

Sitzungsberichte

der

mathematisch-naturwissenschaftlichen

Klasse

der

Bayerischen Akademie der Wissenschaften

zu München

Jahrgang 1950

München 1951

Verlag der Bayerischen Akademie der Wissenschaften

In Kommission bei der C. H. Beck'schen Verlagsbuchhandlung München

Die zweite Randwertaufgabe der Potentialtheorie für Kreis und Kugel

Von Hans Bucerius in München

Vorgelegt von Herrn A. Sommerfeld am 13. Januar 1950

Mit einer Figur

Während man für die erste Randwertaufgabe der ebenen und räumlichen Potentialtheorie die Poissonschen Integraldarstellungen der Lösungen für Kreis und Kugel kennt, findet man die entsprechenden Lösungen für die zweite Randwertaufgabe nur für die Kugel bei F. Neumann mit Hilfe einer „charakteristischen Funktion“ abgeleitet. Obgleich sich der ebene Fall formal noch einfacher gestaltet als bei der Kugel, findet man die Lösung jedenfalls nicht in Lehrbüchern, anscheinend auch sonst nicht in der Literatur. Der Grund dafür ist wohl darin zu suchen, daß der Begriff der erweiterten Greenschen Funktion zu wenig Beachtung gefunden hat. Denn bei der zweiten Randwertaufgabe der Potentialtheorie versagt aus mathematisch und physikalisch leicht ersichtlichen Gründen die übliche Definition der gewöhnlichen Greenschen Funktion.

§ 1. Definition der erweiterten Greenschen Funktion

Wir beginnen mit dem ebenen Falle des log. Potentials und fragen allgemeiner nach derjenigen Lösung der Differentialgleichung $\Delta u + f = 0$ für ein Kreisgebiet, welche am Rande eine vorgeschriebene Normalableitung $\partial u / \partial n$ aufweist. Der Ansatz einer gewöhnlichen Greenschen Funktion als Lösung von $\Delta u = 0$ mit logarithmischer Singularität im Gebiet und Erfüllung der Randbedingung versagt, mathematisch weil eine nicht identisch verschwindende, reguläre Lösung des homogenen Problems existiert, die die Randbedingung $\partial u / \partial n = 0$ erfüllt, nämlich $u_0 = \text{const.}$, physikalisch weil eine Singularität im Inneren nur im Grenzfall eines unendlich ausgedehnten Gebietes am Rande eine verschwindende Normalableitung anzunehmen erlaubt, bei einem endlichen Gebiet aber eine Gegenkraft vorhanden sein muß, um am Rande ein Verschwinden der Normalableitung des Potentials u zu ermöglichen.

Die notwendige Erweiterung des Begriffs der Greenschen Funktion scheint zuerst W. Stekloff¹ gegeben zu haben, später D. Hilbert². Man definiert eine Funktion $\bar{G}(P, Q)$ des Gebietes gemäß den Bedingungen

$$(1) \quad \begin{aligned} \Delta \bar{G}(P, Q) &= \frac{2\pi}{F} \quad (F \text{ Flächeninhalt des Gebietes}) \\ \partial \bar{G}(P, Q) / \partial n &= 0 \quad (\text{am Rande } S \text{ des Gebietes}). \end{aligned}$$

Dabei habe $\bar{G}$ in F eine Singularität

$$\log \frac{1}{r_{PQ}},$$

und die noch willkürliche additive Konstante werde durch

$$(2) \quad \int_F \bar{G}(P, Q) dF_P = 0$$

mit Q als beliebigem Punkt in $F + S$ festgelegt. Wir suchen nämlich zweckmäßig die allgemeine Lösung des Problems in der Form

$$u = u_0 + u^*$$

mit der Separierungsvorschrift

$$(3) \quad \int_F u_0 u^*(P) dF_P = 0$$

d. h. verlangen Orthogonalität von u_0 zu u^* . Aus der Greenschen Formel (n = innere Normale am Rande S)

$$(4) \quad \int_F (\bar{G} \cdot \Delta u^* - u^* \cdot \Delta \bar{G}) dF = \int_S \left(u^* \frac{\partial \bar{G}}{\partial n} - \bar{G} \frac{\partial u^*}{\partial n} \right) dS$$

folgt sodann für $\Delta u + f = 0$

$$(5) \quad 2\pi u^*(P) = \int_F \bar{G}(P, Q) f(Q) dF_Q - \int_S \bar{G}(P, Q) \left(\frac{\partial u^*}{\partial n} \right)_Q dS_Q.$$

¹ Ann. de l'Ec. Norm. [3] 19 [1902], nicht zugänglich, Zitat nach L. Lichtenstein, Enc. d. Math. II C 3, Potentialtheorie S. 252.

