F}, w)$ isometrisch ist zu $(\mathfrak{M}, m)$, wobei $m(x) = \mu(x) : \mu(e)$, $x \in \mathfrak{M}$ und e die Einheit von $\mathfrak{M}$ bedeutet.*

---

[1] Siehe [6]. Bedeutet $\mathfrak{H}_{\mathfrak{F}}$ den Unterverband von $\mathfrak{B}_{\mathfrak{F}}$, der aus allen Zufallsvariablen mit endlichem quadratischem Mittel (quadratische Summierbarkeit) besteht, so ist $\mathfrak{H}_{\mathfrak{F}}$ ein Hilbertscher Raum; und falls $C_{\mathfrak{F}} \geqq \aleph_0$, ist $C_{\mathfrak{F}}$ gleich Dimension D von $\mathfrak{H}_{\mathfrak{F}}$; falls $C_{\mathfrak{F}} < \aleph_0$, ist $C_{\mathfrak{F}} = 2^D$.

3.3. Für $C_{\mathfrak{F}} = \aleph_0$ können wir nach dem Carathéodoryschen Darstellungssatz (vgl. [3b] Nr. 1.2) drei verschiedene Isometrietypen von vollideellen W-Feldern unterscheiden, nämlich:

I. Stetiger Typus, wenn $(\mathfrak{F}, w)$ isometrisch zu $(\mathfrak{J}, \mu)$ ist (vgl. 1.2.1.).

II. Gemischter Typus, wenn $(\mathfrak{F}, w)$ Atome besitzt, aber die Summe der Wahrscheinlichkeiten der Atome kleiner als 1 ist.

III. Diskreter Typus, wenn $(\mathfrak{F}, w)$ atomar ist, d. h. die Summe der Wahrscheinlichkeiten der Atomen gleich 1 ist.

Bezeichnet man bei Typus II. und III. mit A die Gesamtheit der Atome von $\mathfrak{F}$, ferner mit $\mathfrak{A}$ den kleinsten σ-Booleschen Unterverband von $\mathfrak{F}$ über $\mathfrak{A}$ und mit $\mathfrak{S}$ den σ-Booleschen Unterverband von $\mathfrak{F}$, der aus allen Elementen $x \in \mathfrak{F}$ mit $x \subseteqq s$ besteht, wobei $s = e - \bigcup_{a \in A} a$, so gilt: jedes $y \in \mathfrak{F}$ ist eindeutig in der Form $y = a \cup t$ mit $a \in \mathfrak{A}$, $t \in \mathfrak{S}$ darstellbar. Es gilt also: $(\mathfrak{A} \vee \mathfrak{S})^{\cup} = \mathfrak{F}$; hierbei bedeutet $\vee$ die mengentheoretische Vereinigung. Wir bezeichnen $\mathfrak{A}$ als den diskreten und $\mathfrak{S}$ als den stetigen Teil des W-Feldes $(\mathfrak{F}, w)$. Bei Typus III. ist $\mathfrak{S}$ leer. Der stetige Teil $(\mathfrak{S}, w)$ des Typus II. ist σ-streckungsisomorph zu $(\mathfrak{J}, \mu)$ also zu Typus I.

Wir setzen nun folgende Rangordnung zwischen diesen Typen I.–III. fest. Es sei I. (rang-)höher als II. und II. höher als III.[1] Dann gilt

3.3.1. Satz: *Ein vollideelles W-Unterfeld* $(\mathfrak{F}^*, w)$ *von* $(\mathfrak{F}, w)$ *ist nicht von einem höherem Typus als* $(\mathfrak{F}, w)$.

Der Beweis folgt aus der Darstellung von $(\mathfrak{F}^*, w)$ durch ein Unterfeld von $(\mathfrak{J}, \mu)$ (s. [3b] Nr. 1.2).

3.4. Das in Aussicht genommene Kriterium lautet nun:

3.4.1. Satz: Vor: *Es sei* $(\mathfrak{F}, w)$ *vollideell mit* $C_{\mathfrak{F}} = \aleph_0$.

Beh.: *Folgende beiden Aussagen sind gleichwertig:*

---

[1] Wir setzen noch fest, daß $(\mathfrak{F}, w)$ zum Typus III. gerechnet werden soll, wenn $C_{\mathfrak{F}}$ endlich.

