Sitzungsberichte

der

mathematisch-naturwissenschaftlichen Klasse

der

Bayerischen Akademie der Wissenschaften zu München

Jahrgang 1948

München 1949
Verlag der Bayerischen Akademie der Wissenschaften
In Kommission beim Biederstein Verlag München

Zum Beweise des Lebesgueschen Ableitungssatzes.

Von **Otto Haupt** in Erlangen.

Vorgelegt am 14. Mai 1948.

Im folgenden bezeichnet $\mathfrak{k}$ einen σ-Körper von Mengen mit größter Menge $\mathfrak{E}$ und $m|\mathfrak{k}$ ein (schwach) endliches Maß über $\mathfrak{k}$. Die betrachteten (Mengen-)Funktionen $F(\mathfrak{X})|\mathfrak{k}$ mit dem Definitionsbereich $\mathfrak{k}$ sollen sämtlich reell und endlich sein. An anderer Stelle[1] wurden von Herrn Chr. Y. Pauc und dem Verf. Bedingungen angegeben, deren Erfülltsein für eine Ableitungsbasis[2] $\mathfrak{a}$ die Gültigkeit des „*Lebesgueschen Ableitungssatzes*" nach sich zieht; dieser Satz besagt, daß für jede absolut-additive (kurz: a.a.) Funktion $F(\mathfrak{X})$ die Ableitung $DF = D(X; F; \mathfrak{a})$ von $F(\mathfrak{X})$ nach der Basis $\mathfrak{a}$ m-fast überall existiert und gleich einem Integranden[3] von $F(\mathfrak{X})$ ist. Die vorliegende Note bringt

---

[1] Haupt und Pauc, Über die Ableitung absolut additiver Mengenfunktionen. Archiv d. Math. 1 (1948), S. 23–28.

[2] Unter einer Ableitungsbasis $\mathfrak{a}$ wird (nach Herrn R. de Possel, Sur la dérivation abstraite des fonctions d'ensemble. Journ. Math. pures et appl. IX. s., 15 (1936), 391–409) verstanden eine Gesamtheit von Folgen $\mathfrak{g}$ aus m-meßbaren Mengen $\mathfrak{J}$ mit $0 < m(\mathfrak{J}) < +\infty$ von folgender Art: (1) Es ist m-fast jedem Punkt $X \in \mathfrak{E}$ (mindestens) ein $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}(X)$ zugeordnet; die Gesamtheit dieser $\mathfrak{g}(X)$ sei $\mathfrak{a}(X)$. – (2) Jedem $\mathfrak{g}' \in \mathfrak{a}$ entspricht ein $Y \in \mathfrak{E}$ so, daß $\mathfrak{g}' \in \mathfrak{a}(Y)$ gilt. – (3) Mit $\mathfrak{g}(X)$ ist auch jede zu $\mathfrak{g}(X)$ konfinale Teilfolge von $\mathfrak{g}(X)$ in $\mathfrak{a}(X)$ enthalten. – Das *System aller* $\mathfrak{J}$, die zu irgendeinem der $\mathfrak{g}(X)$ gehören, sei *mit* $\mathfrak{v}(X)$ *bezeichnet* und das System aller zu irgendeinem $\mathfrak{g} \in \mathfrak{a}$ gehörigen $\mathfrak{J}$ mit $\mathfrak{v} = \mathfrak{v}(\mathfrak{a})$. – Statt die $\mathfrak{g}(X)$ als Folgen, kann man die $\mathfrak{g}(X)$ allgemeiner als *gerichtete Systeme* annehmen. Vgl. a.a.O.[1] sowie Haupt-Aumann-Pauc, Differential- und Integralrechnung, 2. Aufl., 1. Bd., Berlin 1948, Nr. 6. 1. 5. – Eine notwendige und hinreichende Bedingung dafür, daß DF für jede totalstetige a.a-Funktion m-fast überall existiert und gleich einem Integranden von F ist, findet sich (ohne Beweis) bei B. Younovitch, Sur la dérivation des fonctions absolument additives d'ensemble, C. R. Acad. Sci. URSS 1941, Vol. 30, Nr. 2. Siehe außerdem noch R. de Possel, C. R. Acad. Sci. Paris 224 (1947), 1137 ff., 1197 ff. — Nachtrag bei der Korrektur. Es ist noch zu verweisen auf das inzwischen erschienene Werk: H. Hahn and A. Rosenthal, Set functions, Albuquerque (New Mexico) 1948, chap. V.

