Ueber

Zusammenstösse und Theilungen planetarischer Massen

von

H. Seeliger.

Aus den Abhandlungen der k. bayer. Akademie der Wiss. II. Cl. XVII. Bd. II. Abth.

München 1890.
Verlag der k. Akademie
in Commission bei G. Franz.

Täglich erleben wir das Schauspiel des Zusammenstosses kosmischer Massen mit unserer Erde. Wir werden hierdurch nothwendigerweise zu der Erkenntniss geführt, dass der interplanetarische Raum keineswegs leer ist, vielmehr eine nicht unbeträchtliche Zahl kleiner Massen enthält, die wir als planetarische bezeichnen können, da sie in der Hauptsache nur der Attraction der Sonne folgend sich nach den Kepler'schen Gesetzen um diese bewegen müssen. Infolge dieser Beobachtungsthatsachen, denen man allerdings erst seit verhältnissmässig kurzer Zeit erhöhte Aufmerksamkeit schenkt, bietet sich von selbst die Aufgabe dar, die Einwirkung solcher fortwährenden Zusammenstösse eines Planeten mit kleinen kosmischen Massen auf die Bewegung des ersteren zu untersuchen. Diese Aufgabe soll im Folgenden nach einigen Richtungen hin, welche einiges Interesse darzubieten scheinen, behandelt werden.

In mechanischem Sinne ist die Explosion planetarischer Massen d. h. die Theilung infolge innerer Kräfte als das Umgekehrte einer Vereinigung zu betrachten, so dass sich bei der Besprechung des genannten Problemes von selbst Bemerkungen über die Reactionskräfte, die bei solchen Theilungen ausgelöst werden, darbieten. Hierher gehören nach dem heutigen Stande unserer Kenntnisse in fast unzweifelhafter Weise die Ausströmungserscheinungen bei den Cometen und von ihnen wird also auch im Folgenden kurz die Rede sein.

Der Uebersicht wird es förderlich sein, wenn ich mit wenigen Worten den Inhalt der folgenden Artikel angebe.

Art. 1. Die Grundgleichungen für die Bewegung eines Körpers, der von einem continuirlichen Strome planetarisch bewegter Massenpuncte getroffen wird.

1.

Im Folgenden soll stets nur der Fall in Betracht gezogen werden, in welchem zwei bewegte Massen zusammenstossen und nach dem Zusammentreffen mit einander verbunden bleiben. Analog hierzu ist bei der Theilung anzunehmen, dass diese plötzlich vor sich geht und eine

Trennung dauernd bestehen bleibt. Da von selbst klar ist, dass die zweite Erscheinung denselben mechanischen Gesetzen folgt, wie die erste, so soll vorläufig der Fall des Zusammenstosses allein behandelt werden.

Für diesen aber gilt unter allen Bedingungen das Prinzip von der Erhaltung der Bewegung des Schwerpunctes und hieraus allein müssen sich alle anderen Folgerungen ergeben.

Haben die Schwerpuncte der beiden Massen m_0 und μ im Augenblicke unmittelbar vor dem Zusammenstosse die Geschwindigkeitscomponenten

$$\frac{dx_0}{dt}, \frac{dy_0}{dt}, \frac{dz_0}{dt} \text{ bezw. } \frac{d\xi}{dt}, \frac{d\eta}{dt}, \frac{d\zeta}{dt}$$

und sind

$$\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}, \frac{dz}{dt}$$

die Geschwindigkeitscomponenten des Schwerpunctes der vereinigten Massen unmittelbar nach ihrer Vereinigung, so ist

$$\left.\begin{aligned}(m_0+\mu)\frac{dx}{dt} &= m_0\frac{dx_0}{dt}+\mu\frac{d\xi}{dt}\\(m_0+\mu)\frac{dy}{dt} &= m_0\frac{dy_0}{dt}+\mu\frac{d\eta}{dt}\\(m_0+\mu)\frac{dz}{dt} &= m_0\frac{dz_0}{dt}+\mu\frac{d\zeta}{dt}\end{aligned}\right| \qquad (1)$$

Wenn ferner ein System beliebiger Massenpuncte m_0 in beliebiger Bewegung begriffen mit dem Massenpuncte μ zusammenstösst, so wird der Werth des Ausdruckes

$$\Sigma m_0\left(x_0\frac{dy_0}{dt}-y_0\frac{dx_0}{dt}\right)+\mu\left(\xi\frac{d\eta}{dt}-\eta\frac{d\xi}{dt}\right)$$

und die anologen Ausdrücke für die beiden anderen Coordinaten durch den Zusammenstoss nicht geändert, wie sich augenblicklich aus (1) ergiebt.

Die Rotationsverhältnisse eines Körpers, welche unmittelbar vor dem Zusammenstosse durch die Grössen

$$\Sigma m_0\left(x_0\frac{dy_0}{dt}-y_0\frac{dx_0}{dt}\right) \text{ etc.}$$

gegeben waren, sind nach dem Zusammenstosse mit dem Massenpuncte μ gegeben durch

$$\Sigma m\left(x\frac{dy}{dt}-y\frac{dx}{dt}\right)=\Sigma m_0\left(x_0\frac{dy_0}{dt}-y_0\frac{dx_0}{dt}\right)+\mu\left(\xi\frac{d\eta}{dt}-\eta\frac{d\xi}{dt}\right) \quad (2)$$

wo dann $\Sigma m = \Sigma m_0 + \mu$ ist.

Es soll zunächst (1) anders geschrieben werden. Bezeichnet man:

$$\Delta\left(\frac{dx}{dt}\right)=\frac{dx}{dt}-\frac{dx_0}{dt}$$

$$m = m_0 + \mu$$

und analog für die andern Coordinaten, so hat man

$$\Delta\left(\frac{dx}{dt}\right)=\frac{\mu}{m}\left(\frac{d\xi}{dt}-\frac{dx_0}{dt}\right)$$

$$\Delta\left(\frac{dy}{dt}\right)=\frac{\mu}{m}\left(\frac{d\eta}{dt}-\frac{dy_0}{dt}\right)$$

$$\Delta\left(\frac{dz}{dt}\right)=\frac{\mu}{m}\left(\frac{d\zeta}{dt}-\frac{dz_0}{dt}\right)$$

woraus sich ergibt, dass nur die relative Geschwindigkeit gegen den Schwerpunkt des Körpers vor dem Zusammenstoss eine Rolle spielt. Wenn nun ein Planet (m) in einen Strom discreter Massenpuncte, d. h. also in ein System planetarisch bewegter kleiner Massen, eintritt, so werden eine gewisse Zeit lang in continuirlicher Folge Zusammenstösse und eine Vermehrung der vorläufig als punctförmig zu betrachtenden Planetenmasse m stattfinden. Sieht man weiter, was stets erlaubt sein wird, von der Anziehung ab, welche Sonne und Planet durch die kleine Masse erfahren, so wird man das in (1) benutzte Coordinatensystem in die Sonne legen dürfen, weil nur die relative Bewegung der auffallenden Massentheilchen gegen den Planeten in Frage kommt. Bezeichnet dann μ die Masse, welche in der Zeiteinheit auf den Planeten fällt und beachtet man, dass für eine sehr kleine Zeit dt das Zeichen Δ in das Differentialzeichen d übergeht, so kann man die Gesammtbeschleunigung, welche der Planet in der Richtung einer Coordinate z. B. der x-Coordinate erfährt, leicht berechnen. Diese besteht in jedem Zeitmoment aus zwei Theilen. Zunächst bewirkt die Anziehung der Sonne in üblicher Bezeichnung die Beschleunigung

$$-\frac{k^2(1+m)}{r^3}x$$

Ausserdem aber wird durch den Zusammenstoss nach den obigen Formeln die Beschleunigung erzeugt:

$$\frac{\mu}{m}\left(\frac{d\xi}{dt}-\frac{dx_0}{dt}\right)$$

Es ergeben sich so, wenn man noch in erlaubter Weise $\frac{dx_0}{dt}$ mit $\frac{dx}{dt}$ etc. vertauscht, die Differentialgleichungen der Bewegung:

$$\left.\begin{aligned}\frac{d^2x}{dt^2}+k^2(1+m)\frac{x}{r^3} &= \frac{\mu}{m}\left(\frac{d\xi}{dt}-\frac{dx}{dt}\right)\\ \frac{d^2y}{dt^2}+k^2(1+m)\frac{y}{r^3} &= \frac{\mu}{m}\left(\frac{d\eta}{dt}-\frac{dy}{dt}\right)\\ \frac{d^2z}{dt^2}+k^2(1+m)\frac{z}{r^3} &= \frac{\mu}{m}\left(\frac{d\zeta}{dt}-\frac{dz}{dt}\right)\end{aligned}\right| \quad (3)$$