(1) *Es existiert zu jeder beliebigen Familie* $(X_i)_{i \in I}$ *aus* $\mathfrak{V}_{\mathfrak{F}}$ *mit* $\mathfrak{m}_I \leqq \aleph_0$ *eine Familie* $(Y_i)_{i \in I}$ *von gegenseitig w-unabhängigen Zufallsvariablen aus* $\mathfrak{V}_{\mathfrak{F}}$, *so daß* Y_i *w-verteilungsgleich zu* X_i *für* $i \in I$ *ist.*

(2) *Es ist* $(\mathfrak{F}, w)$ *vom Typus* I.

Bemerkung: Ist $C_{\mathfrak{F}} = \aleph_0$, ferner $(\mathfrak{F}, w)$ von einem beliebigen Typus und $(X_i)_{i \in I}$ eine Familie aus $\mathfrak{V}_{\mathfrak{F}}$ mit $\mathfrak{m}_I > \aleph_0$, so kann gemäß Satz 2.2 keine Familie $(Y_i)_{i \in I}$ von gegenseitig w-unabhängigen Zufallsvariablen aus $\mathfrak{V}_{\mathfrak{F}}$ existieren, so daß Y_i w-verteilungsgleich zu X_i, $i \in I$, gilt; denn $\underset{i \in I}{\bar{P}} (\mathfrak{F}_{X_I}, w)$ ist vom Charakter $> \aleph_0$ also zu keinem W-Unterfeld von $(\mathfrak{F}, w)$ isometrisch.

Beweis des Satzes 3.4.1: Betr. (2)$\to$(1): vgl. Satz 1.2.; Betr. (1) $\to$ (2): folgt aus dem nachstehenden Satz:

3.4.2. Satz: *Ist* $C_{\mathfrak{F}} = \aleph_0$ *und ist* $(\mathfrak{F}, w)$ *von niedrigerem Typus als* I., *so kann man Folgen* $(X_i)_{i \in I}$ *in* $\mathfrak{V}_{\mathfrak{F}}$ *mit* $2 \leqq \mathfrak{m}_I \leqq \aleph_0$ *bestimmen, so daß* $\underset{i \in I}{\bar{P}} (\mathfrak{F}_{X_i}, w)$ *zu keinem vollideellen W-Unterfeld von* $(\mathfrak{F}, w)$ *isometrisch ist.*

Beweis. 1. Für $\mathfrak{m}_I = \aleph_0$ setze man z. B. $X_i = X$ für jedes $i \in I$, wobei X eine beliebige feste Zufallsvariable in $\mathfrak{V}_{\mathfrak{F}}$, dann ist $\underset{i \in I}{\bar{P}} (\mathfrak{F}_{X_i}, w)$ vom Typus I. also nach Satz 3.3.1 zu keinem vollideellen W-Unterfeld von $(\mathfrak{F}, w)$ isometrisch.

2. Um den Satz für beliebige endliche Mächtigkeiten $\mathfrak{m}_I \geqq 2$ zu beweisen, genügt es, $\mathfrak{m}_I = 2$ zu erledigen:

Es seien $a_1, a_2, \ldots$ die Atome von $(\mathfrak{F}, w)$. Wir können voraussetzen, daß sie derart nummeriert sind, daß $w(a_i) \geqq w(a_{i+1})$, $i = 1, 2, \ldots$, gilt. Ist nun ein W-Feld $(\mathfrak{F}^*, w)$ vollideelles W-Unterfeld von $(\mathfrak{F}, w)$, so ist $(\mathfrak{F}^*, w)$ nicht von höherem Typus als $(\mathfrak{F}, w)$, besitzt also Atome $a_1^*, a_2^*, \ldots$, und zwar gilt $w(a_1^*) \geqq w(a_1)$, wenn a_1^* das Atom von $(\mathfrak{F}^*, w)$ mit der größten Wahrscheinlichkeit bedeutet; denn die Vereinigung der Atome von $(\mathfrak{F}^*, w)$ enthält die Vereinigung der Atome von $(\mathfrak{F}, w)$ und jedes a_i^* enthält mindestens ein Atom a_j, falls a_i^* nicht zu allen a_j fremd ist. Wir nehmen jetzt zwei Zufallsvariablen $X_1, X_2 \in \mathfrak{V}_{\mathfrak{F}}$ derart, daß $(\mathfrak{F}_{X_i}, w)$ isometrisch zu $(\mathfrak{F}, w)$ für $i = 1, 2$ ist; solche x_i existieren immer.

