

Sitzungsberichte

der

mathematisch-naturwissenschaftlichen

Klasse

der

Bayerischen Akademie der Wissenschaften

zu München

Jahrgang 1948

München 1949

Verlag der Bayerischen Akademie der Wissenschaften

In Kommission beim Biederstein Verlag München

Eine Methode zur Bestimmung der Teilchendichte des Supraleitstromes.

Von Walther Meißner in München.

Mit einer Figur.

Vorgelegt am 12. November 1948.

Von Kikoin und Gubar¹ wurden zur Bestimmung des Verhältnisses von Ladung zu Masse der Trägerteilchen des Supraleitungsstromes Versuche angestellt, die ähnlich dem Versuch von Einstein und De Haas waren. Im folgenden soll gezeigt werden, daß die von Kikoin und Gubar gegebene Theorie ihrer Versuche unzulänglich ist und daß sich diese Versuche im Zusammenhang mit der London-Laueschens Theorie der Supraleitung² so abwandeln lassen, daß sie auch geeignet werden, um die Dichte der Trägerteilchen des Supraleitstromes zu bestimmen.

Der Versuch von Kikoin und Gubar, der unter Diskussion aller möglichen Fehlerquellen außerordentlich sorgfältig durchgeführt wurde, besteht in folgendem: Eine kleine Bleikugel von etwa 3 mm $\varnothing$ ist an einem feinen Faden aufgehängt (Fig. 1), der in der x -Richtung liegen möge. Seine Bewegung kann mit Hilfe eines an dem Gehänge angebrachten Spiegels durch einen Lichtzeiger abgelesen werden. Die Bleikugel wird zunächst auf die Temperatur des flüssigen Heliums abgekühlt, so daß sie supraleitend ist. Dann wird ein Magnetfeld in der x -Richtung eingeschaltet, wobei Oberflächenströme in der Kugel entstehen und ein Drehimpuls auf sie ausgeübt wird. Kikoin und Gubar geben für den zu erwartenden Drehimpuls eine Formel an, zu der sie folgendermaßen gelangen: Während wir ja heute wissen, daß Magnetfeld und Induktion im Innern eines reinen Supraleiters, sofern das äußere Feld nicht zu stark ist, immer Null

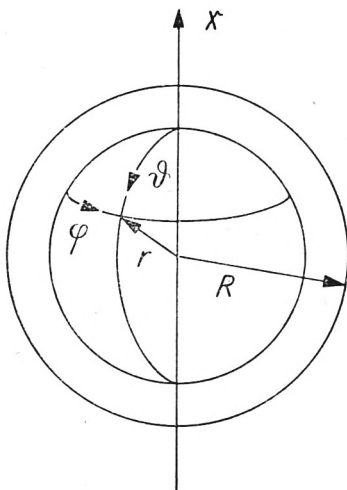
¹ J. K. Kikoin und S. W. Gubar, Journ. of Physics U.S.S.R. III, S. 333, 340.

² M. von Laue, Theorie der Supraleitung, Berlin und Göttingen 1947. *Enchen Ak. Sb.* 1948

ist, nehmen sie an, daß die Kugel beim Einschalten des Magnetfeldes gleichmäßig magnetisiert wird, so daß beim Umschalten des Magnetfeldes von $-H$ auf $+H$ eine Änderung seiner Magnetisierung um

$$\Delta M = 2\kappa VH \quad (H \text{ im elektrost. System}) \quad (1)$$

erfolgt. Die Größe κ bezeichnen sie dabei als magnetische Suszeptibilität, obwohl in diesem Falle statt des äußeren Feldes



Figur 1

H das innere Feld H_i eingesetzt werden müßte. V ist das Volumen der Kugel. Sie gehen nun weiter von der Vorstellung aus, daß ähnlich wie beim Einstein-De Haas-Effekt der Drehimpuls etwa vorhandener Elementarmagnete oder der mit einem Spin behafteten Elektronen sich bei der Ummagnetisierung um

$$\Delta G_i = - \frac{1}{g} \frac{2mc}{|e|} \Delta M \quad (e \text{ im elektrost. System}) \quad (2)$$

ändern müsse. Dabei bedeutet m die Masse, e die Ladung des Elektrons, c die Lichtgeschwindigkeit und g den Landé-Faktor. Sie nehmen weiter an, daß bei der Ummagnetisierung auf die Materie der Kugel ein (2) entgegengesetzter Drehimpuls ausgeübt werden müsse. Für die irrtümlich als Suszeptibilität bezeichnete Größe κ setzen die Verfasser später unter der Annahme,

daß im supraleitenden Blei die Permeabilität $\mu = 0$ sei, den aus der klassischen Elektrodynamik bekannten Wert $3/8 \pi$ ein, und zwar irrtümlich $+3/8 \pi$, während es in Wirklichkeit natürlich $-3/8 \pi$ heißen muß. Mit dem letzteren Wert ergibt sich als Drehimpuls auf die Kugel beim Ummagnetisieren:

$$-\Delta G_i = \Delta G_a = -\frac{1}{g} \frac{3}{2\pi} \frac{mc}{|e|} VH (H \text{ u. } e \text{ im elektrost. System})$$

oder

$$\Delta G_a = -\frac{1}{g} 6 \frac{mc}{|e|} VH \text{ (im Lorentzschen System).} \quad (3)$$