Die Masse m ist natürlich auch mit der Zeit veränderlich, indem

$$\left.\begin{aligned}m &= m_0+\varDelta m\\ \varDelta m &= \int_{t_0}^{t}\mu\,dt\end{aligned}\right| \quad (4)$$

ist. Man kann die durch (3) definirte Bewegung auch als ein Störungsproblem auffassen. Dann bereitet die Integration, etwa durch die Methode der Variation der Contanten, keine besonderen Schwierigkeiten. Als Störungscomponenten treten hier auf:

$$\left.\begin{aligned}X &= -k^2\varDelta m\frac{x}{r^3}+\frac{\mu}{m}\left(\frac{d\xi}{dt}-\frac{dx}{dt}\right)\\ Y &= -k^2\varDelta m\frac{y}{r^3}+\frac{\mu}{m}\left(\frac{d\eta}{dt}-\frac{dy}{dt}\right)\\ Z &= -k^2\varDelta m\frac{z}{r^3}+\frac{\mu}{m}\left(\frac{d\zeta}{dt}-\frac{dz}{dt}\right)\end{aligned}\right| \quad (5)$$

Man könnte noch zweifelhaft sein, ob die Anwesenheit einer Atmosphäre diese Gleichungen nicht wesentlich insofern ändern könnte, als man für $\frac{d\xi}{dt}$ nicht die kosmische, sondern die durch den Luftwiderstand fast vollkommen vernichtete Geschwindigkeit, mit welcher thatsächlich der Zusammenstoss mit dem festen Planeten erfolgt, zu nehmen hätte. Hält man aber fest, dass auch die äussersten Lufttheilchen noch zu dem System, das wir Planet nannten, gehört, so sieht man sofort, dass der Schwerpunct dieses Systemes sich nach den Gleichungen (1) bewegen muss, wo also $\frac{d\xi}{dt}$ die Geschwindigkeit ist, welche die auffallende Masse beim Eintreten in diese äussersten Luftschichten besitzt. Man hat also bei etwaigen genaueren Rechnungen darauf zu achten, dass man den Radius des übrigens im folgenden stets als kugelförmig betrachteten Planeten angemessen zu vergrössern hat.

Die Ermittlung des Störungscomponenten ist nun sehr einfach, wenn die Geschwindigkeitscomponenten $\frac{d\xi}{dt}, \frac{d\eta}{dt}, \frac{d\zeta}{dt}$ gegeben sind. Diese beziehen sich aber auf einen mit planetarischer Geschwindigkeit um die Sonne bewegten Massenpunct, sie sind also abhängig von der Anziehung der Sonne sowohl als auch des Planeten. Vernachlässigt man die letztere, so sind die gesuchten relativen Geschwindigkeitscomponenten in der einfachsten Weise bekannt. Von vornherein erscheint aber eine solche Vernachlässigung als durchaus nicht statthaft, weil im Gegentheile die relative Geschwindigkeit zweier zusammenstossender planetarischer Massen bekanntlich sehr nahe so berechnet werden kann, als ob die Sonne gar nicht und nur der anziehende Planet vorhanden wäre.[1]) Jedenfalls ist eine nähere Untersuchung dieses Zusammenhanges nothwendig. Ehe dies geschieht, soll noch die Gleichung (2) umgeformt werden. Dieselbe bezieht sich auf ein festes Coordinatensystem. Führt man nun aber relative Coordinaten ein und zwar in Bezug auf den Schwerpunct des Körpers mit der Masse m_0 vor dem Zusammenstoss, dessen Coordinaten $\Xi_0\, Y_0\, Z_0$ seien und in Bezug auf den Schwerpunct des ganzen Körpers nach dem Zusammenstoss mit der Masse m und den Coordinaten $\Xi\, Y Z$, indem man setzt

$$\begin{aligned} x &= \Xi + x' & M &= \Sigma m \\ x_0 &= \Xi_0 + x_0' & M_0 &= \Sigma m_0 \\ \xi &= \Xi_0 + \xi' & M &= M_0 + \mu \end{aligned}$$

1) Vergl. Laplace mécanique céleste, livre IX, Chap. II.

so kann man (2) auf eine sehr einfache Form bringen. Bezeichnet man zu diesem Zwecke der Einfachheit wegen allgemein:

$$a\frac{db}{dt} - b\frac{da}{dt} = [a\,b]$$

so geben zunächst die Definitionsgleichungen für den Schwerpunct:

$$\Sigma m\,[x'\,y'\,] = \Sigma m\,[x\;y\,] - M\,[\Xi\;Y\,]$$

$$\Sigma m_0[x_0'\,y_0'] = \Sigma m_0[x_0\,y_0] - M_0[\Xi_0\,Y_0]$$

Nach (2) haben wir also:

$$\Sigma m[x'\,y'] - \Sigma m_0[x_0'\,y_0'] = \mu[\xi\,\eta] - M[\Xi\,Y] + M_0[\Xi_0\,Y_0]$$

Nach leichten Zwischenrechnungen findet man aber für die rechte Seite

$$\mu\frac{M_0}{M}\cdot[\xi'\,\eta']$$

Wir haben demnach:

$$\Sigma m\left(x'\frac{dy'}{dt} - y'\frac{dx'}{dt}\right) - \Sigma m_0\left(x_0'\frac{dy_0'}{dt} - y_0'\frac{dx_0'}{dt}\right) = \mu\frac{M_0}{M}\left(\xi'\frac{d\eta'}{dt} - \eta'\frac{d\xi'}{dt}\right)$$

Das erste Glied enthält die Coordinaten in Bezug auf den neuen Schwerpunct der Gesammtmasse, das zweite in Bezug auf den Schwerpunct des Körpers vor dem Zusammenstoss, während rechts die Coordinaten des auffallenden Massentheilchens μ in Bezug auf den ursprünglichen Schwerpunct des Körpers vorkommen.

Von einer weiteren Untersuchung des Einflusses auf die Rotation auf Grund der letzten Gleichung soll abgesehen werden, weil eine Aufforderung hierzu durch die Beobachtungen bisher nicht erfolgt ist. Indessen ist es äusserst leicht auf Grund der bekannten Theorie der Rotation der Planeten, die Veränderung der Rotationsaxe im Raume und im Planetenkörper abzuleiten. Diese Veränderungen werden aber voraussichtlich stets minimal sein, da die kosmischen Massen sehr klein sind und nahezu in symmetrischer Vertheilung auf den Planetenkörper auffallen.

2.

Die Bewegung der kleinen Massen gegen einen Planeten kommt mit der geocentrischen Bewegung eines Meteors überein, welche von

Schiaparelli[1]) und Hoek[2]) näher untersucht worden ist. Einige dieser Sätze bilden den Ausgangspunct der folgenden Betrachtungen und sollen hier erwähnt werden.

Wir wollen gleich annehmen, dass ein Meteor, dessen Bewegung untersucht werden soll, zu einem Meteorschwarm gehört. Da die einzelnen Theile eines solchen keine nennenswerthen Anziehungen aufeinander ausüben, diejenigen Theile aber, welche auf die Erde fallen, räumlich von einander nicht sehr getrennt sind, so werde angenommen, dass dieselben sich in parallelen Richtungen bewegen, ehe sie in die Attractionssphäre der Erde gelangen. Die heliocentrische Bewegung der Meteore darf als eine sehr rasche angenommen werden. Man kann deshalb nach Laplace die an sich sehr verwickelte Bewegung eines solchen Körpers näherungsweise so behandeln, dass man die beiden Grenzfälle, wo nämlich nur die Anziehung der Sonne oder nur die Anziehung der Erde diese Bewegung bestimmt, sprungweise in einem passend gewählten Zeitmomente an einander grenzen lässt und die geringen Bahnveränderungen, welche in der kurzen Uebergangszeit vor sich gehen, wo die Anziehung der Sonne und Erde von gleichem Range sind, vernachlässigt. Es wird dies bei der geringen Genauigkeit, die hier gefordert wird, unzweifelhaft gestattet sein. Dann wird jedes Meteor mit einer leicht bestimmbaren Anfangsgeschwindigkeit v_0 relativ zur Erde in deren Anziehungssphäre dringen und um den Erdmittelpunct als Brennpunct eine Hyperbel beschreiben. Die Geschwindigkeit an der Erdoberfläche, die als eine Kugel mit dem Radius R angenommen werde, sei v, ferner a und e halbe grosse Axe (also in diesem Falle eine negative Zahl) und Excentricität der Bahnhyperbel. Setzt man noch der Kürze wegen die Erdmasse $= 1$, so ist

$$v^2 = v_0^2 + \frac{2k^2}{R}; \quad v_0^2 = -\frac{k^2}{a}; \quad \frac{2a}{R} = \frac{v_0^2 - v^2}{v_0^2} \tag{1}$$

Nimmt man die Richtung der Asymptote der Hyperbel und zwar derjenigen, welche die Bewegungsrichtung des Meteors vor dem Zusammenstosse mit der Erde angiebt, zur X-Axe eines Coordinatensystemes, dessen

1) Entwurf einer astron. Theorie der Sternschnuppen. Stettin 1871.

2) Monthly notices 1868.