² Gött. Nachr. [1904] H. 3 S. 213-259.

§ 2. Bestimmung von $\bar{G}$ für den Kreis

Aufpunkt und Quellpunkt sollen die Polarkoordinaten $P(r, \varphi)$, $Q(r', \varphi')$ im Kreis mit dem Radius R haben. Eine partikuläre Lösung von (1)

$$\Delta \bar{G}(P, Q) = 2/R^2$$

ist gegeben durch

$$(6) \quad \frac{2}{R^2} \frac{r_P^2 Q}{4} = \frac{1}{2R^2} (r^2 + r'^2 - 2rr' \cos(\varphi - \varphi')),$$

die als Potential einer elastischen Abstoßungskraft (oder auch einer Zentrifugalkraft) aufgefaßt werden kann. Die allgemeine reguläre Potentialfunktion im Kreise, die bezüglich P und Q symmetrisch ist, besitzt die Reihendarstellung

$$(7) \quad \sum_{n=0}^{\infty} a_n \left(\frac{rr'}{R^2} \right)^n \cos n(\varphi - \varphi')$$

mit unbestimmten Koeffizienten a_n . Bekanntlich hat die Definition (1) und (2) die Symmetriebeziehung $\bar{G}(PQ) = \bar{G}(QP)$ zur Folge. Für $\bar{G}$ können wir daher den Ansatz machen

$$\begin{aligned} \bar{G}(r, \varphi; r', \varphi') = & \quad (8) \\ = & \frac{1}{2R^2} (r^2 + r'^2 - 2rr' \cos(\varphi - \varphi')) - \frac{1}{2} \log \left| \frac{r^2 + r'^2 - 2rr' \cos(\varphi - \varphi')}{R^2} \right| \\ & + \sum_{n=0}^{\infty} a_n \left(\frac{rr'}{R^2} \right)^n \cos n(\varphi - \varphi'). \end{aligned}$$

Die Randbedingung dient zur Festlegung der a_n . Zu diesem Zwecke merken wir noch die Reihenentwicklung

$$(9) \quad -\frac{1}{2} \log \left| \frac{r^2 + r'^2 - 2rr' \cos(\varphi - \varphi')}{R^2} \right| = \begin{cases} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \left(\frac{r}{r'} \right)^n \cos n(\varphi - \varphi') - \log \frac{r'}{R}, & (r < r' \leq R) \\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \left(\frac{r'}{r} \right)^n \cos n(\varphi - \varphi') - \log \frac{r}{R}, & (R \geq r > r') \end{cases}$$

an. Dann liefert

$$\left(\frac{\partial \bar{G}}{\partial r} \right)_{r=R} = -\frac{r'}{R^2} \cos(\varphi - \varphi') + \sum_{n=1}^{\infty} (na_n - 1) \frac{r'^n}{R^{n+1}} \cos n(\varphi - \varphi') = 0 \quad (10)$$

die Koeffizientenbestimmung

$$(11) \quad a_1 = 2, \quad a_n = \frac{1}{n} \quad (n = 2, 3, \dots),$$

während a_0 unbestimmt bleibt. Die Einsetzung der a_n in (8) ergibt

$$(12) \quad \begin{aligned} \bar{G}(r, \varphi; r', \varphi') = & \frac{r^2 + r'^2}{2R^2} - \frac{1}{2} \log \left| \frac{r^2 + r'^2 - 2rr' \cos(\varphi - \varphi')}{R^2} \right| \\ & - \frac{1}{2} \log \frac{R^2 + \left(\frac{rr'}{R}\right)^2 - 2rr' \cos(\varphi - \varphi')}{R^2} \\ & + a_0. \end{aligned}$$