[3] Jede a.a-Funktion $F(\mathfrak{X})$ gestattet eine Darstellung $F(\mathfrak{X}) = F(\mathfrak{N}\mathfrak{X}) + \int_{\mathfrak{X}} f dm$; dabei ist $\mathfrak{N} \in \mathfrak{k}$ mit $m(\mathfrak{N}) = 0$ und es wird $S(\mathfrak{X}) = F(\mathfrak{N}\mathfrak{X})$ als m-singulärer Teil von $F(\mathfrak{X})$ bezeichnet, ferner f als ein m-Integrand von F.

einige, die erwähnte Arbeit[1] ergänzende Bemerkungen. Die Beweise werden später veröffentlicht werden.[4]

1. Lebesguesche Ableitungsbasen.

Die früher[1] angegebene, für die Gültigkeit des Lebesgueschen Ableitungssatzes hinreichende Bedingung postuliert, daß die Ableitungsbasis $\mathfrak{a}$ eine *starke Vitalibasis*[5] sei und außerdem den folgenden beiden Axiomen[1] genüge:

Axiom (U). Ist $\mathfrak{I}' \in \mathfrak{v}(\mathfrak{a})$, so sind für m-fast jeden Punkt $Z \in \mathfrak{I}'$ und für jedes $\mathfrak{g}(Z) \in \mathfrak{a}(Z)$ schließlich alle $\mathfrak{I} \in \mathfrak{g}(Z)$ in $\mathfrak{I}'$ enthalten.

Axiom (E). Es soll im kleinsten σ-System $\mathfrak{v}_\sigma$ über $\mathfrak{v} = \mathfrak{v}(\mathfrak{a})$ ein σ-Ring $\mathfrak{o}$ enthalten sein, der Borelsche Erzeugende[6] von $\mathfrak{k}$ ist.

Dieses Axiomenpaar, in welchem übrigens (E) rein mengenalgebraischer Natur ist, erscheint in einem gewissen Sinne ausgezeichnet, insofern nämlich,[7] als bei Weglassung von (E) nur die *Existenz* (m-fast überall) von DF gesichert ist, nicht aber ihre Übereinstimmung mit einem Integranden von F. (Bei Weglassung von (E) *und* (U), d. h. also, wenn lediglich eine starke Vitalibasis zugrunde gelegt wird, ist nach Herrn de Possel[2] die Gültigkeit des Lebesgueschen Ableitungssatzes wenigstens für die m-totalstetigen a.a.-Funktionen gewährleistet). Demgegenüber ist als Nachteil festzustellen, daß z. B. für den speziellen Fall des (klassischen) Lebesgueschen Maßes im E_n (mit $n \geq 1$) nicht alle von im üblichen Sinne „regulär konvergenten" Folgen abgeschlossener Mengen[8] gebildeten starken Vitalibasen $\mathfrak{a}^*$, den Axiomen (U) und (E) genügen, obwohl für diese Basen $\mathfrak{a}^*$ bekanntlich der Lebesguesche Ableitungssatz gilt.[9]

---

[4] Haupt-Aumann-Pauc, a.a.O.[2], 3. Bd. (in Vorbereitung).

[5] D. h. es soll für $\mathfrak{a}$ das Axiom (stV) gelten, nämlich der starke Vitalische Satz. Vgl. R. de Possel, a.a.O.[2], sowie auch oben im Text, § 3, Axiom (stV*) und Fußnote 14.

[6] D. h. es ist $\mathfrak{k}$ im kleinsten σ, δ-System über $\mathfrak{o}$ enthalten.

[7] Gemäß einem von Herrn de Possel angegebenen Beispiel. Vgl. a. a. O.[1], S. 26, Anmerkung.

[8] Vgl. z. B. S. Saks, Theory of the integral, Warschau-New York 1937, S. 106.

[9] Saks, a. a. O.[8], S. 119. Daß Axiom (U) nicht für jedes $\mathfrak{a}^*$ erfüllt ist, zeigt sich, wenn etwa im Falle des E_1 die $\mathfrak{I}$ als geeignete abgeschlossene Mengen gewählt werden.

