

Sitzungsberichte

der

mathematisch-naturwissenschaftlichen
Abteilung

der

Bayerischen Akademie der Wissenschaften

zu München

1931. Heft II

Mai-Julisitzung

München 1931

Verlag der Bayerischen Akademie der Wissenschaften
in Kommission des Verlags R. Oldenbourg München



Bemerkung zu einem Satz des Herrn Lettenmeyer über die an singulären Stellen regulären Lösungen linearer Differentialsysteme.

Von Hermann Schmidt in Jena.

Vorgelegt von O. Perron in der Sitzung am 6. Juni 1931.

Im Anschluß an einen Satz des Herrn Perron über die an einer Unbestimmtheitsstelle regulären Lösungen linearer Differentialgleichungen¹⁾ hat Herr Lettenmeyer²⁾ eine Reihe bemerkenswerter analoger Sätze über lineare Differentialsysteme bewiesen, von denen einer, an den sich unsere Betrachtungen vorwiegend anknüpfen sollen, so ausgesprochen werden kann³⁾:

Gegeben sei das Differentialsystem

$$(II) \quad \sum_1^n y_i' A_{ik}(x) = \sum_1^n y_i B_{ik}(x) \quad (k=1, \dots, n)$$

oder in Matrizenschreibweise

$$1) \quad (y') A = (y) B.$$

Darin seien

a) die Elemente der Matrizen A , B an der Stelle x_0 reguläre Funktionen, und die Determinante $|A|$ nicht identisch Null; ferner gelte

b) $|A|$ habe die Stelle x_0 zur genau s -fachen Nullstelle, wo $s < n$.

Dann hat 1) mindestens $n - s$ linear unabhängige, in x_0 reguläre Lösungen⁴⁾.

¹⁾ Math. Ann. 70 (1911), S. 22.

²⁾ Sitzungsberichte der bayer. Akad. d. Wiss. 1926, S. 278—307.

³⁾ a. a. O. S. 299, Satz 2.

⁴⁾ Wir weichen zum Zweck bequemerer Bezugnahme auf Hensel- und Schlesingersche Entwicklungen leicht von der Lettenmeyerschen Bezeichnungsweise ab und denken uns eine Lösung $(y) = (y_1, y_2, \dots, y_n)$ stets als „Zeile“ (einzeilige Matrix), nicht als „Spalte“ geschrieben.

Nun ist die Form 1) eines Differentialsystems, wenn man nur a), nicht notwendig b) verlangt, nicht eindeutig bestimmt; d. h., ist ein solches Differentialsystem (DS) vorgelegt, so kann es stets auf mannigfache Weise durch Rechtsmultiplikation mit einer Matrix M an der Stelle x_0 meromorpher Funktionen, für die $|M|$ nicht identisch Null ist, in ein DS

$$(y') AM = (y) BM$$

übergeführt werden, welches wieder die Bedingungen a) erfüllt, und welches genau die gleichen Lösungen wie 1) besitzt; man braucht ja dazu nur speziell M regulär mit $|M| \neq 0$ zu wählen. Daher entsteht die Frage nach notwendigen und hinreichenden Bedingungen dafür, daß ein vorgelegtes DS 1), das a) erfüllt, auf die geschilderte Art so umgewandelt werden kann, daß auch die Lettenmeyersche Bedingung b) erfüllt ist. Wir beantworten diese Frage — mit einer kleinen Einschränkung —, indem wir von der unter der Voraussetzung a) stets herstellbaren, eindeutig bestimmten aufgelösten Form des DS ausgehen, in folgendem

Satz I. Im Differentialsystem

$$2) \quad (y') = (y) C$$

sei C eine Matrix in x_0 meromorpher Funktionen und $|C| \neq 0$. Notwendig und hinreichend für die Überführbarkeit desselben in ein System der Form 1), worin A, B in x_0 regulär seien, und für die Ordnungszahl der Determinante $|A|$ an der Stelle x_0 die Ungleichungen $0 \leq s < n$ gelten sollen, sind folgende Bedingungen:

Es seien f_i ($i = 1, 2, \dots, n$) die Exponenten der Elementarteiler (abgekürzt: ETExp.) für die Stelle $x = x_0$ der Matrix C . Es sollen dann entweder alle $f_i \geq 0$ sein, oder aber, wenn man anordnet:

$$f_1 \leq f_2 \leq \dots \leq f_r < 0 \leq \dots \leq f_n, \text{ soll sein } \sum_{i=1}^r |f_i| < n.$$

„Überführbarkeit“ heiße dabei: Entstehung von 1) aus 2) durch Rechtsmultiplikation mit einer in x_0 regulären Matrix nicht identisch verschwindender Determinante. Betreffend die Theorie der Elementarteiler für die Stelle x_0 bei einer Matrix in x_0 meromorpher Funktionen verweisen wir auf Hensel-Landsberg⁵⁾.

