Sitzungsberichte

der

mathematisch-naturwissenschaftlichen Klasse

der

Bayerischen Akademie der Wissenschaften zu München

Jahrgang 1948

München 1949
Verlag der Bayerischen Akademie der Wissenschaften
In Kommission beim Biederstein Verlag München

Kinematische Begründung von S. Lie's Geraden-Kugel-Abbildung.

Von Wilhelm Blaschke in Hamburg.

Mit 6 Abbildungen.

Vorgelegt am 2. Juli 1948.

Im Sommer 1870 hat der Norweger S. Lie in Paris seine Geraden-Kugel-Abbildung gefunden, eine Berührungstransformation, die den Schmieglinien einer Fläche auf ihrer Bildfläche die Krümmungslinien zuweist.[1] Hier soll gezeigt werden: Lies Abbildung läßt sich durch Zusammensetzung zweier einfacher und wohlbekannter Zuordnungen gewinnen, des sogenannten kinematischen und des isotropen Risses, die man auch in der darstellenden Geometrie verwertet. Damit wird ein übersichtlicher Zugang zur Abbildung Lies eröffnet.

1. Der isotrope Riß. In einer euklidischen Ebene $\mathfrak{G}$ (wir setzen alle betrachteten Gebilde als reell voraus) nehmen wir zwei rechtwinklige Achsenkreuze an, das (bewegliche) Gangkreuz $\{\mathfrak{o}; \mathfrak{e}_1, \mathfrak{e}_2\}$ und das (ruhende) Rastkreuz $\{\mathfrak{o}'; \mathfrak{e}_1', \mathfrak{e}_2'\}$. Für einen Beobachter, der im Gangursprung $\mathfrak{o}$ so auf der „Grundebene" $\mathfrak{G}$ steht, daß ihm der Vektor $\mathfrak{e}_3$ von den Füßen nach dem Kopfe weist, soll $\mathfrak{e}_2$ „links" von $\mathfrak{e}_1$ liegen, ebenso $\mathfrak{e}_2'$ links von $\mathfrak{e}_1'$. An Stelle von $\{\mathfrak{o}; \mathfrak{e}_1, \mathfrak{e}_2\}$ genügt auch die Betrachtung des gerichteten Linienelements $\{\mathfrak{o}; \mathfrak{e}_1\}$, das aus dem Punkt $\mathfrak{o}$ und der gerichteten Geraden durch $\mathfrak{o}$ im Sinn des Einheitsvektors $\mathfrak{e}_1$ besteht.

Wir bilden nun jedes solche gerichtete Element $\{\mathfrak{o}; \mathfrak{e}_1\}$ der Grundebene $\mathfrak{G}$ dadurch auf den Raum $\mathfrak{R}$ ab, daß wir ihm die

[1] Vgl. insbesondere S. Lie, Über Komplexe . . ., Mathematische Annalen **5** (1872) = Abhandlungen **2**, 1/121 (1935). Ferner S. Lie und G. Scheffers, Geometrie der Berührungstransformationen, Leipzig 1896, Kapitel 10. Schließlich E. A. Weiß, Deutsche Mathematik **1** (1936) und die Angaben bei F. Klein, Abhandlungen **1**, 97 (1921) und: W. Blaschke, Contributi alla cinematica, Rendiconti dell'istituto per le applicazioni del calcolo, Rom 1949.

Gerade $\{\mathfrak{o}; \mathfrak{e}_2+\mathfrak{e}_3\}$ zuordnen, die durch $\mathfrak{o}$ in Richtung $\mathfrak{e}_2+\mathfrak{e}_3$ geht (Abb. 1). In diesem $\mathfrak{R}$ führen wir eine indefinite Metrik ein, indem wir den Abstand a zweier Punkte

$$\mathfrak{x} = \mathfrak{o} + \sum_1^3 \mathfrak{e}_j x_j, \qquad \mathfrak{y} = \mathfrak{o} + \sum_1^3 \mathfrak{e}_j y_j$$

zweiwertig durch

$$a^2 = (x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2 - (x_3 - y_3)^2$$

erklären.