Anfang im Erdmittelpunkt liegt, während die Y-Axe in der Ebene der Bahn so angenommen wird, dass das Meteor von ihrer positiven Seite herkommt, so ist in dem Flächensatze

$$x\frac{dy}{dt} - y\frac{dx}{dt} = k\sqrt{a(1-e^2)}$$

in sehr grosser Entfernung von der Erde zu setzen

$$\frac{dy}{dt} = 0; \quad \frac{dx}{dt} = -v_0$$

also

$$y v_0 = k\sqrt{a(1-e^2)}$$

Bezeichnet weiter α den Winkel, den die Asymptote mit der grossen Axe der Hyperbel bildet, so ist $\cos\alpha = \frac{1}{e}$, woraus folgt

$$y = -a \operatorname{tg} \alpha$$

a ist für alle Bahnen desselben Schwarmes constant. Als Grenzfälle sind folgende zu betrachten: 1) wenn das Meteor central zur Erde fällt, entsprechend den Werthen $e = 1$ und $y = o$. 2) wenn die betreffende Bahnhyperbel die Erde berührt. In diesem Falle ist $a(1-e) = R$ und demzufolge, wie leicht zu sehen:

$$y = y_1 = R\frac{v}{v_0}$$

Diese beiden Hyperbeln schliessen alle Sternschnuppen ein, welche auf die Erde fallen. Bezeichnet man demnach mit A_0 die Anzahl der Sternschnuppen, welche auf die Erde fielen, wenn die Erdanziehung vernachlässigt würde, alle Bahnen also gradlinig wären und mit A die Anzahl der thatsächlich mit der Erde zusammentreffenden, so ist

$$\frac{A}{A_0} = \left(\frac{y_1}{R}\right)^2 = \left(\frac{v}{v_0}\right)^2 \tag{2}$$

Die Richtung des Radiationspunctes bei Vernachlässigung der Erdanziehung wird gegeben durch die Richtung der Asymptote der Bahnhyperbel. während die Tangente an diese in jenem Puncte, wo sie die Erdkugel schneidet, den beobachteten Radiationspunct angiebt. Bezeichnet ζ und z die Zenithdistanz des ersten bezw. zweiten Radianten, ferner γ

den Winkel, den die genannte Tangente mit der grossen Axe der zugehörigen Hyperbel bildet, so ergeben sich leicht folgende Formeln:

$$e \cos \gamma = \cos z; \quad \zeta - z = \gamma - \alpha$$

Hieraus findet man mit Hülfe des Flächensatzes

$$\left.\begin{aligned} R v \sin z &= - a v_0 \operatorname{tg} \alpha \\ \sin \gamma &= \sin \alpha \frac{v^2 + v_0^2}{2 v v_0} \end{aligned}\right\} \qquad (3)$$

und weiter die Formel für die sogenannte Zenithattraction $\zeta - z$:

$$\operatorname{tg} \frac{\zeta - z}{2} = \frac{v - v_0}{v + v_0} \operatorname{tg} \tfrac{1}{2} z$$

Es soll nun der Einfluss der Erdanziehung auf die Häufigkeit der Sternschnuppen für einen bestimmten Beobachtungsort abgeleitet werden. Nennt man D die Anzahl Meteore, welche in der Zeiteinheit durch die Flächeneinheit einer auf der oben festgelegten X-Axe senkrechten Ebene hindurchgiengen, falls keine Erdanziehung vorhanden wäre, so wäre die Anzahl N_0 der Meteore, welche durch einen unendlich schmalen Kreisring vom Radius y unter denselben Bedingungen hindurchgiengen:

$$N_0 = 2 \pi D y \, d y$$

Dieselbe Anzahl fällt in derselben Zeit infolge der Erdanziehung auf eine unendlich schmale Kugelzone der Erde, welche von zwei unendlich nahen kleinen Kreisen begrenzt wird, deren Pol die Richtung der Asymptote ist und deren Winkel-Distanzen von diesem ζ und $\zeta + d\zeta$ sind. Bezeichnet also δ die Dichtigkeit des wirklichen Sternschnuppenfalles, d. h. die Anzahl der Meteore, welche in der Zeiteinheit auf die Flächeneinheit der Erde fallen, so ist auch

$$N_0 = 2 \pi \delta R^2 \sin \zeta \, d \zeta$$

und infolge dessen:

$$\frac{\delta}{D} = \frac{y \, d y}{R^2 \sin \zeta \, d \zeta}$$

Nun ist aber $\zeta = z + \gamma - \alpha$ und nach der Formel für die Zenithattraction $\frac{d(\gamma - \alpha)}{dz} = \frac{\sin(\gamma - \alpha)}{\sin z}$, ferner nach dem Flächensatze $R v \sin z = y v_0$.

Hieraus folgt

$$\frac{d\zeta}{dy} = \left\{1 + \frac{\sin(\gamma - \alpha)}{\sin z}\right\} \frac{v_0}{R v \cos z}$$

woraus sich sofort ergiebt

$$\frac{\delta}{D} = \left(\frac{v}{v_0}\right)^2 \cdot \frac{\sin^2 z \cos z}{2 \sin\zeta \sin\frac{\zeta}{2} \cos(z - \frac{1}{2}\zeta)} \tag{4}$$

Die Formeln (3) und (4), letztere in weniger einfacher Gestalt, sind bereits von Schiaparelli a. a. O. abgeleitet worden.

3.

Wir können jetzt die Zunahme der Geschwindigkeitscomponenten eines Planeten, wofür wir im Folgenden die Erde nehmen werden, durch den Zusammenstoss mit einem Meteorschwarm leicht berechnen. Wegen der Symmetrie, welche um die gemeinschaftliche Richtung der Asymptoten aller Bahnhyperbeln stattfindet, wird eine Zunahme nur in dieser Richtung stattfinden. Wir haben nach Art. 1 die Summe $\Sigma m \frac{dx}{dt}$ zu bilden, wo m die auf einen Punct der Erde in der Zeiteinheit auffallende Masse und $\frac{dx}{dt}$ die Geschwindigkeitscomponente derselben in der Richtung der Asymptote ist. Nennt man nun D die Masse, welche in der Zeiteinheit durch die Flächeneinheit einer auf der Asymptote senkrechten Ebene in sehr grosser Entfernung von der Erde hindurchgeht, so ist die Masse, welche auf die oben betrachtete sehr schmale Kugelzone fällt

$$2\pi D y\, dy$$

Bezeichnet noch μ den Winkel, den diejenige Tangente an die Bahnhyperbel, welche die Erde in einem Puncte jener Zone schneidet, mit der Asymptote bildet, so hat man

$$\Sigma m \frac{dx}{dt} = A = \Sigma\, 2\pi D y v \cos\mu \cdot dy$$

Die Summe Σ kommt einer Integration in Bezug auf y zwischen den Grenzen $y = 0$ und $y = y_1 = R\frac{v}{v_0}$ gleich. Da man nun weiter hat $\mu = \gamma - \alpha$, so ist:

$$A = 2\pi D v \int_0^{y_1} \cos(\gamma - \alpha) \cdot y\, dy$$

Aus den Formeln (3) des vorigen Art. folgt aber, wenn man zur Abkürzung setzt:

$$\lambda = \frac{v^2 + v_0^2}{2 v v_0} \tag{1}$$

und berücksichtigt, dass:

$$\operatorname{tg} \alpha = -\frac{y}{a}$$

$$\sin \gamma = -\frac{\lambda \cdot \frac{y}{a}}{\sqrt{1 + \frac{y^2}{a^2}}}$$

$$\cos \gamma = \sqrt{1 - \frac{\lambda^2 y^2}{a^2 + y^2}}$$

für A die Formel:

$$A = 2\pi D v \int_0^{y_1} y\, dy \left\{ \lambda \frac{y^2}{a^2 + y^2} + \frac{a^2}{a^2 + y^2} \sqrt{1 - \frac{y^2}{y_1^2}} \right\}$$

Diese Integration kann man nach den gewöhnlichen Regeln ausführen. Es ist am vortheilhaftesten in der Endformel nur λ beizubehalten. Dann ergiebt sich nach leicht durchführbarer Rechnung:

$$A = 2\pi D R^2 v \left(\frac{v}{v_0}\right)^2 \left\{ \lambda (\lambda^2 - 1) \log \frac{\lambda + 1}{\lambda} + 1 - \lambda^2 + \frac{\lambda}{2} \right\}$$

Setzt man demnach

$$f = 2\lambda(\lambda^2 - 1) \log \operatorname{nat} \frac{\lambda + 1}{\lambda} + 2 - 2\lambda^2 + \lambda \tag{2}$$

so hat man einfach

$$A = \pi R^2 D v \left(\frac{v}{v_0}\right)^2 f$$

Aus der Definition der Grösse D folgt, dass:

$$\pi R^2 D$$

die Meteormasse ist, welche bei Vernachlässigung der Erdanziehung in der Zeiteinheit auf die Erde fiele. Wegen (2) des Art. (2) ist also die in der Zeiteinheit auf die Erde fallende Masse μ:

$$\mu = \pi R^2 D \left(\frac{v}{v_0}\right)^2; \text{ also: } A = \mu f v \tag{3}$$

Man kann noch bemerken, dass D selbstverständlich von der Geschwindigkeit v_0 abhängt und mit dieser wächst. Um also vergleichbare Resultate zu haben, muss man bedenken, dass

$$D = D_0 v_0$$

ist, wo D_0 die räumliche Dichtigkeit des Schwarmes ist d. h. die Masse in der Raumheit.