Das W-Produktfeld $\bar{P}_{i \in (1,2)} (\mathfrak{F}_{X_i}, w)$, wobei $(\mathfrak{F}_{X_i}, w)$ isometrisch zu $(\mathfrak{F}, w)$, ist offenbar vom gleichen Typus wie $(\mathfrak{F}, w)$ jedoch weder zu $(\mathfrak{F}, w)$ noch zu einem vollideellen W-Unterfeld von $(\mathfrak{F}, w)$ isometrisch; denn das P-Ereignis $\bar{P}_{i \in (1,2)} b_i$ mit $b_i = a_1$ für $i = 1, 2$ dieses Feldes ist ein Atom, und zwar das Atom mit der größten Wahrscheinlichkeit in $\bar{P}_{i \in (1,2)} (\mathfrak{F}_{X_i}, w_1)$, seine Wahrscheinlichkeit $\pi(P b_i)$ ist aber $< w(a_1)$, so daß $\bar{P}_{i \in (1,2)} (\mathfrak{F}_{X_i}, w_i)$ nicht isometrisch zu einem W-Unterfeld von $(\mathfrak{F}, w)$ sein kann.

Bemerkung: Unsere letzten Überlegungen bleiben richtig, wenn für $(\mathfrak{F}, w)$ gilt $C_{\mathfrak{F}} < \aleph_0$. In solchen W-Feldern kann man immer $(X_i)_{i \in I}$ mit $\mathfrak{m}_I \geqq 2$ bestimmen, so daß $\bar{P}(\mathfrak{F}_{X_i}, w_i)$ zu keinem Unterfeld von $(\mathfrak{F}, w)$ isometrisch ist. Es sei außerdem bemerkt, daß wir *in der vorliegenden Arbeit* (ebenso wie in [3b] vgl. Nr. 1.1) *nur W-Felder mit mehr als drei Ereignissen betrachten.*

3.5. Wir fragen weiter, ob vollideelle W-Felder $(\mathfrak{F}, w)$ mit $C_{\mathfrak{F}} \leqq \aleph_0$ vom Typus II. oder III. existieren derart, daß der Satz 1.2 für gewisse Folgen $(X_i)_{i \in I}$ mit $\mathfrak{m}_I \leqq \aleph_0$ gilt. Nach Satz 2.2 kann man diese Frage auf folgende zurückführen:

3.5.1.: Enthält ein vollideelles W-Feld von den Typen II. oder III. ein vollideelles W-Unterfeld, das zu einem W-Produktfeld $\bar{P}_{i \in I} (\mathfrak{F}_i, w_i)$, $\mathfrak{m}_I \leqq \aleph_0$, isometrisch ist? Oder was dasselbe: Kann ein W-Produktfeld $\bar{P}_{i \in I} (\mathfrak{F}_i, w_i)$, $\mathfrak{m}_I \leqq \aleph_0$, von Typus II. oder III. sein? Denn in diesem letzten Fall könnte man in diesem Produktfeld Folgen von Zufallsvariablen, für welche der Satz 1.2 gilt, bestimmen.

Die Antwort auf diese Frage ist bejahend, wenn $\mathfrak{m}_I < \aleph_0$ und jede Komponente $(\mathfrak{F}_i, w_i)$ höchstens vom Typus III. bzw. II. ist. Dann ist nämlich $\bar{P}_{i \in I} (\mathfrak{F}_i, w_i)$ vom Typus II., wenn mindestens eine Komponente vom Typus II. ist, bzw. vom Typus III., wenn alle Komponenten vom Typus III. sind. Es bleibt also der Fall $C_{\mathfrak{F}} = \aleph_0$, $\mathfrak{m}_I = \aleph_0$, zu untersuchen. Hier kann man die Frage 3.5.1 auf folgende zurückführen:

3.5.2. Es sei $(\overline{\Phi}, \pi) = \underset{i \in I}{P} (\mathfrak{F}_i, w_i)$ ein W-Produktfeld, wobei $\mathfrak{m}_I = \aleph_0$, und $\mathfrak{F}_i$ der Boolesche Verband, den zwei Atome a_{i1}, a_{i2} erzeugen, also $\mathfrak{F}_i = \{\theta, a_{i1}, a_{i2}, e\}$, $i \in I$. Kann man die Wahrscheinlichkeiten der Atome, nämlich $w_i(a_{in})$, $n = 1, 2$; $i \in I$, derart bestimmen, daß $(\overline{\Phi}, \pi)$ vom Typus III. bzw. II. ist?