Aus der Bedingung (2), hier beim Kreis

$$\int_0^{2\pi} \int_0^R \bar{G}(r, \varphi; r', \varphi') r dr d\varphi = 0,$$

findet man schließlich

$$a_0 = -\frac{3}{4}.$$

Der erste Term in (12) ist das zusätzliche elastische Abstoßungspotential, der zweite enthält die geforderte Singularität, der reguläre dritte Term hängt mit dem Abstand des Spiegelpunktes $\bar{P}$ von P am Kreise mit den Polarkoordinaten $\bar{P}\left(\frac{R^2}{r}, \varphi\right)$ durch die Beziehung zusammen

$$R^2 + \left(\frac{rr'}{R}\right)^2 - 2rr' \cos(\varphi - \varphi') = \left(\frac{r}{R} \cdot Q\bar{P}\right)^2.$$

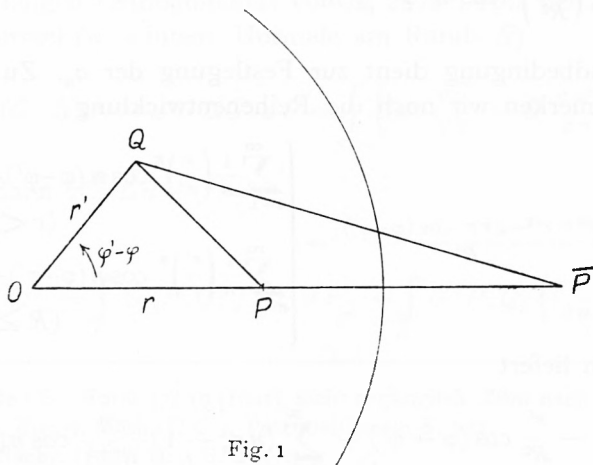


Fig. 1

§ 3. Lösung der Randwertaufgabe

Zur Lösung der zweiten Randwertaufgabe von $\Delta u + f = 0$ für den Kreis ist (12) in (5) einzutragen:

$$(13) \quad \left\{ \begin{aligned} 2\pi u^*(r, \varphi) &= \int_0^{2\pi} \int_0^R \bar{G}(r, \varphi; r', \varphi') f(r', \varphi') r' dr' d\varphi' - \\ &- \int_0^{2\pi} \bar{G}(r, \varphi; R, \varphi') \left(-\frac{\partial u^*(R, \varphi')}{\partial r} \right) R d\varphi'. \end{aligned} \right.$$

Wir setzen für die gegebene Normalableitung, die als stetige, periodische Funktion von φ angenommen werde, $g(\varphi) = g(\varphi + 2\pi)$,

$$g(\varphi) = - \left(\frac{\partial u^*(r, \varphi)}{\partial r} \right)_{r=R}$$

und beachten, daß im Falle der Potentialgleichung $\Delta u^* = 0$ die Randwerte $g(\varphi)$ an die Bedingung

$$(14) \quad \int_0^{2\pi} g(\varphi) d\varphi = 0$$

gebunden sind. Wegen (14) und

$$(15) \quad \bar{G}(r, \varphi; R, \varphi') = -\frac{1}{4} + \frac{1}{2} \frac{r^2}{R^2} - \log \left(1 - \frac{2r}{R} \cos(\varphi - \varphi') + \frac{r^2}{R^2} \right)$$

liefert (13)

$$(16) \quad u^*(r, \varphi) = \frac{R}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log \left(1 - \frac{2r}{R} \cos(\varphi - \varphi') + \frac{r^2}{R^2} \right) g(\varphi') d\varphi'$$

als Lösung der zweiten Randwertaufgabe für den Kreis.

§ 4. Die zweite Randwertaufgabe für die Kugel

Die analoge Aufgabe für die Kugel beim Newtonschen Potential ist von F. Neumann mit Hilfe einer sog. charakteristischen Funktion (vgl. Riemann-Weber Bd. I p. 580) für $\Delta u = 0$ gelöst worden. Diese Funktion ist nicht identisch mit der erweiterten Greenschen Funktion.

Es existiert wiederum keine gewöhnliche Greensche Funktion des Problems, da $u_0 = \text{const.}$ eine reguläre Lösung von $\Delta u = 0$ mit verschwindender Normalableitung am Rande des räumlichen Gebietes darstellt. Wir suchen eine Lösung u^* , die sich mit u_0 zu der allgemeinen Lösung $u = u_0 + u^*$ zusammensetzt und durch die Orthogonalitätsbedingung

$$(17) \quad \int_V u_0 u^* dV = 0$$

von u_0 separiert werde.