Die negative Richtung der Asymptote ist aber das, was man den scheinbaren (von Zenithattraction natürlich befreiten) Radiationspunct nennt. Bezieht man die in Art. 1 vorkommenden Coordinaten auf das System der Längen und Breiten und bezeichnet man Länge und Breite des scheinbaren Radiationspunctes mit λ' und β', so werden die Art. (1) vorkommenden Grössen jetzt so dargestellt werden:

$$\left.\begin{aligned}
(1) &= \frac{\mu}{m}\left(\frac{d\xi}{dt} - \frac{dx}{dt}\right) = -\pi \frac{R^2 D_0}{m} \cdot \frac{v^3}{v_0} f \cos\beta' \cos\lambda' \\
(2) &= \frac{\mu}{m}\left(\frac{d\eta}{dt} - \frac{dy}{dt}\right) = -\pi \frac{R^2 D_0}{m} \cdot \frac{v^3}{v_0} f \cos\beta' \sin\lambda' \\
(3) &= \frac{\mu}{m}\left(\frac{d\zeta}{dt} - \frac{dz}{dt}\right) = -\pi \frac{R^2 D_0}{m} \cdot \frac{v^3}{v_0} f \sin\beta'
\end{aligned}\right| \tag{4}$$

Hierdurch ist Alles gegeben, um den Einfluss des Zusammentreffens mit einem Meteorschwarm auf die Bewegung eines Planeten berechnen können.

Was die Grösse λ betrifft, so ist Folgendes zu bemerken: v ist stets grösser als v_0. Als mögliche Grenzfälle treten auf $\frac{v}{v_0} = 1$ und $\frac{v}{v_0} = \infty$.

Im ersten Falle ist $\lambda = 1$, im zweiten $\lambda = \infty$, während f die Werthe 1 bezw. 0 annimmt, so dass also f und $\frac{1}{\lambda}$ positive echte Brüche sind. Bei den kleineren Planeten ist indessen f stets sehr nahe gleich 1. So z. B. ist selbst in dem ungünstigsten Falle, wo nämlich die Sternschnuppen gleiche

Bewegungsrichtung mit der Erde haben, bei Voraussetzung parabolischer heliocentrischer Bewegung $f = 0.99$. Die parabolische Geschwindigkeit der Sternschnuppen ist freilich vorderhand nur eine Hypothese, aber eine solche, welche im grossen und ganzen den mittleren Verhältnissen bei den Meteoren Rechnung trägt. Es ist übrigens klar, dass eine Vergrösserung von v_0 den Werth von f nur noch mehr der Einheit nähert. Jedenfalls soll im Folgenden direct $f = 1$ gesetzt werden, weil dies in den Fällen der Anwendung vollkommen genügt. Den oben erwähnten und benutzten Zusammenhang schreiben wir schliesslich, um Alles beisammen zu haben, noch etwas anders. Bezeichnet g die Intensität der Schwere an der Oberfläche der Erde, so hat man:

$$\left.\begin{aligned} G &= 2\,g\,R \\ v^2 &= v_0^2 + G \end{aligned}\right\} \qquad (5)$$

4.

In den der Sonne näheren Theilen des Planetensystemes bewegen sich sehr viele grössere und kleinere Meteorschwärme. Gegenwärtig kennt man bereits mehrere Tausend solcher Ströme, welche die Erdbahn kreuzen. Ob das Beobachtungsmaterial aber ausreicht, um nähere Angaben, wie die Radianten und die Zahl der auffallenden Meteore mit der Länge der Erde in ihrer Bahn variiren, machen zu können, ist ohne genauere Untersuchungen nicht festzustellen. In Ermangelung solcher soll nun die möglichst einfache Hypothese betrachtet werden, die freilich vielleicht der Wahrheit nicht sehr nahe entsprechen wird, selbst wenn man von einigen sehr mächtigen Strömen, so den Leoniden und Perseiden, absieht, nämlich, dass die heliocentrischen Radianten gleichmässig am Himmel vertheilt sind, mit andern Worten, dass Sternschnuppen aus allen Gegenden mit gleicher Wahrscheinlichkeit herkommen, wenn von der Anziehung und Bewegung der Erde abgesehen wird. Ob man sich hierdurch dem wahren Zustand nähern wird, der durch den Einfluss der schwächeren Radianten erzeugt wird, muss also dahingestellt bleiben, wenngleich dies gegenwärtig als wahrscheinlich gelten darf.

Wie schon erwähnt, soll stets $f = 1$ angenommen werden. Ferner nehmen wir an, was die Allgemeinheit in keiner Weise beeinträchtigt, dass der Planet (Erde), dessen Bewegung untersucht wird, sich in der Ecliptik bewege. Sind dann w, β, λ, ungestörte heliocentrische Geschwindigkeit des Meteores, Breite und Länge des wahren Radiationspunctes, V und L Geschwindigkeit und Länge des Apex der Planetenbewegung, während alle früheren Bezeichnungen bestehen bleiben, so hat man:

$$w \cos \beta \cos \lambda = v_0 \cos \beta' \cos \lambda' - V \cos L$$
$$w \cos \beta \sin \lambda = v_0 \cos \beta' \sin \lambda' - V \sin L$$
$$w \sin \beta = v_0 \sin \beta'$$

Hierbei ist darauf geachtet, dass der Radiationspunct die Gegend des Himmels angiebt, woher die Bewegung erfolgt, der Apex dagegen anzeigt, wohin sich der Planet bewegt. Aus den angeführten Gleichungen ergiebt sich:

$$v_0^2 = w^2 + V^2 + 2\, w\, V \cos \beta \cos (\lambda - L)$$
$$v^2 = v_0^2 + G$$

Die Gleichungen (4) des vorigen Artikels werden jetzt:

$$(1) = -\pi \frac{R^2 D_0}{m} (w \cos \beta \cos \lambda + V \cos L)\, W$$

$$(2) = -\pi \frac{R^2 D_0}{m} (w \cos \beta \sin \lambda + V \sin L)\, W$$

$$(3) = -\pi \frac{R^2 D_0}{m} w \sin \beta \cdot W$$

worin

$$W = \frac{[w^2 + V^2 + G + 2\, w\, V \cos \beta \cos (\lambda - L)]^{\frac{1}{2}}}{w^2 + V^2 + 2\, w\, V \cos \beta \cos (\lambda - L)}$$

Es handelt sich nun um die Auffindung der Mittelwerthe von (1), (2) und (3), wenn die wahren Radianten gleichmässig am Himmel vertheilt sind. Diese erhält man, wenn man mit dem Flächenelemente $\cos \beta\, d\beta\, d\lambda$ multiplicirt, darauf in Bezug auf die ganze Kugeloberfläche integrirt und das Resultat durch 4π dividirt.

Setzt man also

$$4\pi A = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} \cos^2\beta\, d\beta \int_0^{2\pi} W \cos\lambda\, d\lambda$$

$$4\pi B = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} \cos^2\beta\, d\beta \int_0^{2\pi} W \sin\lambda\, d\lambda$$

$$4\pi C = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} \cos\beta\, d\beta \int_0^{2\pi} W\, d\lambda$$

so wird

$$(1) = -\frac{R^2 \pi D_0}{m}(w A + V C \cos L)$$

$$(2) = -\frac{R^2 \pi D_0}{m}(w B + V C \sin L)$$

$$(3) = 0$$

Man sieht also, was übrigens von vornherein klar war, dass die Bahnebene des Planeten nicht geändert wird. Führt man $\lambda - L = x$ ein, so kann man die obigen 3 Integrale auf 2 zurückführen, nämlich auf

$$\left.\begin{aligned} (\mathrm{I}) &= \frac{1}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2\beta\, d\beta \int_0^{\pi} W \cos x\, dx \\ C &= \frac{1}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos\beta\, d\beta \int_0^{\pi} W\, dx \end{aligned}\right\} \quad (1)$$

Denn es ist, wie sofort zu sehen

$$A \cos L + B \sin L = (\mathrm{I})$$
$$A \sin L - B \cos L = 0$$

d. h.

$$A = (\mathrm{I}) \cos L; \qquad B = (\mathrm{I}) \sin L$$

W hat hier selbstverständlich die Bedeutung:

$$W = \frac{(w^2 + V^2 + G + 2\,w\,V \cos\beta \cos x)^{\frac{3}{2}}}{w^2 + V^2 + 2\,w\,V \cos\beta \cos x}$$

Man hat also jetzt

$$\left.\begin{aligned} (1) &= -\frac{R^2 \pi D_0}{m} \Big\{ w\,(\mathrm{I}) + V\,C \Big\} \cos L \\ (2) &= -\frac{R^2 \pi D_0}{m} \Big\{ w\,(\mathrm{I}) + V\,C \Big\} \sin L \end{aligned}\right\} \qquad (2)$$

Diese Störungscomponenten drücken aber eine einfache Widerstandsbewegung aus, denn die störende Kraft wirkt allein in der Richtung der Tangente der Bahn.

5.