⁵⁾ Theorie der algebraischen Funktionen einer Variablen (1902), 12. Vorl. insbes. S. 174—182 und 15. Vorl., insbes. S. 226—229.

Dort wird für andere Zwecke die spezielle Annahme gemacht, daß die Funktionen jeder Spalte der Matrix Zweige einer algebraischen Funktion seien; indes ist diese Annahme für die auf die Elementarteiler bezüglichen Betrachtungen offenbar bedeutungslos und auch hierfür a. a. O. nirgends benützt; auf der anderen Seite benötigen wir hier nicht die besonderen Betrachtungen, die dort dazu dienen, auch den Fall eines Verzweigungspunkts mit einzubeziehen.

Zum Beweis von Satz I dienen folgende Hilfssätze:

Hilfssatz I. Zu jeder Matrix C in x_0 meromorpher Funktionen mit $|C(x)| \neq 0$ gibt es eine Polynommatrix $P(x)$ konstanter Determinante $\neq 0$ („Transformationsmatrix“) folgender Art:

Man hat

$$3) \quad CP = C^* ((x - x_0)^{f_i} \delta_{ik});$$

C^* regulär in x_0 , $|C^*(x_0)| \neq 0$; f_i die ETEExp. von C für x_0 ;
 $(\delta_{ik}) = E$

die Einheitsmatrix.

Der Beweis für die Herstellbarkeit der Form 3) auf dem angegebenen Wege ist für den Fall, daß die Elemente von C regulär sind, im Anschluß an Hensel ausführlich von Herrn Schlesinger⁶⁾ dargestellt; ein Eingehen auf den hier vorliegenden Fall, daß die Entwicklungen auch endlich viele negative Potenzen enthalten dürfen, der durch die Henselschen Entwicklungen ebenfalls mit erledigt ist, erübrigt sich daher. Im Sinne von Hensel ist das System CP „für die Stelle x_0 normal“, und daß die dabei auftretenden „Kolonnenteiler“ $(x - x_0)^{f_i}$ gerade die Elementarteiler sind, ist der Inhalt eines Satzes Hensel-Landsberg⁵⁾, S. 181, Z. 16 ff. v. u.

Hilfssatz II. Sind die ETEExp. der in x_0 meromorphen Matrix A , nach nicht abnehmender Größe geordnet, s_i ($i = 1, 2, \dots, n$), so sind die entsprechenden Größen für die Matrix A^{-1} die Zahlen $-s_{n-i+1}$.

Beweis s. ⁵⁾, S. 229, Satz IIIa.

Hilfssatz III. Die Matrix B bestehe aus in x_0 regulären, D aus daselbst meromorphen Funktionen, $|B|$ sei $\neq 0$ und

⁶⁾ Vorlesungen über lineare Differentialgleichungen (1908), S. 151—154.

D besitze die ETExp. d_i . Dann gilt für die ETExp. f_i des Produkts BD die Ungleichung

$$f_i \geq d_i \quad (i = 1, 2, \dots, n).$$

Es sei nämlich Q eine nach Hilfssatz I zu D existierende Transformationsmatrix derart, daß in

$$DQ = D^* ((x - x_0)^{d_i} \delta_{ik})$$

D^* regulär ist. Dann hat BDQ die gleichen Elementarteiler wie BD . Nun ist in

$$BDQ = BD^* ((x - x_0)^{d_i} \delta_{ik})$$

die Matrix BD^* in x_0 regulär, daher sind die Exponenten der Kolonnenteiler t_i von BDQ

$$t_i \geq d_i.$$

Es gilt aber für die ETExp. aufgrund des Prozesses des „Normalmachens“ offenbar

$$f_i \geq t_i,$$

woraus die Behauptung sofort folgt. Hilfssatz III ist nur eine leichte Verallgemeinerung eines wohlbekannten Satzes über die Elementarteiler eines Produktes von Polynommatrizen⁷⁾.

Zum Beweis des Satzes I sei zunächst, um die Notwendigkeit der Bedingungen zu zeigen, in

$$2) \quad (y') = (y) C$$

$C = BA^{-1}$ angenommen, wo A, B die in Satz I formulierten Eigenschaften haben. Die ETExp. von A seien s_i . Aus der Voraussetzung ergibt sich $s_1 + s_2 + \dots + s_n = s < n$. Nach Hilfssatz II sind die ETExp. für A^{-1}

$$d_i = -s_{n-i+1} \quad (i = 1, 2, \dots, n).$$

Wendet man daher Hilfssatz III auf B und $D = A^{-1}$ an, — es ist $|B(x)| \neq 0$ wegen $|C| \neq 0$ —, so ergibt sich für die ETExp. der Matrix $C = BA^{-1}$

$$f_i \geq -s_{n-i+1}.$$

Entweder sind nun alle $f_i \geq 0$, oder aber, es ist für die negativen $\sum_1^r f_i \leq s < n$, w. z. b. w. Dies sind nämlich gerade die in Satz I als notwendig formulierten Bedingungen.