Die Definition von $\bar{G}(P, Q)$ erfolgt durch die Gleichungen

$$(18) \quad \begin{aligned} \Delta \bar{G}(P, Q) &= \frac{4\pi}{V} \quad (V = \text{Volumen des Gebietes}) \\ \frac{\partial \bar{G}(P, Q)}{\partial n} &= 0 \quad (\text{auf } F = \text{Oberfläche des Geb.}) \end{aligned}$$

$\bar{G}(P, Q)$ habe die Singularität

$$\frac{1}{r_{PQ}}$$

in V . Wir machen $\bar{G}$ eindeutig durch die Forderung der Orthogonalität zu u_0 oder

$$(19) \quad \int_V \bar{G}(P, Q) dV_P = 0.$$

Es besteht dann die Symmetriebeziehung $\bar{G}(P, Q) = \bar{G}(Q, P)$. Dann folgt aus der Greenschen Formel (n ist innere Normale)

$$(20) \quad \int_V (\bar{G} \cdot \Delta u^* - u^* \Delta \bar{G}) dV = \int_F \left(u^* \frac{\partial \bar{G}}{\partial n} - \bar{G} \frac{\partial u^*}{\partial n} \right) dF$$

als Lösung der 2. Randwertaufgabe der Gleichung $\Delta u^* + f = 0$

$$(21) \quad 4\pi u^*(P) = \int_V \bar{G}(P, Q) f(Q) dV_Q - \int_F \bar{G}(P, Q) \frac{\partial u^*(Q)}{\partial n} dF_Q.$$

Speziell bei der Kugel mit den räumlichen Polarkoordinaten $P(r, \varphi, \vartheta)$ und $Q(r', \varphi', \vartheta')$ haben wir als partikuläre Lösung von

$$\Delta \bar{G}(P, Q) = 3/R^3$$

wiederum das Potential einer elastischen Abstoßungskraft

$$(22) \quad \frac{3}{R^3} \cdot \frac{r^2 P_Q}{6} = \frac{1}{2R^3} (r^2 - 2rr' \cos \gamma + r'^2);$$

$$\cos \gamma = \cos \vartheta \cos \vartheta' + \sin \vartheta \sin \vartheta' \cos (\varphi - \varphi'),$$

als Gegenkraft der punktförmigen Ladung im Inneren der Kugel.

Für $\bar{G}$ kann dann der Reihenansatz gemacht werden

$$(23) \quad \bar{G}(P, Q) = \frac{r^2 + r'^2 - 2rr' \cos \gamma}{2R^3} + \frac{1}{|\sqrt{r^2 + r'^2 - 2rr' \cos \gamma}|}$$

$$+ \frac{1}{R} \sum_0^{\infty} a_n \left(\frac{rr'}{R^2} \right)^n P_n(\cos \gamma)$$

mit $P_n(\cos \gamma)$ als Legendreschen Kugelfunktionen und unbestimmten Koeffizienten a_n , welcher der Symmetriebeziehung entspricht. Bei Beachtung der Reihenentwicklung

$$(24) \quad \frac{1}{|\sqrt{r^2 + r'^2 - 2rr' \cos \gamma}|} = \begin{cases} \frac{1}{r} \sum_0^{\infty} \left(\frac{r'}{r} \right)^n P_n(\cos \gamma), & r' < r \leq R \\ \frac{1}{r'} \sum_0^{\infty} \left(\frac{r}{r'} \right)^n P_n(\cos \gamma), & R \geq r' > r \end{cases}$$

ergeben sich die a_n aus der Randbedingung

$$(25) \quad \left(\frac{\partial \bar{G}}{\partial r} \right)_{r=R} = -\frac{r' \cos \gamma}{R^3} + \sum_1^{\infty} \frac{r'^n}{R^{n+2}} (na_n - (n+1)) P_n(\cos \gamma) = 0,$$

das heißt

$$(26) \quad a_1 = 3, \quad a_n = 1 + \frac{1}{n} \quad (n = 2, 3, \dots),$$

während a_0 unbestimmt bleibt. Dies in (23) eingetragen liefert

$$(27) \quad \bar{G}(P, Q) = a_0$$

$$+ \frac{r^2 + r'^2}{2R^3} + \frac{1}{|\sqrt{r^2 + r'^2 - 2rr' \cos \gamma}|} + \frac{1}{R} \sum_1^{\infty} \left(1 + \frac{1}{n} \right) \left(\frac{rr'}{R^2} \right)^n P_n(\cos \gamma).$$