Bei der Durchführung der Versuche wird nicht dieser einzelne Drehimpuls gemessen, sondern die Kugel wird durch regelmäßig erfolgende Drehimpulsstöße zu Schwingungen veranlaßt, ähnlich wie es schon Einstein und De Haas taten, wodurch störende Nebeneffekte ausgeschaltet und die Meßgenauigkeit erhöht wird. Doch wollen wir auf die sich dabei ergebenden Endformeln und die Einzelheiten der Versuchsdurchführung, bei der die von Scherrer angegebene Synchronisierung der Umschaltung von H mit der Eigenschwingung benutzt wird, nicht eingehen, da diese Dinge für unsere Zwecke unwesentlich sind.

Als Ergebnis ihrer Messungen finden Kikoin und Gubar, indem sie für e/m den für ein Elektron gültigen Wert einsetzen, für g den Wert $1 \pm 0,03$, wie er bei einer durch geschlossene Bahnen der Elektronen um den Atomkern verursachten Magnetisierung einzusetzen wäre. Es ist klar, daß die von Kikoin und Gubar angegebene Ableitung der von ihnen benutzten Formel heute völlig unbefriedigend ist. Sie geben in ihrer Arbeit auch selbst schon an, daß es nicht klar sei, wie weit die Analogie zwischen der supraleitenden Kugel, die sie sozusagen als großes diamagnetisches Atom auffassen und den Grundlagen der benutzten Formel zutreffend sei. Insbesondere hat der Landé-Faktor, der ja bei der Berechnung des anormalen Zeemann-Effektes zuerst eingeführt wurde, im vorliegenden Fall keinen Sinn.

Wir wollen nun auf den Versuch die phänomenologische Theorie von London in der präzisen Formulierung, die sie durch von Laue erhalten hat, anwenden. Von Laue hat bereits die Stromverteilung und die Verteilung des magnetischen

Feldes für eine supraleitende Kugel, die sich in einem äußeren homogenen magnetischen Feld befindet, ausgerechnet. Diese Strom- und Feldverteilung wird auch im vorliegenden Fall vor und nach der Ummagnetisierung von $-H$ auf $+H$ vorliegen. Wie aber ist nach der Theorie von von Laue der Drehimpuls auf die Kugel zu berechnen? Die auf die supraleitende Kugel ausgeübten Kräfte lassen sich durch die Maxwell-Londonschen Spannungen darstellen. Wenn wir der Einfachheit halber die Permeabilität, wie es ja praktisch der Fall ist, im Supraleiter gleich 1 setzen, sind die durch diese Spannungen gegebenen Volumkräfte (von Laue 13, 11) gegeben durch

$$\begin{aligned} -\operatorname{Div} \{T(\mathfrak{E}) + T(\mathfrak{H}) - T(\sqrt{\lambda} \mathfrak{S}^l)\} = \\ = \rho^0 \mathfrak{E} + \frac{1}{c} [\mathfrak{S}^0, \mathfrak{H}] + \frac{\partial}{\partial t} \left\{ \frac{1}{c} [\mathfrak{E}, \mathfrak{H}] + \lambda \rho^l \mathfrak{S}^l \right\}. \end{aligned} \quad (4)$$

Dabei ist T der Spannungstensor, $\mathfrak{E}$ die elektrische Feldstärke, $\mathfrak{H}$ die magnetische Feldstärke, λ die Supraleitungskonstante, $\mathfrak{S}^l$ die Dichte des Supraleitungsstromes, $\mathfrak{S}^0$ die des Ohmschen Stromes, ρ^0 die zum Ohmschen Strom gehörige Ladungsdichte, ρ^l die zum Supraleitstrom $\mathfrak{S}^l$ gehörige Ladungsdichte. Das letzte Glied ist die Dichte des Supraleitungsimpulses, die noch zur Dichte des elektromagnetischen Impulses hinzukommt.