3.6. Zwecks Beantwortung der Frage in Nr. 3.5.2 bezeichnen wir zuerst mit K die Gesamtheit der sogenannten P-Ereignisse Px_i, wobei $x_i \in \mathfrak{F}_i$, $i \in I$ (vgl. [3b] Nr. 2), hierbei dürfen bekanntlich höchstens endlich viele $x_i \neq e$ sein. Wir betrachten K als $\cap$-Untersystem von $\overline{\Phi}$ (vgl. [3b] Nr. 2.2.4), dann gilt

$$\mathsf{K}^{\dotplus\sigma\delta} = \mathsf{K}^{\dotplus\delta\sigma} = \overline{\Phi}. \tag{1}$$

$\mathsf{K}^{\dotplus} = \Phi$ ist ein Boolescher Unterverband (Basis) von $\overline{\Phi}$ und besitzt keine Atome. Aus (1) folgt: Wenn in $\overline{\Phi}$ Atome existieren, so sind sie als Durchschnitte $\alpha = \bigcap_{\nu=1}^{\infty} \alpha_\nu$ mit $\alpha_\nu \in \Phi$ und $\alpha_1 \supset \alpha_2 \supset \ldots$ darstellbar, gehören also zu Φ^δ, wobei $\pi(\alpha) = \lim_{n \to \infty} \pi(\alpha_n) \neq 0$ gilt. Hierbei kann die streng absteigende Folge $\alpha_1, \alpha_2, \ldots$ nicht aus endlich vielen Gliedern bestehen, denn kein $\alpha_\nu \in \Phi$ ist ein Atom. Wir setzen $\alpha_k = \alpha_{k1} \cup \alpha_{k2} \cup \ldots \alpha_{k,r_k}$, wobei die $\alpha_{k,m} \in \mathsf{K}$, $m = 1, 2, \ldots, r_k$; $k = 1, 2, \ldots$, bei gleichem erstem Index k paarweise fremd sind. O. B. d. A. kann angenommen werden, daß jedes $\alpha_{k+1,m}$ genau in einem $\alpha_{k,n}$ enthalten ist. Wir betrachten

$$\bigcap_{k=1}^{\infty} (\alpha_{k1} \cup \alpha_{k2} \cup \ldots \cup \alpha_{k,r_k}). \tag{2}$$

Durch formale distributive Entwicklung der linken Seite von (2) entstehen Durchschnitte der Form $\alpha_{1,t_1} \cap \alpha_{2,t_2} \cap \ldots$. Ihre Vereinigung ist im allgemeinen nicht gleich α, denn das allgemeine distributive Gesetz braucht in $\overline{\Phi}$ nicht zu gelten: jedoch ist diese Vereinigung in α enthalten. Nun bemerken wir: jeder Durchschnitt $\alpha_{1,t_1} \cap \alpha_{2,t_2} \cap \ldots$ bricht entweder für ein k ab, wenn nämlich in α_{k,t_k} kein $\alpha_{k+1,m}$ enthalten ist, oder bricht nicht ab. Da $\alpha_1, \alpha_2, \ldots$ streng absteigt und nicht abbricht, so gibt es nicht abbrechende Durchschnitte $\bigcap_{k=1}^{\infty} \alpha_{k,t_k}$ und für diese Durchschnitte gilt offensichtlich:

(3) $\alpha_{k,t_k} \supseteqq \alpha_{k+1,t_k}$ und $\alpha_{k,t_k} \frown \alpha \neq 0$, $k = 1, 2, \ldots$.

Nehmen wir zuerst an, daß ein nicht abbrechender Durchschnitt, als Element in Φ^δ betrachtet, nicht leer ist, so daß $\bigcap_{k=1}^{\infty} \alpha_{k,t_k} = \beta \neq 0$ gilt. Dann haben wir $\beta \subseteqq \alpha$; da aber α ein Atom ist, ist $\beta = \alpha$. Man kann in diesem Falle also α durch $\bigcap_{k=1}^{\infty} \alpha_{k,t_k}$ mit $\alpha_{k,t_k} \in \mathsf{K}$ darstellen.