Ein Vektor $\mathfrak{v} = \mathfrak{e}_1 v_1 + \mathfrak{e}_2 v_2 + \mathfrak{e}_3 v_3$ in $\mathfrak{R}$ hat die Länge Null, wenn

$$v_1^2 + v_2^2 - v_3^2 = 0$$

ist, und soll dann für $\mathfrak{v} \neq \mathfrak{o}$ isotrop heißen. Auch die Gerade mit den Punkten $\mathfrak{y} = \mathfrak{x} + r\mathfrak{v}$ wird isotrop genannt. Die Zuordnung

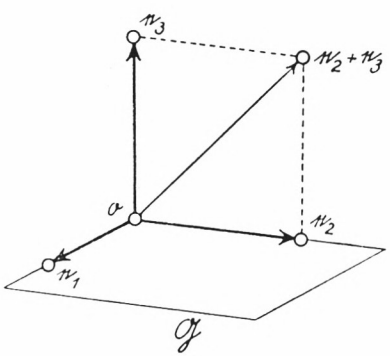

Abb. 1

von den isotropen Geraden $\{\mathfrak{o}; \mathfrak{e}_2+\mathfrak{e}_3\}$ im $\mathfrak{R}$ zu den gerichteten Linienelementen $\{\mathfrak{o}; \mathfrak{e}_1\}$ in $\mathfrak{G}$ heißt isotroper Riß. Diese Abbildung oder eine ihr nah verwandte haben B. E. Cousinery 1828, N. Druckenmüller 1842, M. Chasles 1852, A. F. Möbius 1857, A. Cayley 1867, G. Darboux 1872, S. Lie 1896 und zu zeichnerischen Zwecken unter dem Namen „Zyklographie" W. Fiedler 1884 und E. Müller-J. L. Krames 1929 verwertet.

Eine Ebene

$$v_0 + v_1 x_1 + v_2 x_2 - v_3 x_3 = 0$$

heißt isotrop, wenn ihr Richtungsvektor $\mathfrak{v} = \mathfrak{e}_1 v_1 + \mathfrak{e}_2 v_2 + \mathfrak{e}_3 v_3$ isotrop ist. Durch jede isotrope Gerade läuft genau eine isotrope

Ebene. Den Abstand r eines Punktes $\mathfrak{y}$ einer isotropen Ebene $\mathfrak{U}$ von allen Punkten $\mathfrak{x}+t\mathfrak{v}$ einer isotropen Geraden in $\mathfrak{U}$ kann man eindeutig durch die Forderung

$$\begin{vmatrix} v_1 & x_1 - y_1 & w_1 \\ v_2 & x_2 - y_2 & w_2 \\ v_3 & x_3 - y_3 & w_3 \end{vmatrix} = r(v_1 w_1 + v_2 w_2 - v_3 w_3) \qquad (1)$$

erklären, die für alle w_j gelten soll.

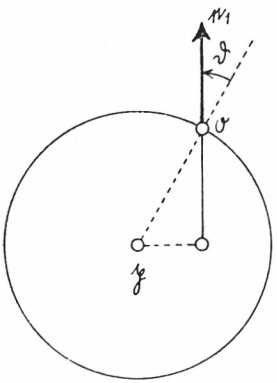

Abb. 2

Die gerichteten Linienelemente von $\mathfrak{G}$, die aus einem von ihnen durch alle Drehungen um die Achse $\{\mathfrak{p}; \mathfrak{e}_3\}$ entstehen, sollen einen Regulus von $\mathfrak{G}$ bilden (Abb. 2). Sind

$$\mathfrak{v} = \mathfrak{p} + a\,(\mathfrak{e}_1' \cos\varphi + \mathfrak{e}_2' \sin\varphi) \qquad (2)$$

die Punkte und

$$\mathfrak{e}_1 = \mathfrak{e}_1' \cos(\varphi + \vartheta) + \mathfrak{e}_2' \sin(\varphi + \vartheta) \qquad (3)$$

die Richtungen der Elemente des Regulus (a, ϑ fest; φ beweglich), so haben alle Punkte der zugehörigen isotropen Geraden in $\mathfrak{R}$ vom Punkte

$$\mathfrak{m} = \mathfrak{p} + \mathfrak{e}_3 a \sin\vartheta$$

denselben Abstand $a\cos\vartheta$ (Abb. 3). Dieser ist nämlich nach (1) eindeutig erklärt, da jede solche isotrope Gerade mit $\mathfrak{m}$ in einer isotropen Ebene liegt. Unsre isotropen Geraden bilden einen isotropen Regulus, das heißt die eine Schar geradliniger