Die Doppelintegrale (I) und C lassen sich stets in endlicher Form angeben. Es ist das auf den ersten Blick etwas merkwürdig, weil die Integrale in Bezug auf x elliptische sind. Diese Reduction beruht auf der allgemeineren Bemerkung, dass man das die allgemeine Function f enthaltende Integral

$$J = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x\,dx \int_0^{\pi} f(\cos x \cos y)\,dy$$

sofort auf ein einfaches Integral zurückführen kann, wenn man f innerhalb der Integrationsgrenzen in eine Potenzreihe entwickeln darf. Wird nämlich für $f(z)$ die Form

$$f(z) = A_0 + A_1 z + A_2 z^2 + \ldots.$$

vorausgesetzt und bezeichnet man

$$\frac{\pi}{2} U_{2n} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2n} x\,dx = \frac{\pi}{2} \cdot \frac{1.3.5.2n-1}{2.4.6\ldots2n}$$

$$U_{2n+1} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2n+1} x\,dx = \frac{2.4.6\ldots2n}{1.3.5\ldots.2n-1} \cdot \frac{1}{2n+1}$$

so wird

$$\int_0^{\pi} f(\cos x \cos y)\, dy = \pi \{ A_0 + A_2 U_2 \cos^2 x + A_4 U_4 \cos^4 x + \ldots\ldots. \}$$

und demzufolge

$$J = \pi \{ A_0 + A_2 U_2 U_3 + A_4 U_4 U_5 + \ldots. \}$$

Nun ist aber

$$U_{2n} U_{2n+1} = \frac{1}{2n+1}$$

und hieraus folgt

$$J = \pi \{ A_0 + \tfrac{1}{3} A_2 + \tfrac{1}{5} A_4 + \ldots. \}$$

Den Ausdruck rechts kann man aber sehr leicht summiren. Es ergiebt sich sofort:

$$J = \frac{\pi}{2} \cdot \int_{-1}^{+1} f(z)\, dz$$

Auf ein Integral von der Form J lassen sich nun (I) und C sofort zurückführen. Setzt man nämlich zur Abkürzung

$$b = \frac{2wV}{w^2 + V^2 + G}; \quad \beta = \frac{2wV}{w^2 + V^2} \tag{1}$$

so ist

$$(\mathrm{I}) = \frac{1}{\pi} \frac{(w^2 + V^2 + G^2)^{\frac{3}{2}}}{w^2 + V^2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 x\, dx \int_0^{\pi} \cos y \frac{(1 + b \cos x \cos y)^{\frac{3}{2}}}{1 + \beta \cos x \cos y}\, dy$$

$$C = \frac{1}{\pi} \frac{(w^2 + V^2 + G^2)^{\frac{3}{2}}}{w^2 + V^2} \cdot \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x\, dx \int_0^{\pi} \frac{(1 + b \cos x \cos y)^{\frac{3}{2}}}{1 + \beta \cos x \cos y}\, dy$$

Nach dem obigen Integralsatz ist also:

$$\left.\begin{aligned} 2\,(\mathrm{I}) \frac{w^2 + V^2}{(w^2 + V^2 + G)^{\frac{3}{2}}} &= \int_{-1}^{+1} z \frac{(1 + bz)^{\frac{3}{2}}}{1 + \beta z}\, dz = K \\ 2\,C \frac{w^2 + V^2}{(w^2 + V^2 + G)^{\frac{3}{2}}} &= \int_{-1}^{+1} \frac{(1 + bz)^{\frac{3}{2}}}{1 + \beta z}\, dz = J \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

Zunächst hat man sofort

$$J + \beta K = \frac{2}{5b} \cdot \left[(1+b)^{\frac{5}{2}} - (1-b)^{\frac{5}{2}}\right] \tag{3}$$

Das Integral J lässt sich auf eine einfachere Form bringen durch die Substitutionen

$$1 + \beta z = x; \quad a = \frac{b - \beta}{\beta}; \quad c = \frac{b}{\beta}$$

Dann wird nämlich

$$J = \frac{1}{\beta} \cdot \int\limits_{1-\beta}^{1+\beta} \frac{dx}{x} (a + c x)^{\frac{3}{2}}$$

und wenn die Integration nach bekannten Regeln ausgeführt wird:

$$J = \frac{2a}{\beta} \left\{ \sqrt{1+b} - \sqrt{1-b} \right\} + \frac{2}{3\beta} \left[(1+b)^{\frac{3}{2}} - (1-b)^{\frac{3}{2}}\right] \tag{4}$$
$$+ \frac{a^{\frac{3}{2}}}{\beta} \log \left\{ \frac{\sqrt{1+b} - \sqrt{a}}{\sqrt{1+b} + \sqrt{a}} \cdot \frac{\sqrt{1-b} + \sqrt{a}}{\sqrt{1-b} - \sqrt{a}} \right\}$$

Diese strengen Formeln (1), (2), (3) und (4) lösen die Aufgabe allgemein und sie werden bei den grossen Planeten in der That anzuwenden sein. Dazu liegt aber gegenwärtig wenig Veranlassung vor. Es sollen vielmehr solche Anwendungen derselben gemacht werden, die sehr bedeutende Vereinfachungen zulassen.

6.

Um zunächst die Verhältnisse bei der Erde in Betracht zu ziehen, so wird es jedenfalls erlaubt sein, die Erdbahn als Kreis anzunehmen. Ferner ist in Kilometern und Zeitsecunden ausgedrückt V rund 30 und $G = 125$. Die parabolische Hypothese $w = V\sqrt{2}$ ist zwar in neuerer Zeit vielfach angezweifelt worden; es scheint aber doch, dass sie geeignet ist, bei rohen Mittelwerthen als Grundlage zu dienen. Sie soll deshalb hier angenommen werden. Man überzeugt sich auch leicht durch eine einfache Rechnung, dass es, obwohl damit nicht viel Mühe verbunden ist, unnöthig wäre, die strengen Formeln anzuwenden. Vielmehr erhält man bis auf wenige Procente richtige Werthe, wenn man $G = 0$ setzt, also die Erdanziehung ganz vernachlässigt. Dieses Resultat war von vornherein keineswegs selbstverständlich.

Machen wir die erwähnten Annahmen, so folgt nach Art. 5, (1)

$$b = \beta = \frac{2\sqrt{2}}{3}; \quad a = 0$$

und man findet

$$(\mathrm{I}) = 0.300\, V$$
$$C = 1.650\, V$$

Hiermit werden also die durch den Zusammenstoss mit den Meteoriten erzeugten Störungscomponenten

$$\left.\begin{aligned} (1) &= -\frac{R^2 \pi D_0}{m} \lambda' V^2 \cos L \\ (2) &= -\frac{R^2 \pi D_0}{m} \lambda' V^2 \sin L \end{aligned}\right| \quad \lambda' = 2.074 \qquad (1)$$

Diese Gleichungen definiren demnach eine Widerstandsbewegung, deren Charakter vollständig bekannt ist.

Es erübrigt noch, den Widerstandsfactor etwas anders zu bestimmen. Nach Art. 3, (3) ist die Masse μ, welche in der Zeiteinheit, als welche in gebräuchlicher Weise der mittlere Sonnentag gewählt wird, auf die Erde fällt, definirt durch:

$$\mu = \pi D_0 R^2 \cdot \frac{v^2}{v_0}$$

also im vorliegenden Falle:

$$\mu = \frac{\pi D_0 R^2}{4\pi} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} \cos\beta\, d\beta \int_0^{2\pi} d\lambda \cdot \frac{w^2 + V^2 + G + 2\, w\, V \cos\beta \cos(\lambda - L)}{\sqrt{w^2 + V^2 + 2\, w\, V \cos\beta \cos(\lambda - L)}}$$

oder wenn auch hier G vernachlässigt wird:

$$\mu = \pi D_0 R^2 C$$

Setzt man dies in (1) ein, so wird:

$$\begin{aligned} (1) &= -\frac{\mu}{m} \lambda V \cos L \\ (2) &= -\frac{\mu}{m} \lambda V \sin L \end{aligned} \qquad \lambda = 1.26$$

Hierzu kommen noch die Glieder, welche von der Massenvergrösserung der Erde herrühren. Man wird annehmen dürfen, dass diese der Zeit proportional vor sich geht, also setzen:

$$\Delta m = \mu t$$

und die Störungscomponenten werden nach Art. 1, (5)

$$\left.\begin{aligned} X &= -k^2 \mu t \frac{x}{r^3} - \frac{\mu}{m} \lambda V \cos L \\ Y &= -k^2 \mu t \frac{y}{r^3} - \frac{\mu}{m} \lambda V \sin L \\ Z &= 0 \end{aligned}\right\} \qquad (2)$$

Für die kreisförmige Erdbahn mit dem Radius a ist $L = 90^0 + nt$, wo n die mittlere Bewegung der Erde bedeutet. Die Störungscomponenten R und S in der Richtung des Radiusvectors, bezw. senkrecht darauf, sind dann:

$$R = -k^2 \frac{\mu t}{a^2}; \quad S = -\frac{\mu}{m} \lambda a n$$

Hierdurch entstehen bekanntlich in der mittleren Länge l säculare Glieder. Diejenigen, welche von der Massenvergrösserung herrühren, sind, wenn die Sonnenmasse gleich 1 gesetzt wird:

$$\Delta l_1 = \mu n t^2$$

während infolge des Zusammenstosses die Glieder zu Stande kommen:

$$\Delta l_2 = \tfrac{3}{2} n \lambda \frac{\mu}{m} t^2$$

Hieraus folgt, das Δl_1 gegenüber Δl_2 gänzlich zu vernachlässigen ist. Denn man findet

$$\frac{\Delta l_2}{\Delta l_1} = \tfrac{3}{2} \lambda \frac{1}{m} = \text{rund } 610000$$