Andererseits ist ein nicht abbrechender Durchschnitt, als Element in Φ^δ betrachtet, stets nicht leer. Denn aus $\bigcap_{k=1}^{\infty} \alpha_{k,t_k} = 0$ folgt $\lim_{n\to\infty} \pi(\alpha_{n,t_n}) = 0$, so daß für genügend großes n gilt: $\pi(\alpha_{n,t_n}) < \pi(\alpha)$. Daraus folgt aber $\pi(\alpha_{n,t_n} \frown \alpha) < \pi(\alpha)$ und wegen $0 \neq \alpha_{n,t_n} \frown \alpha$, auch $\pi(\alpha_{n,t_n} \frown \alpha) > 0$, d. h. α ist kein Atom (Widerspruch!).

Wir haben also gezeigt:

3.6.1. Satz: *Ein eventuell in $\overline{\Phi}$ vorhandenes Atom $\alpha \neq 0$ ist stets in der Form $\alpha = \bigcap_{n=1}^{\infty} \alpha_n$ mit $\alpha_n \in \mathsf{K}$, d. h. $\alpha_n = \underset{i\in I}{P}\, a_i^n$, darstellbar. Hierbei kann angenommen werden, daß $\alpha_1 \supset \alpha_2 \supset \ldots$, d. h. streng absteigt.*[1]

3.7. Wir bezeichnen einen Ausdruck $\underset{i\in I}{P}\, a_i$ als Grenzprodukt, wenn unendlich viele Komponenten $a_i \in \mathfrak{F}_i$ verschieden von e sind und alle Komponenten verschieden von θ.

Wir wollen jetzt gewisse Elemente aus Φ^δ durch solche Grenzprodukte darstellen:

Wir betrachten Elemente $\alpha \in \Phi^\delta$, $\alpha \neq 0$, die folgendermaßen darstellbar sind:

(D) $\alpha = \bigcap_{n=\infty}^{\infty} \alpha_n$, $\alpha_n = P a_i^n \in \mathsf{K}$ mit $\alpha_n \supset \alpha_{n+1}$, $n = 1, 2, \ldots$.

Aus (D) folgt:

1. $\lim \pi(\alpha_n) = \pi(\alpha)$ (klar).
2. Ist für ein $i \in I$ die Komponente a_i^n von α_n von e verschieden, so gilt $a_i^{n+k} = a_i^n$ für alle $k = 1, 2, \ldots$.

---

[1] Letztere Annahme, weil $\alpha_\nu \in \mathsf{K}$ keine Atome in $\overline{\Phi}$ sind.

Wäre nämlich $a_i^{n+k} \neq a_i^n$ für ein $k = 1, 2, \ldots$, so wäre dann $\alpha_n \supset \alpha_{n+k}$ falsch; denn als a_i^{n+k} käme dann nur $\bar{a}_i^n = e - a_i^n$ oder e in Frage.

Aus 2. und $\alpha_n \supset \alpha_{n+1}$ folgt nun:

3. Jedes α_n besitzt alle von e verschiedenen Komponenten seiner Vorgänger und mindestens eine weitere solche Komponente, d. h. mit $n \to \infty$ wächst die Anzahl der von e verschiedenen Komponenten, die in den α_n vorkommen über alle Grenzen.

Durch geeignete Einschaltung links von α_1 bzw. zwischen α_n und α_{n+1}, $n = 1, 2, \ldots$, von endlich vielen neuen Elementen aus K kann man eine neue Folge $\alpha_1^* \supset \alpha_2^* \supset \ldots$ bestimmen, die auch α darstellt und für welche gilt:

4. jedes α_n^*, $n = 1, 2, \ldots$, besitzt genau n von e verschiedene Komponenten. Hierbei werden genau dieselben von e verschiedenen Komponenten in dieser neuen Folge vorkommen wie in der Folge $\alpha_1, \alpha_2, \ldots$.

Man kann also o. B. d. A. bei (D) zusätzlich annehmen, daß jedes α_n genau n von e verschiedenen Komponenten besitzt.

Es seien $x_{i_1}, x_{i_2}, \ldots$ alle von e verschiedene Komponenten, die dem Element α in dieser Weise zugeordnet sind. Wir erklären dann das Grenzprodukt $\underset{i \in I}{P} a_i$ mit $a_i = x_{i_k}$, wenn $i = i_k$, $k = 1, 2, \ldots$, sonst $a_i = e$, als eine Darstellung von α durch ein Grenzprodukt, in Zeichen $\alpha = \underset{i \in I}{P} a_i$. Es gilt offensichtlich:

$$\text{(U)} \quad \pi(\alpha) = \lim_{n \to \infty} \prod_{k=1}^{n} w_{i_k}(x_{i_k}) = \prod_{k=1}^{\infty} w_{i_k}(x_{i_k}) = \prod_{i \in I} w_i(a_i).$$

Letztere Darstellung dieses unendlichen Produktes ist gestattet, weil die Konvergenz absolut (also unbedingt) ist und die bei dieser Schreibweise neu hinzutretenden Faktoren i aus I sämtlich gleich 1 sind.