Der eben erwähnte Nachteil läßt sich aber durch eine geeignete Koppelung von (U) und (E) beseitigen. Man ersetze nämlich diese Axiome durch das folgende, etwas schwächere:

Axiom (U E). Es existiert in $\mathfrak{k}$ ein σ-Ring $\mathfrak{o}$, der (1) Borelsche Erzeugende von $\mathfrak{k}$ ist und (2) folgende Eigenschaft besitzt: Bei beliebigem $\mathfrak{G} \in \mathfrak{o}$ sind für m-fast jeden Punkt $Y \in \mathfrak{G}$ und jedes zugehörige $\mathfrak{g}(Y)$ schließlich alle $\mathfrak{J} \in \mathfrak{g}(Y)$ Teilmengen von $\mathfrak{G}$.

Es läßt sich dann (fast ebenso wie a. a. O.[1]) zeigen:

Für jede Lebesguesche Ableitungsbasis, *d. h. für jede dem Axiom* (U E) *genügende starke Vitalibasis, gilt der Lebesguesche Ableitungssatz.*

Durch das Axiom (U E) werden, wie man konstatiert, auch die oben erwähnten, aus regulär konvergenten Folgen abgeschlossener Mengen des E_n bestehenden Ableitungsbasen erfaßt.

2. Meßbarkeitsbasen.

Für eine Lebesguesche Ableitungsbasis sind die obere und untere Derivierte $\overline{D}F = \overline{D}(X; F; \mathfrak{a})$ bzw. $\underline{D}F = \underline{D}(X; F; \mathfrak{a})$, weil m-fast überall gleich und gleich einem Integranden von F, m-meßbar bis auf eine m-Nullmenge;[10] gehen wir von $m|\mathfrak{k}$ zu einer *vollständigen*[10] *Erweiterung* $m'|\mathfrak{k}'$ über, so sind dann $\overline{D}F$ und $\underline{D}F$ m'-meßbar. Dies gilt aber im Falle einer Lebesgueschen Ableitungsbasis zunächst nur für *absolut additive* Funktionen F. Da indes die m'-Meßbarkeit von $\overline{D}F$ und $\underline{D}F$ bei anderen Untersuchungen für *beliebige* (nicht notwendig a.a.) Funktionen F benötigt wird, sei eine hierfür hinreichende Bedingung angegeben. Zur Abkürzung bezeichnen wir eine starke[11] Vitalibasis als Meßbarkeitsbasis, wenn für jede *beliebige endliche* Funktion $F|\mathfrak{k}$ sowohl $\overline{D}F$ als $\underline{D}F$ m'-meßbar sind. Es gilt dann:

Eine starke Vitalibasis ist jedenfalls dann Meßbarkeitsbasis, wenn sie den beiden folgenden Axiomen genügt:

Axiom (AE). Jedes $\mathfrak{J} \in \mathfrak{v}$ ist in $\mathfrak{v}(X)$ enthalten, wenn $X \in \mathfrak{J}$.

---

[10] d. h. es existiert ein $\mathfrak{N} \in \mathfrak{k}$ mit $m(\mathfrak{N}) = 0$ derart, daß f, $\overline{D}F$ und $\underline{D}F$ m-meßbar sind in $\mathfrak{E} - \mathfrak{N}$. Ist das Maß m vollständig (d. h. ist jede Teilmenge einer m-Nullmenge ebenfalls m-Nullmenge) so ist die m-Meßbarkeit bis auf eine m-Nullmenge mit der m-Meßbarkeit gleichbedeutend.

[11] Es genügt sogar, schwache Vitalibasen (vgl. a.a.O.[1], S. 24) zu betrachten.

Axiom (N). Es existiert eine reelle positive Funktion $u(\mathfrak{J})|\mathfrak{v}$ derart, daß irgendeine Folge $\{\mathfrak{J}_n\}$ mit $\mathfrak{J}_n \in \mathfrak{v}(X)$ jedenfalls dann ein $\mathfrak{g}(X)$ ist, wenn $\lim\limits_{n\to\infty} u(\mathfrak{J}_n) = +\infty$.