Wenn z. B. im Jahrhundert so viel meteorische Masse auf die Erde fiele, dass hierdurch eine gleichmässige Schicht von 1 mm Höhe und der mittleren Erddichte entstände, so würde wenn t in Jahrhunderten angegeben wird, rund:

$$\Delta l_2 = 0''.12\, t^2$$

Etwas anders gestaltet sich die Sache, wenn man die Mondbewegung untersucht. Es soll dies jetzt geschehen, weil ein ähnlicher Versuch bereits vorliegt. Bezeichnet man die heliocentrischen Coordinaten des Mondes m' mit $x'y'z'$, seine heliocentrische Geschwindigkeit mit V' und nimmt man der Einfachheit wegen die Neigung der Mondbahn gegen die Ecliptik gleich Null an, so wird die Breite der heliocentrischen Mondbewegung Null sein, während die Mondlänge L' ist. Die der Erde zugehörigen Grössen sollen, wie früher, mit denselben ungestrichenen Buchstaben bezeichnet werden. Dann hat man für Mond bezw. Erde die Gleichungen:

$$\frac{d^2x'}{dt^2} + k^2(1+m')\frac{x'}{r'^3} = k^2 m\,\frac{x-x'}{\Delta^3} - k^2 m\,\frac{x}{r^3} - \frac{\mu'}{m'}\lambda' V' \cos L'$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} + k^2(1+m)\frac{x}{r^3} = -k^2 m'\,\frac{x-x'}{\Delta^3} - k^2 m'\,\frac{x'}{r'^3} - \frac{\mu}{m}\lambda V \cos L$$

Hierin bedeutet selbstverständlich Δ die Entfernung Mond—Erde und für die Mondmasse m' haben wir zu setzen:

$$m' = m_0' + \mu' t$$

wo μ' die tägliche Zunahme der Mondmasse ist. Für die geocentrische Coordinate ξ des Mondes ergiebt sich also durch Subtraction:

$$\frac{d^2\xi}{dt^2} + k^2(m+m')\frac{\xi}{\Delta^3} = -k^2\left(\frac{x'}{r'^3} - \frac{x}{r^3}\right) - \frac{\mu'}{m'}\lambda' V' \cos L' + \frac{\mu}{m}\lambda V \cos L$$

Die durch den Zusammenstoss erzeugte störende Kraft ist demnach:

$$X = -k^2(\mu+\mu')\frac{t\xi}{\Delta^3} - \frac{\mu'}{m'}\lambda' V' \cos L' + \frac{\mu}{m}\lambda V \cos L$$

$$Y = -k^2(\mu+\mu')\frac{t\eta}{\Delta^3} - \frac{\mu'}{m'}\lambda' V' \sin L' + \frac{\mu}{m}\lambda V \sin L$$

Wir wollen nun die Bahn des Mondes um die Erde als Kreisbahn mit dem Radius a' und der mittleren Bewegung n' annehmen. Dann sind die Störungscomponenten R und S in der Richtung des Radiusvectors und senkrecht darauf:

$$R = -k^2(\mu+\mu')\frac{t}{a'^2} + \left(\frac{\mu'}{m'}\lambda' - \frac{\mu}{m}\lambda\right) a n \sin(n'-n)t$$

$$S = -\frac{\mu'}{m'}\lambda' a' n' - \left(\frac{\mu'}{m'}\lambda' - \frac{\mu}{m}\lambda\right) a n \cos(n'-n)t$$

Wenn man nur die säcularen Glieder aufsucht, so fallen die zweiten Glieder auf den rechten Seiten fort. In der mittleren Mondlänge Λ erhält man so nach dem Vorigen folgende Säcularveränderungen:

1) Infolge der Massenvergrösserung

$$\varDelta \Lambda_1 = \frac{\mu + \mu'}{m + m'} \cdot n' t^2$$

2) Infolge des Zusammenstosses

$$\varDelta \Lambda_2 = \tfrac{3}{2} n' \lambda' \frac{\mu'}{m'} t^2$$

Man wird die Dichtigkeit der auf den Mond fallenden Meteorschwärme gleich derjenigen, welche mit der Erde zusammentreffen, annehmen können und demzufolge, da auch die heliocentrische Mondbewegung sich nur wenig von der heliocentrischen Erdbewegung unterscheidet, $\lambda = \lambda'$ setzen dürfen. Es wird also genügen zu setzen

$$\mu' = \mu \left(\frac{R'}{R}\right)^2$$

wo R' den Mondradius bedeutet. Wählt man nun wieder die obigen Annahmen als Beispiel, so folgen in runden Zahlen die Werthe

$$\varDelta \Lambda_1 = 0''.9\, t^2$$
$$\varDelta \Lambda_2 = 9''.2\, t^2$$

Der Zahlenwerth für $\varDelta \Lambda_2$ stimmt absolut nicht mit den Rechnungen überein, welche Oppolzer in einem sehr interessanten Aufsatze in Nr. 2573 der „Astronomischen Nachrichten" ausgeführt hat. Dort wird eine Massenanhäufung von derselben Grösse wie in dem obigen Beispiel behandelt und die daraus sich ergebende Acceleration in der mittleren Mondbewegung bestimmt. Oppolzer findet für denjenigen Theil, welcher

aus der Vergrösserung der Mondmasse entsteht . . . $0''.87$

von der Wirkung des Zusammenstosses herrührt . . . $0''.26$

endlich wird die Rotationsdauer der Erde durch die eingetretene Massenvermehrung derselben geändert, was auf den Mond übertragen eine Acceleration hervorruft

im Betrage von . . . . $0''.68$

Alle drei Posten geben zusammen 1."81. Da nun bekanntlich die Störungstheorie etwa 5" in der mittleren Mondbewegung unerklärt lässt, so folgert Oppolzer, dass im Jahrhundert eine Menge kosmischen Staubes mit der Erde vereinigt wird, welche einer Schicht von 2.8 mm Höhe von einer Dichte gleich der mittleren Dichte der Erde gleich kommt. Aus dem Vorigen folgt, dass das Zahlenresultat Oppolzer's unrichtig ist, indem der Einfluss des Zusammenstosses 35 mal so gross ist als Oppolzer angenommen hat. Der begangene Fehler hat darin seinen Grund, dass Oppolzer der Meinung war, „es wird in dieser Hinsicht nur jene Masse in Wirksamkeit treten, die in dem Volumen enthalten ist, welches der Mond in seiner relativen Bewegung um die Erde durchstreift."

Auch die weitere Annahme Oppolzer's, dass die staubförmige Masse sich in absoluter Ruhe relativ zur Sonne befinde, dürfte wohl nicht haltbar sein, wodurch übrigens das Zahlenresultat nicht viel geändert wird. Indessen scheint es doch wünschenswerth, die Sachlage direct unter den von Oppolzer betrachteten Umständen klar zu stellen, um den erhobenen Widerspruch gegen das Resultat eines so bedeutenden Astronomen völlig zu begründen. Die heliocentrische Geschwindigkeitszunahme durch die Aufnahme ruhender Massen ist gegeben für den Mond durch

$$\Delta \frac{dx'}{dt} = -\frac{\mu'}{m'} \frac{dx'}{dt}$$

und für die Erde durch

$$\Delta \frac{dx}{dt} = -\frac{\mu}{m} \frac{dx}{dt}$$

also wird die Zunahme der relativen Geschwindigkeiten

$$\Delta \frac{d\xi}{dt} = -\frac{\mu'}{m'} \frac{d\xi}{dt} + \left(\frac{\mu}{m} - \frac{\mu'}{m'}\right) \frac{dx}{dt}$$

$$\Delta \frac{d\eta}{dt} = -\frac{\mu'}{m'} \frac{d\eta}{dt} + \left(\frac{\mu}{m} - \frac{\mu'}{m'}\right) \frac{dy}{dt}$$

was mit den obigen Formeln vollkommen übereinstimmt, wenn man $\lambda' = \lambda = 1$ setzt. In der That muss dies aber geschehen, wenn die Meteormassen keine heliocentrische Bewegung zeigen. Diese Formeln ergeben für die Acceleration der mittleren Mondbewegung 7."3 also rund 28 $\times$ 0."26.

Nach dem Vorstehenden wäre also die Oppolzer'sche Schicht auf etwa $^1/_2$ mm zu reduciren. Ob hierdurch der Erklärungsversuch wesentlich an Wahrscheinlichkeit gewinnt, ist natürlich eine ganz andere Frage, die voraussichtlich zu verneinen sein wird. Herr Braun hat in Nr. 2582 der A. N. eine solche Erklärung abgelehnt, weil die nothwendige Massenvergrösserung der Erde viel zu gross sei, und diese Ablehnung durch Gründe gestützt, denen man eine gewisse Berechtigung nicht wird absprechen können. Einige Einschränkungen wird man freilich wohl machen können, ohne mit den Beobachtungen in Widerspruch zu gerathen.

7.