Die Reihenentwicklung kann einerseits aus (24) entnommen werden; andererseits ist

$$\begin{aligned} \sum_1^{\infty} \frac{1}{n} \left(\frac{rr'}{R^2} \right)^n P_n(\cos \gamma) &= \int_0^{rr'/R^2} \left(\frac{1}{\sqrt{1-2x \cos \gamma + x^2}} - 1 \right) \frac{dx}{x} \\ &= \log 2 - \log \left(1 - \frac{rr'}{R^2} \cos \gamma + \sqrt{1 - \frac{2rr'}{R^2} \cos \gamma + \left(\frac{rr'}{R^2} \right)^2} \right). \end{aligned}$$

Es ist ersichtlich, daß wiederum der Abstand $Q\bar{P}$ des Spiegelpunktes $\bar{P} \left(\frac{R^2}{r}, \vartheta, \varphi \right)$ von P an der Kugel eingeht. Die Green'sche Funktion der Kugel lautet damit

$$\begin{aligned} \bar{G}(r, \vartheta, \varphi; r', \vartheta', \varphi') &= a_0 + \frac{1}{R} (\log 2 - 1) + \frac{r^2 + r'^2}{2R^3} \\ (28) \quad &+ \frac{1}{|\sqrt{r^2 + r'^2 - 2rr' \cos \gamma}|} + \frac{1}{\sqrt{R^2 + \left(\frac{rr'}{R} \right)^2 - 2rr' \cos \gamma}} \\ &- \frac{1}{R} \log \left(1 - \frac{rr' \cos \gamma}{R^2} + \sqrt{1 + \left(\frac{rr'}{R^2} \right)^2 - \frac{2rr'}{R^2} \cos \gamma} \right). \end{aligned}$$

Die Bedingung (19) führt auf $a_0 = -\frac{9}{5R}$.

Sie weicht von der Neumannschen charakteristischen Funktion wesentlich durch das elastische Abstoßungspotential ab. Die Lösung der zweiten Randwertaufgabe zur Diff.-Gl. $\Delta u^* + f = 0$ lautet daher für die Kugel nach (21)

$$\begin{aligned} (29) \quad 4\pi u^*(r, \vartheta, \varphi) &= \\ &= \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \int_0^R \bar{G}(r, \vartheta, \varphi; r', \vartheta', \varphi') f(r', \vartheta', \varphi') r'^2 dr' \sin \vartheta' d\vartheta' d\varphi' \\ &- \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \bar{G}(r, \vartheta, \varphi; R, \vartheta', \varphi') g(\vartheta', \varphi') R^2 \sin \vartheta' d\vartheta' d\varphi'. \end{aligned}$$

Wir haben dabei für die vorgegebenen Randwerte

$$-\left(\frac{\partial u^*(r, \vartheta, \varphi)}{\partial r} \right)_{r=R} = g(\vartheta, \varphi)$$

geschrieben. Speziell für $\Delta u^* = 0$ ergibt sich zunächst aus (28)

$$\begin{aligned}
 \bar{G}(r, \vartheta, \varphi; R, \vartheta', \varphi') &= \left(\log 2 - \frac{23}{10} \right) \frac{1}{R} + \frac{1}{2} \frac{r^2}{R^3} + \frac{2}{|\sqrt{r^2 + R^2 - 2Rr \cos \gamma}|} \\
 (30) \quad &- \frac{1}{R} \log \left(1 - \frac{r \cos \gamma}{R} + \sqrt{1 - \frac{2r}{R} \cos \gamma + \frac{r^2}{R^2}} \right).
 \end{aligned}$$

Da aber bei der Potentialgleichung von $g(\vartheta, \varphi)$

$$(31) \quad \int_0^{2\pi} \int_0^\pi g(\vartheta, \varphi) \sin \vartheta \, d\vartheta \, d\varphi = 0$$

gefordert werden muß, resultiert die Lösung der zweiten Randwertaufgabe für die Kugel

$$\begin{aligned}
 u^*(r, \vartheta, \varphi) &= \quad (32) \\
 \frac{R^2}{4\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^\pi &\left(\frac{1}{R} \log \left(1 - \frac{r \cos \gamma}{R} + \sqrt{1 - \frac{2r}{R} \cos \gamma + \frac{r^2}{R^2}} \right) - \frac{2}{|\sqrt{R^2 + r^2 - 2Rr \cos \gamma}|} \right) \\
 &\cdot g(\vartheta', \varphi') \sin \vartheta' \, d\vartheta' \, d\varphi'
 \end{aligned}$$

in Übereinstimmung mit dem Neumannschen Resultat. Die dort verwendete „charakteristische“ Funktion führt aber nicht auf die Integralgleichung (29).

