# Sitzungsberichte

der

mathematisch-naturwissenschaftlichen

Klasse

der

Bayerischen Akademie der Wissenschaften

zu München

Jahrgang 1949

München 1950

Verlag der Bayerischen Akademie der Wissenschaften

In Kommission bei der C. H. Beck'schen Verlagsbuchhandlung München

# Über die Hessesche Fläche einer allgemeinen Fläche dritter Ordnung

Von Josef Lense in München

Vorgelegt am 8. Juli 1949

## § 1

$L_\mu(x) = \sum_{\nu=1}^{4} c_{\mu\nu}\, x_\nu$ ($\mu = 1, 2, 3, 4, 5$) seien fünf Linearformen. Deutet man die $x_\nu$ als homogene Punktkoordinaten im projektiven Raum $R_3$, so sollen die Gleichungen

$$L_\mu(x) = 0 \tag{1}$$

fünf Ebenen darstellen, von denen keine vier durch einen Punkt gehen, also ein Fünfflach mit zehn Ecken und zehn Kanten festlegen.

Wir betrachten die Fläche dritter Ordnung

$$\sum_{\mu=1}^{5} [L_\mu(x)]^3 = 0. \tag{2}$$

Wählen wir das Koordinatensystem so, daß die Ebenen des Koordinatenvierflachs und die Einheitsebene gerade unsere fünf Ebenen sind, und führen neben den vier Koordinaten $x_\nu$ noch eine fünfte durch die Gleichung

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 0 \tag{3}$$

ein, so können wir die Fläche dritter Ordnung in der Gestalt

$$\sum_{\mu=1}^{5} a_\mu\, x_\mu^3 = 0 \tag{4}$$

voraussetzen, wobei sämtliche $a_\mu$ von null verschieden sind. Die Koordinaten $x_1, x_2, x_3, x_4, x_5$ pflegt man als Sylvestersche Pentaederkoordinaten zu bezeichnen.

Es sind folgende Tatsachen bekannt (siehe z. B. den Artikel über spezielle algebraische Flächen von W. Fr. Meyer in der

Enzyklopädie der mathematischen Wissenschaften oder das Buch von G. Salmon über analytische Geometrie des Raumes, deutsch bearbeitet von W. Fiedler, II. Teil, 3. Aufl., Leipzig 1880, B. G. Teubner): Diejenigen Punkte des Raumes, deren in bezug auf die Fläche (4) gebildete quadratische Polare in ein Ebenenpaar zerfällt, sind genau die zehn Ecken unseres Fünfflachs, wobei die quadratische Polare einer Ecke in zwei Ebenen zerfällt, die sich in der gegenüberliegenden Kante des Fünfflachs schneiden. Das Fünfflach wird das Sylvestersche Fünfflach der Fläche genannt. Die Hessesche Fläche der Fläche dritter Ordnung ist von der vierten Ordnung und geht durch die Ecken und Kanten des Fünfflachs, hat daher in den Ecken konische Punkte. Ihre Gleichung lautet:

$$\sum_{\mu=1}^{5} \frac{1}{a_\mu x_\mu} = 0. \tag{5}$$

Die Gleichung irgend einer Fläche dritter Ordnung läßt sich in der Form

$$\sum a_{\lambda\mu\nu}\, x_\lambda\, x_\mu x_\nu = 0 \tag{6}$$

schreiben, wobei die Summe über sämtliche Kombinationen der Zeiger $\lambda$, $\mu$, $\nu$ von 1 bis 4 erstreckt ist und Koeffizienten $a_{\lambda\mu\nu}$, die sich nur durch Vertauschung der Zeiger von einander unterscheiden, gleich sein sollen. Die quadratische Polare des Punktes $(y_1, y_2, y_3, y_4)$ in bezug auf die Fläche (6) hat dann die Gleichung

$$\sum a_{\lambda\mu\nu}\, y_\lambda\, x_\mu\, x_\nu = 0. \tag{7}$$

Soll diese in ein Paar von Ebenen zerfallen und ist $(z_1, z_2, z_3, z_4)$ ein Punkt der Schnittlinie, so ist die Polarebene des Punktes $z$ in bezug auf die Fläche (7) unbestimmt, d. h. es gilt

$$\sum a_{\lambda\mu\nu}\, y_\lambda\, z_\mu = 0 \quad (\nu = 1, 2, 3, 4). \tag{8}$$