Die eben erklärte Darstellung $\alpha = \underset{i \in I}{P} a_i$ des Elementes $\alpha \in \Phi^\delta$, die wir auf Grund der Voraussetzung (D) erhalten haben, ist sogar unabhängig von der Wahl der Folge $\alpha_1, \alpha_2, \ldots$. Ändern wir nämlich bei (D) die Folge, in dem wir schreiben:

$$\alpha = \bigcap_{\nu=1}^{\infty} \beta_\nu, \; \beta_n = P b_i^n \in K \quad \text{mit} \quad \beta_n \supset \beta_{n+1},$$

so erhalten wir eine Darstellung $\alpha = \underset{i \in I}{P} b_i$ mit $b_i = a_i$, $i \in I$. Angenommen nämlich:

a) $b_i \neq a_i$, b_i und $a_i \neq e$ für ein $i \in I$. Dann ist $b_i = e - a_i$; b_i bzw. a_i kommt mindestens in einem β_m bzw. α_n als Komponente vor, also gemäß 2) in allen β_{m+k} bzw. α_{n+k}, $k = 1, 2, \ldots$. Wegen $b_i = e - a_i$ muß aber dann $\beta_{m+k} \cap \alpha_{n+t} = 0$ für alle k, $t = 1, 2, \ldots$ und mithin $\bigcap \beta_n$ fremd zu $\bigcap \alpha_n$ sein (Widerspruch!). Für $a_i \neq e$, $b_i \neq e$ ist somit $b_i = a_i$.

b) $b_i \neq e$ aber $a_i = e$ bzw. $b_i = e$ aber $a_i \neq e$ für ein $i \in I$. Dann ist $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} \delta_n = \alpha$ mit $\delta_n = \alpha_n \cap \beta_n$, $n = 1, 2, \ldots$, und erfüllt Voraussetzung (D).

Es sei $\alpha = \underset{i \in I}{P} d_i$ die hiermit gewonnene Darstellung von α durch ein Grenzprodukt. In diesem Grenzprodukt ist die Anzahl der von e verschiedenen Komponenten größer als in $\underset{i \in I}{P} a_i$ bzw. $\underset{i \in I}{P} b_i$ d. h. $\prod\limits_{i \in I} w_i(d_i) < \prod\limits_{i \in I} w_i(b_i)$ und $\prod\limits_{i \in I} w_i(a_i) = \pi(\alpha)$ (Widerspruch zu (U)!). Umgekehrt kann man jedem Grenzprodukt $\underset{i \in I}{P} a_i$ mit $\prod\limits_{i \in I} w_i(a_i) = \xi \neq 0$ eine Folge $\alpha_1 \supset \alpha_2 \supset \ldots$ mit $\alpha_n \in \mathsf{K}$ zuordnen, so daß jedes α_n genau n von e verschiedenen Komponenten besitzt und $\lim \pi(\alpha_n) = \xi$ gilt.

Die Folge $\alpha_1, \alpha_2, \ldots$ ist von der Art der Nummerierung der von e verschiedenen Komponenten abhängig, man kann aber hier leicht zeigen, daß bei verschiedenen Nummerierungen Folgen entstehen, die immer dasselbe Element in Φ^δ mit der Wahrscheinlichkeit gleich ξ darstellen.

3.8. Nach Satz 3.6.1 erfüllt jedes Atom $\alpha \neq 0$ in $\overline{\Phi}$ die Bedingung (D) von Nr. 3.7. Jedes Atom $\alpha \neq 0$ ist also eindeutig durch ein Grenzprodukt darstellbar. Es gilt aber ferner:

3.8.1. Satz: Vor.: *Es sei* $(\overline{\Phi}, \pi) = \underset{i \in I}{\overline{P}} (\mathfrak{F}_i, w_i)$ *ein Produktfeld, wobei* $\mathfrak{m}_I = \aleph_0$ *und* $\mathfrak{F}_i$ *der Boolesche Verband, den zwei Atome erzeugen, also* $\mathfrak{F}_i = \{\theta, a_{i1}, a_{i2}, e\}$, $i \in I$.