Wenn wir aber die wirklich auf die Materie ausgeübten Volumkräfte wissen wollen, so muß man bekanntlich den elektromagnetischen Impuls auf die linke Seite setzen, damit der Satz von der Erhaltung des gesamten Impulses auch für die elektromagnetische Strahlung erfüllt ist. Aus denselben Erwägungen heraus muß man offenbar auch den Supraleitungsimpuls auf die linke Seite setzen und erhält so für die Dichte der Gesamtkraft auf die Kugel den Ausdruck

$$\mathfrak{f}_{\text{mat}} = \rho^0 \mathfrak{E} + \frac{1}{c} [\mathfrak{S}^0, \mathfrak{H}]. \quad (5)$$

Nach den Grundgleichungen (von Laue VIII S. 17) gilt immer

$$\mathfrak{E} = \frac{\partial}{\partial t} (\lambda \mathfrak{S}^l), \quad (6)$$

so daß (5) übergeht in

$$\mathfrak{f}_{\text{mat}} = \rho^0 \frac{\partial}{\partial t} (\lambda \mathfrak{S}^l) + \frac{1}{c} [\mathfrak{S}^0, \mathfrak{H}]. \quad (5a)$$

Wenn wir wie von Laue Kugelkoordinaten r, ϑ, φ einführen (Fig. 1), so erhalten wir beim Ummagnetisieren von $-H$ auf $+H$ den Drehimpuls

$$\Delta G_a = \int_{t=0}^{t=\Delta t} \int_{(V)} \left\{ \rho^0 \frac{\partial}{\partial t} (\lambda \mathfrak{S}^l) + \frac{1}{c} [\mathfrak{S}^0, \mathfrak{H}] \right\} r \sin \vartheta dV dt, \quad (7)$$

wobei dV das Volumenelement bedeutet und das Raumintegral über das von den Supraleitströmen eingenommene Volumen zu erstrecken ist. Δt ist die kurze Zeit, die zum Ummagnetisieren erforderlich ist. Es ist

$$dV = 2\pi r^2 \sin \vartheta dr d\vartheta. \quad (7a)$$

Vor und nach der Ummagnetisierung ist der Zustand stationär.

Nach von Laue haben im stationären Zustand von den $\mathfrak{S}$ - und $\mathfrak{H}$ -Komponenten nur $\mathfrak{S}_\varphi$ und $\mathfrak{H}_\vartheta$ einen von 0 verschiedenen Wert. Die dem zweiten Glied von (7) entsprechende Kraft geht durch die Drehachse und ergibt daher kein Drehmoment. Da ρ^0 und λ als zeitlich und örtlich konstant anzusehen sind, wird aus dem Rest von (7) bei zeitlicher Integration

$$\Delta G_a = 4\pi \rho^0 \lambda \int_{r=0}^R \int_{\vartheta=0}^{\pi} \mathfrak{S}_\varphi r^3 \sin^2 \vartheta d\vartheta, \quad (8)$$

wobei R der Außenradius der Kugel ist.

Nach von Laue (11.8, 11.10 und 11.5) ist

$$\mathfrak{S}_\varphi = -\frac{3}{2} \frac{H}{\sqrt{\lambda}} \frac{\beta R}{\mathfrak{E} \sin(\beta R)} \left(\frac{\mathfrak{C} \cos(\beta r)}{\beta r} - \frac{\mathfrak{E} \sin(\beta r)}{(\beta r)^2} \right) \sin \vartheta, \quad (8a)$$

wobei

$$\beta = 1/c\sqrt{\lambda} \quad (8b)$$

ist.

Bei Ausführung der Integration wird mit (8a), (8b) und $\frac{4}{3}\pi R^3 = V$ aus (8):

$$\Delta G_a = -6\rho^0 \lambda c V H \left[1 - \frac{3}{\beta R} \mathfrak{C} \cotg(\beta R) + \frac{3}{(\beta R)^2} \right]. \quad (9)$$

Wir wollen uns zunächst einmal die physikalische Bedeutung von (9) klar machen: Nach der von Laueschen Theorie stehen die Supraelektronen in keinerlei Kraftaustausch mit den Rest-

ionen oder den Leitungselektronen des Ohmschen Stromes. Kraftwirkungen werden von ihnen nur durch die Londonschen Spannungen auf die Grenzflächen des Supraleiters übertragen, die aber im vorliegenden Fall kein Drehmoment hervorrufen. Infolge des Ausfalles der Supraleitelektronen sind die Ladungen der Restionen durch die gewöhnlichen Leitungselektronen nicht völlig kompensiert, sondern es bleibt ein positiver Ladungsrest ρ^0 übrig. Auf diesen wirkt das dem Supraleitimpuls entsprechende elektrische Feld und ruft das Drehmoment hervor während der Umschaltzeit. Es sei betont, daß erst die durch von Laue gegebene Erweiterung und Präzisierung der Londonschen Theorie die vorstehende Ableitung des Impulses auf die Kugel ermöglichte. Schon der Ausdruck $\frac{1}{2} \lambda \mathfrak{S}^l$ für den im stationären Fall auf die Oberfläche des Supraleiters ausgeübten Zug wurde erst durch von Laue angegeben, was teilweise übersehen wurde. Gehen wir mit der elektronentheoretischen Interpretation noch weiter, so ist folgendes zu sagen: Da, wie sich auch bei genauer Durchrechnung eines Einschaltvorganges zeigt, die Gesamtladungsdichte ρ im vorliegenden Fall 0 ist, wird $\rho^0 = -\rho^l$ und daher, wenn N die Dichte der Supraleitelektronen ist:

$$\rho^0 = N |e|. \quad (10)$$

Ferner ist zu setzen

$$|e| \lambda \mathfrak{S}^l = \int \mathfrak{E} |e| dt = -mv; \quad \mathfrak{S}^l = -N |e| v; \quad \lambda = \frac{m}{N |e|^2}. \quad (11)$$