Wir wollen nun voraussetzen, daß die Fläche (6) ein gegebenes Fünfflach zum Sylvesterschen Fünfflach hat und gleichzeitig das Koordinatensystem so wählen, daß die vier Koordinatenebenen und die Einheitsebene mit den Seitenflächen des Fünfflachs zusammenfallen. Auf der dem Eckpunkt (0, 0, 0, 1) gegenüberliegenden Kante (Schnittlinie der Ebenen $x_4 = 0$ und $x_5 = 0$) liegen die Punkte (1, —1, 0, 0) und (1, 0, —1, 0). Wählen wir diese als Punkt $z$ und den Eckpunkt als Punkt $y$, so müssen ihre Koordinaten die Gleichung (8) befriedigen, d. h. wir erhalten

$$a_{41\nu} = a_{42\nu} = a_{34\nu}. \tag{9}$$

Ähnliche Überlegungen mit den übrigen Eckpunkten liefern somit das Ergebnis; daß alle Koeffizienten $a_{\lambda\mu\nu}$ einander gleich sein müssen, höchstens mit Ausnahme derjenigen, welche lauter gleiche Zeiger haben. Die allgemeinste quaternäre kubische Form, deren Koeffizienten diese Eigenschaft haben, bekommt man in folgender Weise: Man erhebt $x_1 + x_2 + x_3 + x_4$ in die dritte Potenz und fügt noch die mit beliebigen Koeffizienten versehenen Kuben der $x_\nu$ hinzu. Damit ergibt sich aber für die Fläche (6) die Gestalt (4), wenn man noch (3) berücksichtigt.

## § 2

A. Clebsch hat gezeigt (siehe die oben genannte Literatur), wie man das Sylvestersche Fünfflach einer Fläche dritter Ordnung finden kann, und damit das Verfahren angegeben, mit Hilfe dessen sich die Flächengleichung auf die Gestalt (2) bringen läßt. Will man nur die Möglichkeit einer derartigen Darstellung einsehen, so kann man in folgender Weise vorgehen (ich schließe mich dabei einem Gedankengang an, den G. Kohn in seinen Vorlesungen über Kurven und Flächen dritter Ordnung benützt hat, die er im Winterhalbjahr 1910/11 an der Universität Wien gehalten hatte): Die allgemeine Gleichung (6) einer Fläche dritter Ordnung enthält zwanzig homogene Konstanten, ebenso die Gleichungsform (2). Da ein gemeinsamer konstanter Faktor willkürlich bleibt, ergeben sich durch Koeffizientenvergleichung neunzehn homogene Gleichungen dritten Grades zur Bestimmung der $c_{\mu\nu}$. Ihre Auflösbarkeit ist gesichert, wenn wir nachweisen, daß die Funktionaldeterminante der neunzehn Gleichungspolynome in bezug auf die neunzehn Verhältnisse der $c_{\mu\nu}$ nicht identisch verschwindet. Das ist tatsächlich der Fall.

Verschwände nämlich diese Funktionaldeterminante identisch, so würde sich in den Fällen, in denen eine derartige Darstellung möglich ist (und solche gibt es, da man ja nur von Flächen der Gestalt (2) auszugehen braucht), für eine solche Fläche nicht eine, sondern unendlich viele Darstellungen der Form (2) ergeben, die sich nicht nur durch konstante Faktoren unterscheiden, da ja dann eine oder mehrere der neunzehn Gleichungen Folgen der übrigen sind. Das ist aber unmöglich. Denn in der Darstellung (2) müssen die Ebenen (1) die Seitenflächen eines Sylvesterschen Fünfflachs sein und es gibt nur ein solches Fünfflach für die gegebene Fläche. Die Funktionaldeterminante kann also nicht identisch verschwinden, d. h. die Gleichung einer allgemeinen Fläche dritter Ordnung, bei der zwischen den Koeffizienten $a_{\lambda\mu\nu}$ keine Beziehungen bestehen, läßt sich immer eindeutig auf die Gestalt bringen, wobei von Realitätsunterscheidungen abgesehen wurde.

