

# Sitzungsberichte

der

mathematisch-naturwissenschaftlichen  
Abteilung

der

**Bayerischen Akademie der Wissenschaften**

zu München

---

1928. Heft II

Mai- bis Julisitzung

---

München 1928

Verlag der Bayerischen Akademie der Wissenschaften

in Kommission des Verlags R. Oldenbourg München



## Über eine Klasse irreduzibler Gleichungen.

Von Hermann Schmidt in Jena.

Vorgelegt von O. Perron in der Sitzung am 9. Juni 1928.

**Satz:** Es seien  $f(x)$ ,  $\varphi(x)$  Polynome von den Graden  $m$ ,  $n$  mit Koeffizienten aus einem vollkommenen Körper  $\mathfrak{f}$ ; beide seien in  $\mathfrak{f}$  irreduzibel. In einem und demselben Erweiterungskörper habe  $f(x) = 0$  die Wurzeln  $x_1, x_2 \dots x_m$  und  $\varphi(x) = 0$  die Wurzeln  $y_1, y_2 \dots y_n$ . Der Durchschnitt  $\mathfrak{b} = (\mathfrak{f}_1, \mathfrak{f}_2)$  der beiden Wurzelkörper

$$\mathfrak{f}_1 = \mathfrak{R}(\mathfrak{f}, x_1, x_2, \dots, x_m) \text{ und } \mathfrak{f}_2 = \mathfrak{R}(\mathfrak{f}, y_1, y_2, \dots, y_n)$$

sei mit  $\mathfrak{f}$  identisch und die Produkte

$$u_{\mu\nu} = x_\mu y_\nu \left\{ \begin{array}{l} \mu = 1, 2, \dots, m \\ \nu = 1, 2, \dots, n \end{array} \right\}$$

sämtlich voneinander verschieden. Dann ist das Polynom  $\psi(x) = \prod_{\mu, \nu} (x - u_{\mu\nu})$  in  $\mathfrak{f}$  irreduzibel.

**Beweis:** Man hat

$$\psi(x) = \prod_{\mu=1}^m \psi_\mu(x), \text{ wo } \psi_\mu(x) = \prod_{\nu=1}^n (x - x_\mu y_\nu).$$

$\psi_\mu(x)$  hat offenbar Koeffizienten aus  $\mathfrak{R}(\mathfrak{f}, x_\mu)$  und entsprechend  $\psi(x)$  solche aus  $\mathfrak{f}$ . Sei  $\mathfrak{G}$  die Gruppe von  $\psi(x) = 0$  in  $\mathfrak{f}$  und

$$\omega(u_{11} u_{12}, \dots, u_{1n}; u_{21}, \dots, u_{2n}; \dots, u_{m1}, u_{m2}, \dots, u_{mn}) = 0$$

eine Relation zwischen den Wurzeln von  $\psi(x) = 0$  mit Koeffizienten aus  $\mathfrak{f}$ .

Schreibt man sie in der Form

$$\begin{aligned} \omega(x_1 y_1, \dots, x_1 y_n; x_2 y_1, \dots, x_2 y_n; \dots, x_m y_1, \dots, x_m y_n) \\ = \Omega(x_1, x_2, \dots, x_m) = 0, \end{aligned}$$

so hat  $\Omega$  Koeffizienten aus  $\mathfrak{k}_2$ . Nun reduziert sich wegen  $(\mathfrak{k}_1, \mathfrak{k}_2) = \mathfrak{k}$  die Gruppe  $\mathfrak{G}_1$  von  $f(x) = 0$  in  $\mathfrak{k}$  bei Adjunktion von  $\mathfrak{k}_2$  nicht<sup>1)</sup>; daher bleibt  $\Omega = 0$  richtig bei allen in  $\mathfrak{G}_1$  enthaltenen Substitutionen der  $x_\mu$ . Wegen der Irreduzibilität von  $f(x)$  gibt es aber, wenn  $k$  eine beliebige der Zahlen  $1, 2, \dots, m$  bedeutet, in  $\mathfrak{G}_1$  sicher eine Substitution  $S_k$  der Gestalt

$$S_k = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \dots & x_m \\ x_{i_1, k} & x_{i_2, k} & \dots & x_{i_m, k} \end{pmatrix} \quad \text{mit } i_{l, k} = k.$$

Daher bleibt  $\omega = 0$  richtig bei den Substitutionen

$$U_k = \begin{pmatrix} u_{\mu\nu} \\ u_{i_\mu, k\nu} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_\mu & y_\nu \\ x_{i_\mu, k} & y_\nu \end{pmatrix},$$

die somit  $\mathfrak{G}$  angehören.

Ebenso muß es in der Gruppe  $\mathfrak{G}_2$  von  $\varphi(x) = 0$  zu jedem  $l$  aus der Reihe  $1, 2, 3, \dots, n$  eine Substitution  $T_l$  geben

$$T_l = \begin{pmatrix} y_\nu \\ y_{j_\nu, l} \end{pmatrix} \quad \text{mit } j_{l, l} = l,$$

sodaß in  $\mathfrak{G}$

$$V_l = \begin{pmatrix} u_{\mu\nu} \\ u_{\mu j_\nu, l} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_\mu & y_\nu \\ x_\mu & y_{j_\nu, l} \end{pmatrix}$$

vorkommt.