Ein weiteres Beispiel der directen Anwendung der obigen Formeln geben die Cometen ab. Man wird hier ohne Zweifel von der Anziehung absehen können, welche diese Körper auf die Meteorschwärme ausüben. Ferner wird man sich erlauben können die Cometenbahnen als Parabeln anzusehen. Es ist das freilich bei den periodischen Cometen nur in nicht gar weiter Entfernung vom Perihel erlaubt, wird aber den Gesammterfolg schon deshalb wenig ändern, weil die Annahme viel für sich hat, dass die Dichtigkeit der Meteorschwärme in der Nähe der Sonne grösser ist und rasch mit der Entfernung von ihr abnimmt. Unter diesen Voraussetzungen ist also $w = V$ zu setzen und man erhält für die Störungscomponenten die Ausdrücke

$$(1) = -\tfrac{8}{5}\frac{R^2\pi}{m} D_0 V^2 \cos L$$

$$(2) = -\tfrac{8}{5}\frac{R^2\pi}{m} D_0 V^2 \sin L$$

Da ausserdem im vorliegenden Falle von einer Vergrösserung der Masse abgesehen werden kann, so ergiebt sich hier die bekannte Widerstandsbewegung, wie sie beim Encke'schen Cometen constatirt worden ist. Man mag über diese Erklärung der Anomalien in der Bewegung des Encke'schen Cometen denken wie man will, jedenfalls genügt sie den Beobachtungen vollkommen und lässt auch die sonst räthselhaften Veränderungen in der Widerstandsconstanten vollkommen erklärlich erscheinen. Denn wir haben gar keinen Anlass, D_0 als unabhängig von Ort und Zeit anzunehmen, ja sogar sprungweise Aenderungen desselben haben in keiner Weise etwas Auffallendes. Desgleichen wird die, wie es scheint, von den Beobachtungen geforderte Annahme, dass D_0 mit der Entfernung von der Sonne abnimmt, nichts Ueberraschendes bieten.

Ich gehe nicht darauf ein zu zeigen, wie sich die hier und wohl auch früher schon gelegentlich erwähnte Hypothese über das sogenannte widerstehende Mittel vortheilhaft von andern unterscheidet. Desgleichen sollen andrerseits gewisse Schwierigkeiten, die sich ohne Zweifel angeben lassen, unerörtert bleiben. Nur einen Punct möchte ich hier erwähnen. Es war mir seit langer Zeit auffallend, wie man dieses Mittel mit dem die Bewegung des Lichtes vermittelnden Medium identificiren konnte. Von Astronomen ist diese Ansicht wohl kaum ernstlich ausgesprochen worden, in physikalischen Büchern und populären Schriften findet man aber noch heute diese Erklärung erwähnt. Abgesehen davon, dass diese Annahme sich nicht damit verträgt, was doch von den Beobachtungen gefordert wird, dass das Mittel die translatorische Bewegung des Sonnensystemes mitmachen müsste, bereitet die Annahme, dass die Dichtigkeit dieses Mittels von der Entfernung von der Sonne abhängt, fast unüberwindliche Schwierigkeiten. Zum mindesten, wenn man selbst eine auch sonst nicht als zulässig erscheinende Zusammendrückbarkeit dieses Aethers gelten lassen wollte, würden daraus infolge der Lichtbrechung in einem nicht überall gleich dichten Medium scheinbare Anomalien in der Bewegung der Planeten Mercur und Venus sich ergeben, von denen nichts bekannt ist. Freilich kann man wohl kaum Zahlenresultate in dieser Richtung anführen, aber diese Untersuchung müsste jedenfalls angestellt werden, ehe man dem Lichtaether solche ungewohnte Eigenschaften beizulegen sich entschliesst.

8.

Wie schon am Anfange dieses Aufsatzes bemerkt worden, folgt die Theilung planetarischer Massen infolge der Auslösung innerer Kräfte, da sie in mechanischem Sinne einer Explosion gleichkommt, genau denselben Gesetzen, wie der Zusammenstoss. Man hat nur die sich abtrennende Masse als negativ, also das mit μ behaftete Glied ebenfalls negativ anzusetzen. Solche explosive Erscheinungen traten bisher in einer Ausdehnung, die zu näherer Betrachtung auffordert, nur bei den Cometen auf. Hier ist aber das Problem ein sehr einfaches, weil weder eine Verkleinerung der Cometenmasse in Rechnung gezogen zu werden braucht, und weil infolge der allem Anscheine nach sehr kleinen Cometenmasse gleich nach der Abtrennung von der gegenseitigen Anziehung beider Theile abgesehen werden darf. Die erste, übrigens leicht zu berücksichtigende, Vernachlässigung ist erlaubt wegen der geringeren Genauigkeit der Beobachtungen und weil die Umlaufszeit sich noch bei keinem Cometen so genau hat bestimmen lassen, dass dieser Umstand in Frage käme. Die zweite Vernachlässigung wird noch dadurch plausibler, dass die Ausströmungen und Theilungen der Cometenmassen mit grosser Geschwindigkeit vor sich gehen, wenn anders die betreffenden Theorien als zutreffend anerkannt werden.

Bessel hat in einem interessanten und in neuerer Zeit vielfach citirten Aufsatze[1]) den Einfluss der Ausströmungen auf die Bewegung der Cometen in einigen Richtungen untersucht, hieran aber Folgerungen geknüpft, gegen die sich, wie ich glaube, nicht unwesentliche Bedenken erheben lassen. Aus diesem Grunde soll hier auf diesen Gegenstand mit wenigen Worten eingegangen werden.

Als gesichertes Beobachtungsresultat werden wir ansehen können, dass die die Schweifbildung hervorrufenden Ausströmungen von der Sonne hervorgerufen werden und zunächst in der Richtung nach der Sonne hin stattfinden. Die Reaction, welche hierdurch auf die Hauptmasse des Cometen ausgeübt wird, geschieht also in der positiven Richtung des Radiusvectors. Dies gilt natürlich nur für den mittleren Zustand. Hieran wird aber durch die von Bessel zuerst erkannten und studirten periodischen Schwankungen der Ausströmung nichts geändert, vielmehr zeigen diese gerade, dass die Richtung des Radiusvectors eine Gleichgewichtslage, also eine mittlere Lage, darstellt. Es ist das auch von vornherein sehr wahrscheinlich, weil die Ausströmungen jedenfalls durch Kräfte hervorgerufen werden, die in der Sonne ihren Sitz haben, gleichgiltig ob dies in letzter Instanz thermische, electrische oder irgend welche andere sind. Ferner ist durch die Beobachtungen festgestellt, dass die Intensität der Ausströmung mit der Annäherung des Cometen an das Perihel zunimmt,

1) Bemerkungen über mögliche Unzulänglichkeit der die Anziehungen allein berücksichtigenden Theorie der Cometen. Astron. Nachr. Band 13. Abhandlungen Bessel's herausg. von Engelmann Band I pag. 80.

meistens nicht im Perihel sondern später das Maximum erreicht und überhaupt nach dem Perihel stärker ist als sie in den entsprechenden Puncten vor der Sonnennähe war. Es ist dies eine ganz ähnliche Erscheinung, wie wir sie sehr oft beobachten. Hierher gehört z. B. die Thatsache, dass nicht Mittags, sondern einige Stunden später das Maximum der Temperatur eintritt u. s. f.

Giebt man dies zu und ich glaube, dass neue Hypothesen nothwendig sind, um das Gesagte zu bestreiten und nicht um es zu bekräftigen, so folgt aber, dass die Ausströmungen bei periodischen Cometen niemals so wirken, wie das sogenannte widerstehende Mittel. Das Characteristische der Wirkung des letzteren besteht darin, dass die mittlere Länge im quadratischen Verhältnisse der Zeit zunimmt. Um also die eben gemachte Bemerkung zu rechtfertigen, ist es erforderlich zu zeigen, dass ein solches Glied als Folge der Ausströmung nicht auftritt.

Nennt man g die Geschwindigkeit, mit der die Masse μ in der Richtung des Radiusvectors zur Sonne ausströmt, so sind die störenden Kräfte der Reaction auf die Bewegung des Cometen mit der Masse m:

$$X = + g \frac{\mu}{m} \frac{x}{r}$$

$$Y = + g \frac{\mu}{m} \frac{y}{r}$$

Hierdurch entsteht die störende Kraft R in der Richtung des wachsenden Radiusvectors

$$R = + g \frac{\mu}{m}$$

und die Differentialgleichung für die Störung Δl in der mittleren Länge ist, unter Beibehaltung der üblichen Bezeichnung für die übrigen Elemente

$$\frac{d(\Delta l)}{dt} = -\frac{2}{a^2 n} g r \frac{\mu}{m} - \frac{3e}{a\sqrt{1-e^2}} \int g \frac{\mu}{m} \sin v \, dt$$

Hieraus folgt

$$\Delta l = -\frac{2}{a^2 n} \int g r \frac{\mu}{m} dt - \frac{3e}{a\sqrt{1-e^2}} \int dt \int g \frac{\mu}{m} \sin v \, dt$$

Das erste Glied ist stets negativ, das zweite, solange man sich vor dem Perihel befindet, sicher positiv. Vom Perihel fängt dasselbe zu wachsen an, weil sin v positiv ist und wächst. Da nun den obigen Auseinandersetzungen gemäss $g\frac{\mu}{m}$ nach dem Perihel grösser ist als in den Puncten mit demselben v vor dem Perihel, so wird das zweite Glied für einen Punct mit positivem v kleiner sein als es in einem Puncte mit demselben aber negativem v war. Es wird also überhaupt, wenn man Δl dadurch bestimmt, dass man einen periodischen Cometen von Umlauf zu Umlauf verfolgt, die mittlere Länge mit der Zeit a b n e h m e n.