## § 3

Wir haben früher erwähnt, daß die Hessesche Fläche in den Eckpunkten des Sylvesterschen Fünfflachs konische Punkte hat. Wir fragen uns nun: Wie lautet die Gleichung einer Fläche vierter Ordnung, die in den zehn Eckpunkten eines gegebenen Fünfflachs Doppelpunkte hat? Die Gleichung einer Fläche vierter Ordnung können wir in der Form

$$\sum a_{\lambda\mu\nu\varrho}\, x_\lambda x_\mu x_\nu x_\varrho = 0 \tag{10}$$

schreiben, wobei die Summe über sämtliche Kombinationen der Zeiger λ, μ, ν, ρ von 1 bis 4 erstreckt ist und Koeffizienten $a_{\lambda\mu\lambda\varrho}$, die sich nur durch Vertauschung der Zeiger von einander unterscheiden, gleich sein sollen. Wenn ein Punkt $(y_1, y_2, y_3, y_4)$ Doppelpunkt der Fläche ist, müssen seine Koordinaten den vier Gleichungen genügen, die man aus (10) durch partielle Differentiation nach $x_1, x_2, x_3, x_4$ erhält, d. h. den Gleichungen

$$\sum a_{\lambda\mu\nu\varrho}\, x_\lambda x_\mu x_\nu = 0 \quad (\rho = 1, 2, 3, 4). \tag{11}$$

Wir wählen wieder das Koordinatensystem so, daß seine vier Koordinatenebenen und die Einheitsebene mit den Seitenflächen des Fünfflachs zusammenfallen. Der Eckpunkt (0, 0, 0, 1) soll

Doppelpunkt der Fläche (10) sein, also muß nach (11) $a_{444\varrho} = 0$, sein. Ähnliches gilt für die übrigen Eckpunkte, d. h. sämtliche Koeffizienten $a_{\lambda\mu\nu\varrho}$, in denen mindestens drei Zeiger gleich sind, müssen null sein. Es ist aber auch der Schnittpunkt der Ebenen $x_1 = 0, x_2 = 0, x_5 = 0$, d. h. der Punkt (0,0, 1, —1) Doppelpunkt. Hier liefern die Gleichungen (11) die Bedingungen $a_{334\varrho} = a_{344\varrho}$, also z. B.

$$a_{1344} = a_{1334} \quad \text{und} \quad a_{3344} = 0. \tag{12}$$

Mit Hilfe des Eckpunktes (1,0, 0, —1) (Schnittpunkt der Ebenen $x_2 = 0$, $x_3 = 0$, $x_5 = 0$) ergibt sich ähnlich $a_{114\varrho} = a_{144\varrho}$, also z. B. $a_{1134} = a_{1344}$, somit wegen (12) $a_{1134} = a_{3134} = a_{4134}$. Berücksichtigen wir auch die übrigen auf der Ebene $x_5 = 0$ gelegenen Eckpunkte, so können wir folgendes Ergebnis aussprechen: Alle Koeffizienten von der Gestalt $a_{\lambda\lambda\lambda\mu}$ und $a_{\lambda\lambda\mu\mu}$ sind null, ferner ist $a_{\lambda\lambda\mu\nu} = a_{\mu\lambda\mu\nu} = a_{\nu\lambda\mu\nu}$.

Die allgemeinste quaternäre biquadratische Form, deren Koeffizienten diese Eigenschaften haben, erhält man in folgender Weise: Man multipliziert $x_1 + x_2 + x_3 + x_4$ mit $c_1x_2x_3x_4 + c_2x_1x_3x_4 + c_3x_1x_2x_4 + c_4x_1x_2x_3$ und fügt dann noch $x_1x_2x_3x_4$ mit beliebigem Koeffizienten hinzu. Damit ergibt sich für die Gleichung der Hesseschen Fläche, wenn wir (3) berücksichtigen und durch $x_1x_2x_3x_4x_5$ dividieren,

$$\sum_{\mu=1}^{5} \frac{b_\mu}{x_\mu} = 0. \tag{13}$$

Vergleicht man in (13) und (5) die Koeffizienten, wobei man zuerst mit $x_1x_2x_3x_4x_5$ zu multiplizieren und (3) zu berücksichtigen hat, so folgt

$$a_\mu b_\mu = 1 \qquad (\mu = 1, 2, 3, 4, 5). \tag{14}$$

Setzen wir noch voraus, daß die Fläche vierter Ordnung nicht zerfällt, so sind sämtliche $b_\mu$ von null verschieden, und wir können folgenden Satz aussprechen: *Eine nicht zerfallende Fläche vierter Ordnung, die in den zehn Eckpunkten eines Fünfflachs Doppelpunkte hat, ist die Hessesche Fläche einer eindeutig bestimmten Fläche dritter Ordnung,* deren Sylvestersches Fünfflach das gegebene Fünfflach ist.

Während also eine Kurve dritter Ordnung ohne Doppelpunkte im allgemeinen eine Hessesche Kurve von drei derartigen Kurven dritter Ordnung ist, herrscht in der Beziehung einer Fläche dritter Ordnung zu ihrer Hesseschen Fläche in dem hier angegebenen Sinne Eindeutigkeit.