Beh.: *Folgende Aussagen sind gleichwertig:*

(1) *Ein Element* α *ist ein Atom in* $\overline{\Phi}$.

(2) *Ein Element* α *in* $\overline{\Phi}$ *ist durch ein Grenzprodukt* $\underset{i\in I}{P}\, a_i,\ a_i \in \mathfrak{F}_i$, *mit* $a_i \neq e,\ \theta$ *für jedes* $i \in I$ *und* $\prod\limits_{i\in I} w_i(a_i) = \pi(\alpha)$ *darstellbar.*

Beweis. Betr. (1) → (2): Ein Atom ist immer durch ein Grenzprodukt $\alpha = \underset{i\in I}{P}\, a_i$ mit $\prod\limits_{i\in I} w_i(a_i) = \pi(\alpha)$ darstellbar. Es bleibt nur zu zeigen, daß sämtliche Komponenten des Atoms α von e verschieden sind.

Es sei eine Komponente $a_k = e$; dann ersetzen wir in dem Grenzprodukt Pa_i die Komponente a_k durch a_{k1} oder $a_{k2} \in \mathfrak{F}_k$ und erhalten ein Grenzprodukt Pb_i mit $b_i = a_i,\ i \neq k,\ b_i = a_{k1}$ oder a_{k2}, wenn $i = k$. Das Element β in Φ^δ, das dieses Produkt darstellt, ist in α enthalten. Außerdem gilt: $\pi(\beta) = \prod\limits_{i\in I} w_i(b_i) = \pi(\alpha)\, w_k(a_{k1})$ oder $= \pi(\alpha)\, w_k(a_{k2})$ auf jeden Fall also $\pi(\beta) < \pi(\alpha)$ und $\beta \subset \alpha$, so daß α kein Atom (Widerspruch!).

Betr. (2) → (1): α ist offensichtlich ein Atom; denn kein Grenzprodukt Pb_i kann in Pa_i enthalten sein, wenn $b_i \neq a_i$ für mindestens ein $i \in I$ ist.

3.9. Jetzt können wir die Frage 3.5.2 beantworten durch den

3.9.1. Satz: Vor.: *Wie beim Satz* 3.8.1. *Außerdem soll die Wahrscheinlichkeit* $w_i(a_{i1})$ *des ersten Atoms* a_{i1} *nicht größer sein als* 1/2 *für alle* $i \in I$.

Beh.: *Folgende beide Aussagen sind gleichwertig:*

(1) *Das W-Produktfeld* $(\overline{\Phi}, \pi)$ *ist von einem niedrigeren Typus als der Typus* I.

(2) *Die Reihe* $\sum\limits_{i\in I} w_i(a_{i1})$ *konvergiert.*

Beweis. Nach 3.8.1 existieren Atome in $\overline{\Phi}$ dann und nur dann, wenn Grenzprodukte Px_i mit lauter von e verschiedenen Komponenten und $\prod\limits_{i\in I} w_i(x_i) = \xi \neq 0$ vorhanden sind. Nach einem bekannten Konvergenzkriterium der klassischen Analysis konvergiert $\prod\limits_{i\in I} w_i(x_i)$, oder was dasselbe $\prod\limits_{i\in I} \bigl(1 - w_i(\bar{x}_i)\bigr)$, dann und nur dann, wenn $\sum\limits_{i\in I} w_i(\bar{x}_i)$ konvergiert. Wegen $w_i(a_{i2}) > 1/2$ konvergiert die letzte Reihe dann, und nur dann, wenn $\sum_{i \in I} w_i(a_{i1})$ konvergiert und $\bar{x} = a_{i1}$ gilt bis auf endlich viele Ausnahmen i. Damit ist der Satz bewiesen.

Aus diesem Satz folgt nun eine Verschärfung eines Teiles unseres Satzes 2.3.4 in [3b] bezüglich Bed. (B), nämlich:

3.9.2. Satz: Vor.: *Es seien* $(\mathfrak{F}_i, w_i)$, $i \in I$, $\mathfrak{m}_I = \aleph_0$, *W-Felder. Es gelte:* (B*) *Es gibt* $x_i \in \mathfrak{F}_i$ *mit* $w_i(x_i) \leqq 1/2$ *aber divergenter Reihe* $\sum_{i \in I'} w_i(x_i)$, $I' \subset I$ *und* $\mathfrak{m}_{I'} = \aleph_0$.