3. Gitterartige Ableitungsbasen.

Für eine Lebesguesche Ableitungsbasis $\mathfrak{a}$ ist m-fast überall $|DF| < +\infty$, wenn F eine a.a. Funktion. Ist $\mathfrak{a}$ speziell durch eine Gitterfolge[12] erzeugt, so gilt[1]:[3]

Es sei $F(\mathfrak{X})\,|\,\mathfrak{k}$ *absolut additiv. Dann ist* (I) $\bar{D}F$ *und* $\underline{D}F$ *m-meßbar*; (II) *für* $\mathfrak{N}_{+\infty} = [DF = +\infty]$ *und* $\mathfrak{N}_{-\infty} = [DF = -\infty]$ *ist* $\mathfrak{N} = \mathfrak{N}_{+\infty} + \mathfrak{N}_{-\infty}$ *eine m-Nullmenge, außerhalb deren der singuläre Teil* $S(\mathfrak{X})$ *von* $F(\mathfrak{X})$ *Null ist, d.h. es kann gesetzt werden:* $S(\mathfrak{X}) = F(\mathfrak{X}\mathfrak{N}_{+\infty}) + F(\mathfrak{X}\mathfrak{N}_{-\infty})$.

Die Analyse des Beweises[13] zeigt:

Für eine starke Vitalibasis $\mathfrak{a}$ *gilt die vorstehende Beh.* (II) *wenn die Beh.* (I) *und außerdem noch folgende Verschärfungen der Axiome* (stV)[5] *und* (U) *erfüllt sind:*

Axiom (stV*). Ist $\mathfrak{A} \in \mathfrak{k}$ mit $0 < m(\mathfrak{A}) < +\infty$ und ist $\mathfrak{a}'$ eine in $\mathfrak{a}$ enthaltene Ableitungsbasis derart, daß jedem $Y \in \mathfrak{A}$ (mindestens) ein $\mathfrak{g}(Y) \in \mathfrak{a}'(Y)$ zugeordnet wird, so ist $\mathfrak{A}$ enthalten[14] in einer Summe $\mathfrak{S}$ abzählbar vieler fremder $\mathfrak{J} \in \mathfrak{v}(\mathfrak{a}')$ mit $m(\mathfrak{S}) < m(\mathfrak{A}) + \varepsilon$, wobei $\varepsilon > 0$ beliebig.

Axiom (U*). Es existiert in $\mathfrak{k}$ ein σ-Ring $\mathfrak{o}$, der (1) Borelsche Erzeugende von $\mathfrak{k}$ ist und (2) folgende Eigenschaft besitzt: Für jedes $\mathfrak{G} \in \mathfrak{o}$, für jedes[15] $Y \in \mathfrak{G}$ und für jedes $\mathfrak{g}(Y)$ sind schließlich alle $\mathfrak{J} \in \mathfrak{g}(Y)$ in $\mathfrak{G}$ enthalten.

---

[12] Vgl. B. Jessen, Abstrakt Maal- og Integralteori, Kopenhagen 1947, Nr. 3. 7., S. 38. Vgl. auch Saks, a.a.O.[8], S. 152 ff., wo aber $\mathfrak{E}$ als metrischer, separabler Raum vorausgesetzt wird, was für die oben im Text zu besprechenden Behauptungen nicht erforderlich ist.

[13] Vgl. Saks, a. a. O. [12]. Vgl. die, unabhängig von der Deutung des Integranden als Ableitung DF nach $\mathfrak{a}$ geltende, Zerlegung (II) des singulären Teiles $F(\mathfrak{N}\mathfrak{X})$ von $F(\mathfrak{X})$ (Fußnote 3) bei B. Jessen and E. S., Andersen, Danske Vidensk. Selskab, mat.-fys. Medd., XXV (1948) Nr. 5., S. 4.

[14] Axiom (stV) (s. Fußnote 5) fordert nicht $\mathfrak{A} \subset \mathfrak{S}$, sondern nur $\mathfrak{A} \subset \mathfrak{S} + \mathfrak{N}'$, wobei $m(\mathfrak{N}') = 0$. Demgemäß wird in (stV) nur vorausgesetzt, daß m-fast jedem $Y \in \mathfrak{A}$ (mindestens) ein $\mathfrak{g}(Y)$ zugeordnet ist.

[15] In Axiom (U) nur für m-fast jedes $Y \in \mathfrak{G}$.