Deshalb gehören zu  $\mathfrak{G}$  auch die  $mn$  Substitutionen der  $u_{\mu\nu}$

$$U_k V_l = \begin{pmatrix} u_{\mu\nu} \\ u_{i_\mu, k\nu} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_{i_\mu, k j_\nu, l} \\ u_{i_\mu, k j_\nu, l} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_{\mu\nu} \\ u_{i_\mu, k j_\nu, l} \end{pmatrix}.$$

Diese sind sämtlich voneinander verschieden, da  $u_{11}$  in die  $mn$  nach Annahme verschiedenen Elemente  $u_{i_\mu, k j_\nu, l} = u_{kl}$  übergeführt wird. Daher ist  $\mathfrak{G}$  transitiv und also  $\psi(x)$  irreduzibel, w. z. b. w.

Allgemeiner seien  $f_\sigma(x) = 0$  ( $\sigma = 1, 2, \dots, r$ )  $r$  in  $\mathfrak{k}$  irreduzible Gleichungen von den Graden  $n_\sigma$  mit den Wurzelsystemen  $x_{\sigma\nu}$  ( $\nu = 1, 2, \dots, n_\sigma$ ), die wieder in einem gemeinsamen Erweiterungskörper liegen sollen, ferner  $u_{r_1 r_2 \dots r_r} = x_{1 r_1} x_{2 r_2} \dots x_{r r_r}$ , und  $u_{r_1 r_2 \dots r_r} - u_{z_1 z_2 \dots z_r} \neq 0$  für  $\sum_1^r (v_\sigma - z_\sigma)^2 \neq 0$ .

Wir setzen

$$F_\sigma(x) = \prod_{\nu_1 \dots \nu_\sigma} (x - x_{1 \nu_1} x_{2 \nu_2} \dots x_{\sigma \nu_\sigma})$$

$$(\sigma = 1, 2, \dots, r; F_1(x) = f_1(x)).$$

<sup>1)</sup> Vgl. etwa Hasse, Höhere Algebra II 1927, S. 126, 3.)

Sei ferner

$$\begin{aligned} \mathfrak{f}_\sigma &= \text{Wurzelkörper von } f_\sigma(x) = 0 \text{ über } \mathfrak{f} \\ \mathfrak{R}_\sigma &= \text{„ „ „ } F_\sigma(x) = 0 \text{ „ } \mathfrak{f}. \quad (\mathfrak{R}_1 = \mathfrak{f}_1). \end{aligned}$$

Wenn dann  $(\mathfrak{R}_1, \mathfrak{f}_\sigma) = (\mathfrak{R}_2, \mathfrak{f}_\sigma) = \dots = (\mathfrak{R}_{r-1}, \mathfrak{f}_\sigma) = \mathfrak{f}$ , dann ist  $F_r(x)$  irreduzibel in  $\mathfrak{f}$ .

Das ergibt sich leicht durch sukzessive Anwendung obiger Schlußweise auf die Polynompaare

$$(F_1, f_2); (F_2, f_3); \dots (F_{r-1}, f_r),$$

wobei zu beachten ist, daß auch  $u_{r_1 r_2 \dots r_\sigma} - u_{z_1 z_2 \dots z_\sigma} \neq 0$  für

$\sum_1^\sigma (v_\sigma - z_\sigma)^2 \neq 0$ , da andernfalls auch eine Beziehung

$$u_{r_1 r_2 \dots r_\sigma r_{\sigma+1} \dots r_r} - u_{z_1 z_2 \dots z_\sigma z_{\sigma+1} \dots z_r} = 0$$

mit

$$\sum_1^r (v_\sigma - z_\sigma)^2 \neq 0$$

gälte, wie sie nach Voraussetzung unmöglich ist; man bräuchte ja nur  $r_{\sigma+1} = \dots = r_r = z_{\sigma+1} = \dots = z_r = 1$  zu setzen.

Im Falle  $\mathfrak{f} = \mathfrak{R}(1)$  sei auf die Verwandtschaft des obigen Satzes mit Satz 87 des Hilbertschen Zahlberichts hingewiesen (aus der Annahme  $(d_1, d_2) = 1$  für die Diskriminanten von  $k_1, k_2$  folgt nach Satz 86, 39, 44 a. a. O.  $(k_1, k_2) = \mathfrak{R}(1)$ , also unsere Voraussetzung). Indessen braucht bei uns weder  $n_\sigma$  der Grad von  $\mathfrak{f}_\sigma$ , noch  $\mathfrak{R}_r$  mit  $\mathfrak{R}(\mathfrak{f}, \mathfrak{f}_1, \mathfrak{f}_2, \dots, \mathfrak{f}_r)$  identisch zu sein. Andererseits sind dort  $k_1, k_2$  nicht notwendig Galoissche Körper. Ist aber z. B.  $f_\sigma(x) = 0$  die Gleichung für die primitiven  $p_\sigma^{\alpha_\sigma}$ -ten Einheitswurzeln ( $p_1, p_2, \dots, p_r$  verschiedene Primzahlen), so sind die Voraussetzungen beider Sätze erfüllt, wie man aus der Kenntnis der Körper  $\mathfrak{f}_\sigma$  und ihrer Diskriminanten leicht entnimmt, und hieraus folgt sodann die Irreduzibilität der Kreisteilungsgleichung für zusammengesetztes  $n$ .