§ 5. Zusätzliche Bemerkungen

Es sollen noch einige Folgerungen aus Gl. (16) gezogen werden. Bildet man in (16) die Ableitung nach φ und macht den Grenzübergang $r \rightarrow R$, so folgt

$$(33) \quad \frac{\partial u^*(R, \varphi)}{R \partial \varphi} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \cotg \left(\frac{\varphi - \varphi'}{2} \right) g(\varphi') \, d\varphi'.$$

Lösen wir die zweite Randwertaufgabe für die konjugierte Potentialfunktion $v^*(r, \varphi)$ mit vorgeschriebener stetiger Normalableitung am Kreisrand

$$h(\varphi) = - \left(\frac{\partial v^*(r, \varphi)}{\partial r} \right)_{r=R},$$

für welche

$$(14a) \quad \int_0^{2\pi} h(\varphi) d\varphi = 0$$

gelten muß, so besteht die analoge Integraldarstellung für $v^*(r, \varphi)$ als Funktion von $h(\varphi)$, und die Ableitung nach φ führt entsprechend (33) für $r \rightarrow R$ auf

$$(34) \quad \frac{\partial v^*(R, \varphi)}{R \partial \varphi} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \cotg \left(\frac{\varphi - \varphi'}{2} \right) h(\varphi') \cdot d\varphi'.$$

Bei konjugierten Potentialfunktionen ist aber

$$\begin{aligned} -g(\varphi) &= \frac{\partial u^*(R, \varphi)}{\partial r} = \frac{\partial v^*(R, \varphi)}{R \partial \varphi} \\ h(\varphi) &= -\frac{\partial v^*(R, \varphi)}{\partial r} = \frac{\partial u^*(R, \varphi)}{R \partial \varphi}. \end{aligned}$$

Dies in (33) und (34) eingetragen ergibt die Hilbertschen reziproken Integralgleichungen¹

$$(35) \quad \begin{aligned} g(\varphi) &= -\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \cotg \left(\frac{\varphi - \varphi'}{2} \right) h(\varphi') d\varphi' \\ h(\varphi) &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \cotg \left(\frac{\varphi - \varphi'}{2} \right) g(\varphi') d\varphi' \end{aligned}$$

unter den Nebenbedingungen (14) und (14a).

Auch die Hilbertschen Relationen (loc. cit. p. 253, Vorzeichenfehler daselbst) sind aus (16) durch den Grenzübergang $r \rightarrow R$ abzulesen:

$$(36) \quad \begin{aligned} u^*(R, \varphi) &= -\frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \log 2 \left| \sin \frac{\varphi - \varphi'}{2} \right| \frac{dv^*(R, \varphi')}{d\varphi'} d\varphi' \\ v^*(R, \varphi) &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \log 2 \left| \sin \frac{\varphi - \varphi'}{2} \right| \frac{du^*(R, \varphi')}{d\varphi'} d\varphi'. \end{aligned}$$

¹ Die Integrale sind als Cauchysche Hauptwerte aufzufassen.

Differentiiert man (16) nach r und läßt $r \rightarrow R$ gehen, so entsteht eine Limesrelation

$$(37) \quad -\lim_{r \rightarrow R} \frac{\partial u^*(r, \varphi)}{\partial r} = g(\varphi) = \lim_{r \rightarrow R} \frac{R}{r} \frac{R^2 - r^2}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{g(\varphi') d\varphi'}{R^2 - 2Rr \cos(\varphi - \varphi') + r^2},$$

die aus dem Poissonschen Integral für die Lösung der ersten Randwertaufgabe bekannt ist.

Die analoge Relation für die Kugel findet man durch Differentiation von (32) nach r und $r \rightarrow R$

$$(38) \quad -\lim_{r \rightarrow R} \frac{\partial u^*(r, \vartheta, \varphi)}{\partial r} = g(\vartheta, \varphi) \\ = \lim_{r \rightarrow R} \frac{R^2}{r} \frac{R^2 - r^2}{4\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \frac{g(\vartheta', \varphi') \sin \vartheta' d\vartheta' d\varphi'}{(R^2 + r^2 - 2Rr \cos \gamma)^{3/2}}.$$