Beh.: *Das W-Produktfeld* $(\overline{\Phi}, \pi) = \underset{i \in I}{P} (\mathfrak{F}_i, w_i)$ *ist atomfrei.*

M. a. W. *Sind* $(\mathfrak{F}_i, w_i)$ *empirische W-Felder, die* (B*) *erfüllen, so ist auch* $(\overline{\Phi}, \pi)$ *empirisch vom Typus* I.

Anmerkung: Aus (B) im Satz 2.3.4 [3b] folgt (B*) des vorliegenden Satzes, aber nicht umgekehrt; denn setzen wir z. B. $w_n(x_n) = 1 : (1 + n)$, so ist (B*) erfüllt, aber nicht (B).

Beweis des Satzes 3.9.2: Wir bilden die Booleschen Verbände $\mathfrak{F}_i^* = (\theta, x_i, \bar{x}_i, e)$ und daraus die W-Felder $(\mathfrak{F}_i^*, w_i)$ für alle $i \in I'$. Nach Satz 3.9.1 ist $(\overline{\Phi}^*, \pi^*) = \underset{i \in I'}{P} (\mathfrak{F}_i^*, w_i)$ vom Typus I., also atomfrei und isometrisch zu einem W-Unterfeld von $(\overline{\Phi}, \pi)$, so daß $(\overline{\Phi}, \pi)$ keine Atome besitzen kann.

3.10. Unser Satz 3.9.1 beantwortet nicht die Frage, ob man durch geeignete Wahl der Wahrscheinlichkeiten $w_i(a_{i1}) \leqq 1/2$ erreichen kann, daß $(\overline{\Phi}, \pi)$ von einem bestimmten Typus II. bzw. III. wird.

Wir bemerken dazu nur: Diese Frage besitzt dann und nur dann eine bejahende Antwort, wenn die $w_i(a_{i1}) \leqq 1/2$ folgendermaßen gewählt werden könnten: Es konvergiert $\sum_{i \in I} w_i(a_{i1})$; außerdem sind alle diejenigen unendlichen Produkte, die durch formale distributive Entwicklung aus

$$\prod_{i \in I} (w_i(a_{i1}) + w_i(a_{i2})) \text{ mit } a_{i2} = e - a_{i1}$$

entstehen und konvergent sind, Glieder einer Reihe mit einer

Summe kleiner bzw. gleich 1. Die Gesamtheit der konvergenten unendlichen Produkte ist nach Satz 3.9.1 nicht leer, weil $\sum_{i \in I} w_i(a_{i1})$ konvergiert, und höchstens abzählbar, weil jedes W-Feld $(\overline{\Phi}, \pi)$ höchstens abzählbar viele Atome besitzen kann. Von den überabzählbar vielen möglichen unendlichen Produkten können also höchstens abzählbar viele konvergieren und Atome definieren, alle übrigen divergieren gegen Null. Die Summe der Wahrscheinlichkeiten dieser Atome ist aber gleich 1, wie Herr F. Grummich in einer in Vorbereitung befindlichen Arbeit bewiesen hat (s. auch [7]). Wir können also in der Beh. des Satzes 3.9.1. die Aussage (1) ersetzen durch die Aussage:

1*) *Das W-Produktfeld* $(\overline{\Phi}, \pi)$ *ist vom Typus* III.

Literatur

1. Marcinkiewicz, J. et Zygmund, A., Sur les fonctions independantes, Fund. Math. 29 (1937) 60–90.

2. Denjoy, A., Sur les variables ponderes multipliables de M. Cantelli. C. r. Acad. Sci., Paris 196 (1933) 1712–1714.

3. Kappos, D. A., a) Zur mathematischen Begründung der Wahrscheinlichkeitstheorie, SitzBer. Bayer. Akad. d. Wiss. math.-nat. Klasse 1948 S. 309–320. b) Über die Unabhängigkeit in der Wahrscheinlichkeitstheorie, ebenda 1950 S. 157–185.

4. Birkhoff, G., Lattice Theory, New York 1948.

5. Sikorski, R., The integral in a boolean algebra, Colloq. math. 2 (1949) 20–26.

6. Kakutani, S. und Oxtoby, J. C., Construction of a non separable invariant extension of the Lebesgue measure space, Annals of Math. 52 (1950).

7. Borel, É., Sur les probabilités, denobrables et leurs applications arithmétiques. Rend. del Circolo Mat. d. Palermo 26 (1909) S. 247–271.