Erzeugender der Kugel mit dem Halbmesser $\pm a \cos \vartheta$ und dem Mittelpunkt $\mathfrak{m}$. Statt von einem isotropen Regulus können wir auch von einer gerichteten Kugel vom Halbmesser $a \cos \vartheta$ sprechen.

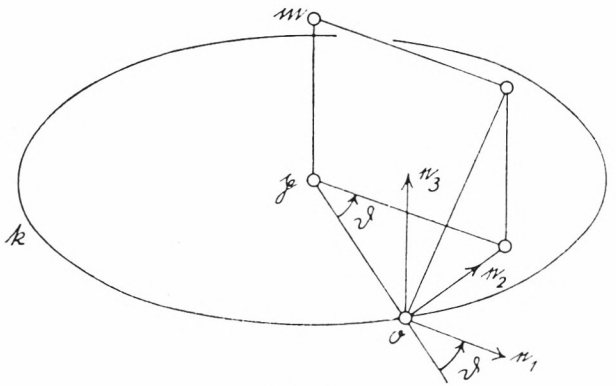

Abb. 3

Für $\vartheta = \pi : 2$ entartet der Regulus im $\mathfrak{R}$ in den Kegel mit der Spitze in $\mathfrak{m} = \mathfrak{p} + \mathfrak{e}_3 a$ und der Regulus in $\mathfrak{G}$ in den gerichteten Kreis $\mathfrak{k}$ um $\mathfrak{p}$ mit dem Halbmesser a. Unser isotroper Kegel mit der Spitze in $\mathfrak{m}$ schneidet $\mathfrak{G}$ in $\mathfrak{k}$. Von dieser Zuordnung $\mathfrak{m} \to \mathfrak{k}$, die man meist zum Ausgang nimmt, stammt die Benennung „isotroper Riß".

2. Der kinematische Riß. Wenn $\mathfrak{e}_1' \neq \mathfrak{e}_1$, gibt es genau eine Drehung um eine Achse $\{\mathfrak{p}\,;\,\mathfrak{e}_3\}$, die das Element $\{\mathfrak{o}'\,;\,\mathfrak{e}_1'\}$ nach

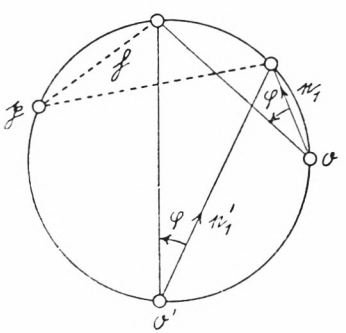

Abb. 4

$\{\mathfrak{o}\,;\,\mathfrak{e}_1\}$ bringt. Zu jedem Gradenpaar $\{\mathfrak{o}'\,;\,\mathfrak{e}_1' \cos \varphi + \mathfrak{e}_2' \sin \varphi\}$, $\{\mathfrak{o}\,;\,\mathfrak{e}_1 \cos \varphi + \mathfrak{e}_2 \sin \varphi\}$ gibt es nämlich eine Gerade $\mathfrak{h}$ in $\mathfrak{G}$, so

daß eine Paargerade mit der andern durch Spiegelung an $\mathfrak{h}$ gegensinnig zur Deckung kommt (Abb. 4). Bei veränderlichem φ laufen alle diese $\mathfrak{h}$ durch den Drehpol $\mathfrak{p}$ in $\mathfrak{G}$. Für $\mathfrak{e}_1 = \mathfrak{e}_1' \cos 2\omega + \mathfrak{e}_2' \sin 2\omega$ ordnen wir unsrer Drehung $\{\mathfrak{o}'; \mathfrak{e}_1'\} \to \{\mathfrak{o}; \mathfrak{e}_1\}$ den Punkt