Mit (10) und (11) wird aus (9):

$$\Delta G_a = - \frac{6mc}{|e|} VH \left[1 - \frac{3}{\beta R} \operatorname{Cotg} (\beta R) + \frac{3}{(\beta R)^2} \right] \quad (12)$$

(im Lorentzschen System).

Nach von Laue, S. 115, haben die Messungen für Blei bei 4,2° K etwa zu folgenden Werten von λ und β geführt:

$$\beta = 4,8 \cdot 10^4 \text{ cm}^{-1}; \quad \lambda = 4,8 \cdot 10^{-31} \text{ s}^2 \text{ (im Lorentzschen System).} \quad (13)$$

Für nicht zu kleine R ist daher βR groß und deshalb (12) mit (3), falls $g = 1$ ist, in 1. Näherung identisch. Die Stromverteilung ist nach der London-Laueschen Theorie in der supra-

leitenden Kugel derart, daß das magnetische Moment in erster Näherung denselben Wert hat, der sich für $\mu = 0$ aus der klassischen Elektrodynamik ergibt, die ja Kikoin und Gubar zugrundelegten.

Kikoin und Gubar haben bei ihren Versuchen mit großem βR auch das Vorzeichen von G_a bestimmt und fanden, daß die Träger des Supraleitstromes negativ geladene Teilchen, also Elektronen sind. Mit Rücksicht auf das in der Arbeit von Kikoin und Gubar falsch angegebene Vorzeichen von α erscheint die Vorzeichenbestimmung bei Kikoin und Gubar nicht gesichert zu sein. Aber es zweifelt ja keiner daran, daß es sich um Elektronen handelt, wie im vorhergehenden immer vorausgesetzt wurde.

Wichtig ist nun aber, daß in dem Ausdruck (13) für kleine Werte von βR das zweite und dritte Glied in der Klammer nicht mehr gegen 1 zu vernachlässigen ist, sondern unter Umständen sogar erheblich größer als 1 wird. Für kleinere Werte von βR kann man (13) folgendermaßen umformen

$$\Delta G_a = - \frac{6mc}{|e|} VH \left[\frac{1}{15} (\beta R)^2 - \frac{2}{315} (\beta R)^4 + \dots \right]; \quad (13a)$$

$$\beta = \frac{1}{c\sqrt{\lambda}} = \frac{|e|}{c} \sqrt{\frac{N}{m}}.$$

Man sieht, daß jetzt außer m/e auch N , also die Dichte der Supraleitungselektronen, und m selbst wesentlich für die Größe des sich ergebenden Impulses wird. Denkt man sich nun statt einer einzelnen Kugel von etwa 3 mm $\varnothing$, wie sie Kikoin und Gubar verwendeten, ein gleiches Volumen V von Blei in sehr feine Kügelchen etwa von $1 \cdot 10^{-5}$ cm Radius aufgeteilt und als Emulsion in ein kleines Röhrchen gebracht, so kann man durch die Bestimmung des auf dieses Röhrchen beim Umschalten des Magnetfeldes ausgeübten Impulses den Wert von N/m und damit nach (11) den Wert von λ experimentell bestimmen.

Ist nicht nur $|e|/m$ (aus Versuchen mit großen βR), sondern auch m bekannt, wie es der Fall ist, falls die Supraleitelektronen normale Elektronen sind, so ermöglicht die beschriebene Erweiterung der Versuche also die Bestimmung der Dichte N der Träger des Supraleitstromes.

Die entsprechenden Versuche sind in die Wege geleitet.

Eine Berechnung von N ist auch aus den Versuchen von Shoenberg³ über die Suszeptibilität von kolloidalem Quecksilber sowie von Désirant und Shoenberg⁴ über die Suszeptibilität von sehr dünnen Quecksilberzylindern möglich wegen der Beziehung zwischen N und der Supraleitungskonstante λ .

³ D. Shoenberg, Proc. Roy. Soc. London (A) 960, S. 49, 1940.

⁴ M. Désirant und D. Shoenberg, Nature, 159, S. 201, 1947; Proc. phys. Soc. 60, S. 413, 1948.