Dies ist aber gerade das Gegentheil von dem, was man beim Encke'schen Cometen beobachtet hat. Will man also die Ausströmungserscheinungen zu einer Erklärung der Anomalie in der Bewegung des Encke'schen Cometen verwenden, so muss entweder die Hypothese gemacht werden, dass im Durchschnitt die Ausströmung vor dem Perihel intensiver war als nach demselben, eine Hypothese, die ich, wenigstens nach dem gegenwärtigen Stande unseres Wissens, als sehr wenig wahrscheinlich betrachten muss oder man muss ganz bestimmte und vorderhand nicht bewiesene Annahmen über eine Abweichung der Richtung der Ausströmung von der des Radiusvectors voraussetzen. Ich halte es deshalb für nicht gerechtfertigt, wenn man in neuerer Zeit auf diese Erklärung für die Anomalien in der Bewegung des Encke'schen Cometen zurückgekommen ist.

In anderer Richtung sind aber die im Bessel'schen Aufsatze enthaltenen Anregungen von der grössten Wichtigkeit. Man erhält bei durchaus nicht extravaganten Annahmen so bedeutende p e r i o d i s c h e Störungen, dass man sich billigerweise verwundern muss, dass so bedeutende Einflüsse bei Cometen mit starker Schweifbildung bisher nicht bemerkt sein sollten. Wir besitzen seit Bessel's Zeit sehr viele gut beobachtete und umsichtig berechnete Cometenbahnen, nirgends haben sich aber bisher Differenzen zwischen Berechnung und Beobachtung ergeben, die nicht auf andere Weise erklärt werden könnten. Hierdurch ist man aber doch zu dem Schlusse berechtigt, dass die Grösse $g\frac{\mu}{m}$ bei allen diesen Cometen sehr klein sei und da andrerseits die nicht kleinen Werthe für g, welche die Bessel'sche Theorie der Schweifbildung ergiebt, als ziemlich gesichert angesehen werden können, so muss geschlossen werden, dass $\frac{\mu}{m}$ nur einen minimalen Bruchwerth annehmen kann, dass also die ausströmende Masse selbst gegen die sehr kleinen Cometenmassen verschwindend klein ist. Diese Ansicht über die ungeheuere Dünnheit der Materie, welche die Cometenschweife bildet, steht auch sonst mit allen Beobachtungen im Einklang und sie schliesst sich den in neuerer Zeit gemachten Versuchen über die Zerstäubung belichteter Metallmassen in vieler Hinsicht so eng an, dass vorderhand die Vermuthung eines Zusammenhanges beider Erscheinungen, wie auch von anderer Seite bereits ausgesprochen worden ist, wenigstens nicht unbedingt abzuweisen ist.

Ueberhaupt hat man wohl keinen Grund die Ansicht festzuhalten, dass im oder vom Cometenkerne aus bedeutende Massen durch explosive Kräfte umgesetzt werden, denn dann müssten nothwendig Reactionswirkungen eintreten, von denen bisher nichts beobachtet worden ist. Sehr interessant ist in dieser Beziehung der grosse Comet 1882 II, welcher mehrere Kerne zeigte, die während seiner Sichtbarkeit mehr oder weniger hervorgetreten sind. Die erschöpfende Bearbeitung, welche Herr Dr. Kreutz[1]) für die von ihm als Hauptkern bezeichnete Verdichtung durchgeführt hat, hat Alles in die schönste Uebereinstimmung gebracht. Desgleichen hat sich nach den Untersuchungen des Herrn Tisserand[2]) gezeigt, dass die Bewegung der zweiten helleren Verdichtung durch die Kepler'schen Gesetze allein geregelt wird. Es kann also eine nennenswerthe Einwirkung der beiden Kerne aufeinander während der Sichtbarkeit nicht stattgefunden haben und eine Theilung im obigen Sinne musste jedenfalls früher sich vollzogen haben. Dies wird sich aber schwer sicher feststellen lassen. Wenn man sich ein Bild von solchen Erscheinungen wie die Theilung des Biela'schen Cometen, des plötzlichen Auftauchens von Nebencometen in grösseren oder kleineren Entfernungen vom Hauptkern u. s. f. machen will, so wird dies, wenn die Zukunft nicht ganz durchgreifende Richtigstellungen bringt, wohl kaum anders ausfallen können, als dass man annimmt, die physikalischen Bedingungen für Er-

1) Publication der Sternwarte in Kiel. 1888.
2) Bulletin astronomique.

scheinungen, welche Cometen genannt werden, könnten an mehreren Stellen, wenn auch in sehr verschiedenen Graden, gegeben sein. Halten wir den engen Zusammenhang zwischen Sternschnuppenschwärmen und Cometen fest, so würde also ein solcher Schwarm bald da bald dort die physikalischen Bedingungen erlangen, welche ihn als Cometen erscheinen lassen. Die Mitwirkung störender Planeten bei der Ausbreitung solcher Schwärme braucht selbstverständlich in keiner Weise ausgeschlossen werden. Das bekannte Vorkommen von Cometensystemen, die Theilung des Biela'schen Cometen, der Pogson'sche Comet und der wahrscheinlich mit ihm identische Sternschnuppenfall verlieren dann in astronomischer Beziehung das Auffallende und Merkwürdige, das ihnen noch anhaftet. Dass hiermit über die physikalische Erklärung der Cometen noch nichts gesagt ist und gesagt werden soll, versteht sich von selbst.

Es ist zu bedauern, dass der Biela'sche Comet, der für solche Fragen noch immer das geeignetste Object ist, bisher keine so eingehende Berechnung gefunden hat, als zu wünschen wäre. Es mag dies zum Theil darin liegen, dass die genannte Aufgabe nicht immer in jener Beschränkung angefasst worden ist, die vorläufig Aussicht auf Gelingen darbietet, dass man vielmehr gleich von Anfang an sich vornimmt, den Cometen durch möglichst viele Erscheinungen zu verfolgen. Es kommt vielmehr bei der wichtigen Frage, die sich beim Biela'schen Cometen darbietet, nämlich nach dem Verhalten der beiden Cometen, die sich im Jahre 1845 an Stelle des einen Cometen zeigten, wesentlich auf eine möglichst sorgfältige Verbindung der beiden Erscheinungen von 1832 und 1845 an. Die weitere Verbindung 1845—1852 wird dann erst in theoretischer Beziehung wichtig, denn bekanntlich hat Hubbard nicht mit voller Sicherheit festellen können, welche Oerter in beiden Erscheinungen zu demselben Objecte gehören.

Wenn eine Theilung durch explosive Kräfte stattgefunden hat, so lassen sich die Beziehungen zwischen den Elementen der beiden Theilcometen und dem ursprünglichen, aus denen sie hervorgegangen sind, sehr leicht ableiten. Denn es ist in Bezug auf ein festes heliocentrisches Coordinatensystem im Augenblick der Trennung:

$$(m_1 + m_2)\frac{dx}{dt} = m_1\frac{dx_1}{dt} + m_2\frac{dx_2}{dt}$$

$$(m_1 + m_2)\frac{dy}{dt} = m_1\frac{dy_1}{dt} + m_2\frac{dy_2}{dt}$$

$$(m_1 + m_2)\frac{dz}{dt} = m_1\frac{dz_1}{dt} + m_2\frac{dz_2}{dt}$$

wo $m_1\, m_2$ und $x_1\, y_1\, z_1\, x_2\, y_2\, z_2$ die Massen und Coordinaten der beiden Theile, $x\, y\, z$ die Cordinaten für den ursprünglichen Cometen bedeuten. Sehr einfach gestalten sich hieraus die folgenden Beziehungen zwischen den halben Parametern p, den Neigungen i und den Knotenlängen Ω der drei Bahnen:

$$\sqrt{p}\cos i = \frac{m_1}{m_1 + m_2}\sqrt{p_1}\cos i_1 + \frac{m_2}{m_1 + m_2}\sqrt{p_2}\cos i_2$$

$$\sqrt{p}\sin i\cos\Omega = \frac{m_1}{m_1 + m_2}\sqrt{p_1}\sin i_1\cos\Omega_1 + \frac{m_2}{m_1 + m_2}\sqrt{p_2}\sin i_2\cos\Omega_2$$

$$\sqrt{p}\sin i\sin\Omega = \frac{m_1}{m_1 + m_2}\sqrt{p_1}\sin i_1\sin\Omega_1 + \frac{m_2}{m_1 + m_2}\sqrt{p_2}\sin i_2\sin\Omega_2$$

Die Controle, welche diese Formeln, für eine im Uebrigen nach den obigen Bemerkungen nicht wahrscheinliche Hypothese über den Theilungsvorgang abgeben, wird aber meistens nur bei sorgfältig geführten Störungsrechnungen von Werth sein können.

Druckfehler:

pag. 480, Zeile 2 v. u. vor der zweiten Klammer lies — statt +.