$$\mathfrak{q} = \mathfrak{p} + \mathfrak{e}_3 \operatorname{ctg} \omega$$

zu. Halten wir das Rastelement $\{\mathfrak{o}'; \mathfrak{e}_1'\}$ fest, so entspricht auf diese Art jedem Gangelement $\{\mathfrak{o}; \mathfrak{e}_1\}$ von $\mathfrak{G}$ ein Punkt $\mathfrak{q}$ von $\mathfrak{R}$. Man nennt diese Zuordnung, die für $\mathfrak{e}_1' \neq \mathfrak{e}_1$ mit ihrer Umkehrung eindeutig ist, den kinematischen Riß $\mathfrak{q} \to \{\mathfrak{o}; \mathfrak{e}_1\}$.

Dabei wird der projektive $\mathfrak{R}$, aus dem die Ferngerade von $\mathfrak{G}$ herausgeschnitten ist, Gruppenraum der Γ_3 der Bewegungen der Grundebene $\mathfrak{G}$, das heißt ihrer längentreuen und gleichsinnigen Abbildungen. Den Fernpunkten von $\mathfrak{R}$, die nicht auf $\mathfrak{G}$ liegen, kann man die Schiebungen ($\mathfrak{e}_1' = \mathfrak{e}_1$) von $\mathfrak{G}$ zuweisen. Dieser kinematische Riß wurde 1911 von W. Blaschke und J. Grünwald, 1923 von E. Müller und E. Kruppa betrachtet.[2]

Wir wollen zeigen: Den Elementen eines Regulus in $\mathfrak{G}$ entsprechen in der Umkehrung unsrer kinematischen Abbildung

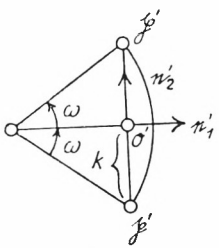

Abb. 5

die Punkte einer Geraden $\mathfrak{g}$ im $\mathfrak{R}$, die zu $\mathfrak{G}$ nicht parallel läuft. Die Drehungen von $\mathfrak{G}$, die vom Rastelement $\{\mathfrak{o}'; \mathfrak{e}_1'\}$ zu den

[2] W. Blaschke, Euklidische Kinematik und nichteuklidische Geometrie, Zeitschrift für Mathematik und Physik **60**, 61/69 (1911). J. Grünwald, Ein Abbildungsprinzip, welches die ebene Geometrie und Kinematik mit der räumlichen Geometrie verknüpft, Sitz. Ber. Akademie Wien **80**, 677/741 (1911). E. Müller und E. Kruppa, Vorlesungen über Darstellende Geometrie I, die linearen Abbildungen, Wien und Leipzig 1923. W. Blaschke, Ebene Kinematik, Leipzig und Berlin 1938.

Elementen (2) unsres Regulus führen, bringen nämlich alle den Punkt $\mathfrak{p}' = \mathfrak{o}' - \mathfrak{e}_1' a \cos\vartheta + \mathfrak{e}_2' a \sin\vartheta$ nach $\mathfrak{p}$ und werden dadurch

$$p' = 0' - \mathfrak{e}_1' a \cos\vartheta + \mathfrak{e}_2' a \sin\vartheta$$

gekennzeichnet. Wählen wir aber etwa unser Rastkreuz (Abb. 5) so, daß

$$\mathfrak{p}' = \mathfrak{o}' - \mathfrak{e}_2' k, \qquad \mathfrak{p} = \mathfrak{o}' + \mathfrak{e}_2' k$$

wird, so liegen die unsern Drehungen zugeordneten Punkte nach Abb. 5 auf der Geraden

$$\mathfrak{q} = \mathfrak{o}' - \mathfrak{e}_1' k \operatorname{ctg}\omega + \mathfrak{e}_3 \operatorname{ctg}\omega$$

für veränderliches ω. Umgekehrt: Jeder Geraden $\mathfrak{g}$ im $\mathfrak{R}$, die zu $\mathfrak{G}$ nicht parallel läuft, entspricht in $\mathfrak{G}$ ein Regulus.