⁷⁾ Vgl. z. B. Muth, Elementarteiler (1899), S. 16, Satz II.

Sei umgekehrt

$$2) \quad (y') = (y) C$$

vorgelegt, und die Bedingungen des Satzes I für die ETE_{exp.} f_i von C erfüllt. Es sei P eine nach Hilfssatz I zu C existierende Transformationsmatrix, sodaß 2) gleichbedeutend mit dem System wird

$$4) \quad (y') P = (y) CP = (y) C^* ((x - x_0)^{f_i} \delta_{ik}).$$

Sind hier alle $f_i \geq 0$, so sind wir am Ende, da rechts und links reguläre Matrizen stehen und $|P| = \text{const.}$ Andernfalls setzen wir mit Berücksichtigung der verabredeten Anordnung

$$\begin{aligned} s_i &= -f_i \quad (i = 1, \dots, r) \\ s_i &= 0 \quad (i > r) \end{aligned}$$

und bilden aus 4) durch Multiplikation mit der Matrix

$$((x - x_0)^{s_i} \delta_{ik})$$

das gleichbedeutende System

$$5) \quad (y') A = (y) B,$$

worin jetzt

$$A = P((x - x_0)^{s_i} \delta_{ik}), \quad B = C^*((x - x_0)^{f_i + s_i} \delta_{ik})$$

gesetzt ist und die Matrizen A, B ersichtlich die Bedingungen a) und b) erfüllen. Damit ist Satz I vollständig bewiesen.

Wir wollen noch hinzufügen, daß die Transformation

$$(y) P = (z)$$

das System 5) unmittelbar in die Form

$$6) \quad (z') ((x - x_0)^{s_i} \delta_{ik}) = (z) (P^{-1} B + P^{-1} P' ((x - x_0)^{s_i} \delta_{ik}))$$

überführt. Die Matrix auf der rechten Seite ist in x_0 regulär; wir haben damit gerade die grundlegende Form (I) erhalten, die Herr Lettenmeyer²⁾ S. 296 seinem Satz 1 zugrundelegt; man kann dieselbe also direkt aus der aufgelösten Form, ohne Benützung irgendwelcher neuer Elementarteilersätze gewinnen.

Wir wollen nun noch eine speziellere, für die Anwendung oft bequeme, nur hinreichende Bedingung für die Anwendbarkeit des Lettenmeyerschen Satzes angeben.

Satz II. Im Differentialsystem

$$(x - x_0)^\sigma (y') = (y) G$$

seien die Elemente von G regulär an der Stelle x_0 . Ferner sei $0 < \sigma < n$, und für die n ETExp. g_i von G (in ihrer Existenz liegt die Annahme $|G(x)| \neq 0$) gelte $g_i \leq \sigma$ und $\sum_1^n g_i \geq (n-1)\sigma$. Dann läßt sich die Lettenmeyersche Form (II) herstellen, mit einem $s \leq \sigma$.

In der Tat sei wieder

$$GP = G^*((x - x_0)^{g_i} \delta_{ik})$$

normal. Unser System ist dann gleichwertig mit

$$(y') P(\delta_{ik} (x - x_0)^{\sigma - g_i}) = (y) G^*,$$

und hier ist nach Voraussetzung

$$\sigma - g_i \geq 0 \text{ und } \sum_1^n (\sigma - g_i) = n\sigma - \sum_1^n g_i = s \leq \sigma,$$

sodaß wir wirklich in dem gedachten Falle sind.

Diesem Kriterium ist z. B. sehr bequem zugänglich das DS $(x^n - 1)(y') = (y) KX$; K = konstante Matrix, $|K| \neq 0$ ⁸⁾; X die

zyklische Matrix $\begin{pmatrix} x^{n-1}, & x^{n-2}, & \dots & x, & 1 \\ 1 & , & x^{n-1}, & \dots & x^2, x \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix}$. An jeder der singu-

lären Stellen $e^{\frac{2\pi i h}{n}}$ existieren $n-1$ reguläre Integrale usw.

Auf die naheliegende Umformulierung unserer Bedingungen auf den Fall, daß mehrere verschiedene singuläre Punkte des DS in einem einfach zusammenhängenden Definitionsbereich seiner Koeffizienten liegen, sei der Kürze halber nicht mehr eingegangen.

⁸⁾ Diese die wörtliche Anwendbarkeit von Satz II gewährleistende Voraussetzung ist offenbar überflüssig.