Man kann den kinematischen Riß auch als Zuordnung zwischen den Geraden $\mathfrak{g}$ von $\mathfrak{R}$, die $\mathfrak{G}$ treffen, und den geordneten Punktepaaren $\{\mathfrak{p}'; \mathfrak{p}\}$ in $\mathfrak{G}$ auffassen. Dabei entsprechen schneidenden Geraden $\mathfrak{g}$, $\bar{\mathfrak{g}}$ Punktepaare $\{\mathfrak{p}'; \mathfrak{p}\}$, $\{\bar{\mathfrak{p}}'; \bar{\mathfrak{p}}\}$ mit Gleichheit der Strecken:

$$\mathfrak{p}'\bar{\mathfrak{p}}' = \mathfrak{p}\bar{\mathfrak{p}}.$$

Diese Zuordnung kann man aber so herstellen (Abb. 6). Auf $\mathfrak{g}$ suche man ihre Spuren auf den Ebenen $x_3 = -1$ und $x_3 = +1$, nämlich $\mathfrak{r}' = \mathfrak{o}' + \mathfrak{e}_1' k - \mathfrak{e}_3$ und $\mathfrak{r} = \mathfrak{o}' - \mathfrak{e}_1' k + \mathfrak{e}_3$ und von

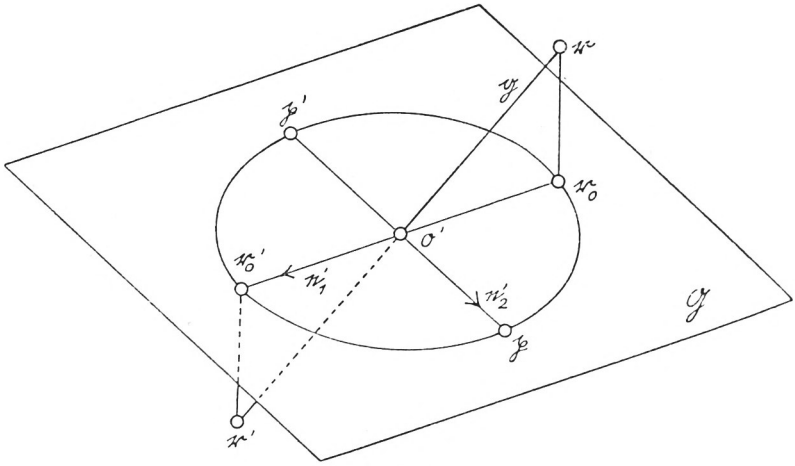

Abb. 6

ihnen die rechtwinkligen Risse $\mathfrak{r}_0' = \mathfrak{o}' + \mathfrak{e}_0' k$ und $\mathfrak{r}_0 = \mathfrak{o}' - \mathfrak{e}_1' k$ auf $\mathfrak{G}$. Schwenkt man dann diese Strecke $\mathfrak{r}_0'\mathfrak{r}_0$ um ihren Mittelpunkt $\mathfrak{o}'$ nach $\mathfrak{p}'\mathfrak{p}$ durch den Winkel $-\pi:2$, so sind $\mathfrak{p}'$, $\mathfrak{p}$ die Bildpunkte von $\mathfrak{g}$ in $\mathfrak{G}$.

Bedeutet $\mathfrak{B}'$ eine Bewegung von $\mathfrak{G}$, die $\mathfrak{p}'$ nach $\mathfrak{o}'$ bringt: $\mathfrak{B}'(\mathfrak{p}') = \mathfrak{o}'$, Γ_1 die Gruppe der Drehungen von $\mathfrak{G}$ um $\{\mathfrak{o}'; \mathfrak{e}_3\}$ und ist $\mathfrak{B}(\mathfrak{o}') = \mathfrak{p}$, so gehören die Punkte von $\mathfrak{g}$ zu den Bewegungen $\mathfrak{B}\,\Gamma_1\,\mathfrak{B}\vartheta$ von $\mathfrak{G}$.

3. Die Geraden-Kugel-Abbildung. Fügt man jetzt den kinematischen Riß $\mathfrak{q} \to \{\mathfrak{o}; \mathfrak{e}_1\}$ mit der Umkehrung des isotropen Risses $\{\mathfrak{o}; \mathfrak{e}_1\} \to \{\mathfrak{o}; \mathfrak{e}_2 + \mathfrak{e}_3\}$ zusammen: $\mathfrak{q} \to \{\mathfrak{o}; \mathfrak{e}_2 + \mathfrak{e}_3\}$, so entsteht eine Abbildung im $\mathfrak{R}$, die von seinen Punkten zu seinen isotropen Geraden hinführt. Beschreibt aber $\mathfrak{q}$ eine Gerade $\mathfrak{g}$, die $\mathfrak{G}$ trifft, so durchläuft die zugehörige isotrope Gerade einen Regulus oder eine gerichtete Kugel. Dabei gehören zu zwei sich schneidenden Geraden zwei Regulusse, die eine isotrope Gerade gemein haben, oder mit andern Worten: zwei sich gleichsinnig berührende gerichtete Kugeln. Daraus folgt: Die gefundene Abbildung ist eine Berührungstransformation.

Zeigen wir noch: Man kann die gefundene Abbildung von Lie auch als eine Zuordnung deuten zwischen den Ebenen $\mathfrak{U}$, die $\mathfrak{G}$ schneiden, und den isotropen Geraden.

Den Geraden $\mathfrak{g}$ einer Ebene $\mathfrak{U}$, die $\mathfrak{G}$ schneidet, entsprechen nämlich in $\mathfrak{G}$ die geordneten Punktepaare $\{\mathfrak{p}'; \mathfrak{p}\}$ einer Umlegung $\mathfrak{p}' \to \mathfrak{p}$, das heißt einer gegensinnig längentreuen Abbildung von $\mathfrak{G}$ auf $\mathfrak{G}$. Dabei liegt ein Punkt $\mathfrak{q}$ mit einer Ebene $\mathfrak{U}$ immer dann vereinigt, wenn die zugehörige Bewegung und Umlegung in $\mathfrak{G}$ sich nur um eine Spiegelung an einer Geraden von $\mathfrak{G}$ unterscheiden. Den Punkten $\mathfrak{q}$ unsrer Ebene $\mathfrak{U}$ entsprechen demnach im isotropen Riß in $\mathfrak{G}$ alle Linienelemente $\{\mathfrak{o}; \mathfrak{e}_1\}$, die aus einem festen $\{\bar{\mathfrak{o}}; \bar{\mathfrak{e}}_1\}$ durch die Spiegelungen an allen Geraden von $\mathfrak{G}$ entstehen. Diese Elemente $\{\mathfrak{o}; \mathfrak{e}_1\}$ schließen sich zu den gerichteten Kreisen von $\mathfrak{G}$ zusammen durch das Element $\{\bar{\mathfrak{o}}; -\bar{\mathfrak{e}}_1\}$. Unsre Elemente $\{\mathfrak{o}; \mathfrak{e}_1\}$ sind demnach die isotropen Risse aller isotropen Geraden $\{\mathfrak{o}; \mathfrak{e}_2 + \mathfrak{e}_3\}$, die die isotrope Gerade $\{\bar{\mathfrak{o}}; -\bar{\mathfrak{e}}_2 + \mathfrak{e}_3\}$ schneiden. In der Abbildung $\mathfrak{q} \to \{\mathfrak{o}; \mathfrak{e}_2 + \mathfrak{e}_3\}$ entsprechen also den Ebenen $\mathfrak{U}$ tatsächlich die isotropen Geraden $\{\bar{\mathfrak{o}}; -\bar{\mathfrak{e}}_2 + \mathfrak{e}_3\}$.