Ueber

die reducirte Länge eines geodätischen Bogens

und

die Bildung jener Flächen, deren Normalen eine gegebene Fläche berühren.

Von

A. v. Braunmühl.

Ueber die reducirte Länge eines geodätischen Bogens und die Bildung jener Flächen, deren Normalen eine gegebene Fläche berühren.

Von

A. v. Braunmühl.

Denkt man sich eine Fläche mit einer einfach unendlichen Schaar von geodätischen Linien überdeckt und zu diesen die Orthogonaltrajectorien construirt, so können diese zwei Curvensysteme zur Lagenbestimmung eines Punktes der Oberfläche benützt werden. Als Maass des Bogens einer Orthogonaltrajectorie zwischen zwei unendlich benachbarten geodätischen Linien tritt bei der Darstellung des Linienelementes der Fläche in dem erwähnten Coordinatensystem eine Funktion auf, die zuerst von Gauss[1]) eingeführt und später von Herrn Christoffel[2]) mit dem Namen „reducirte Länge" bezeichnet wurde. In den Abhandlungen dieser Academie hat nun jüngst Herr A. Brill eine Abhandlung über die Theorie der geodätischen Linie und des geodätischen Dreieckes veröffentlicht und gegen Ende derselben einen Ausdruck für die reducirte Länge aufgestellt, im Falle die vorgelegte Fläche eine Rotationsfläche ist, welcher nach verschiedenen Richtungen bemerkenswert scheint.[3])

1) Disquisitiones generales circa superficies curvas. Band IV von Gauss' Werken. Nr. 19.

2) Allgemeine Theorie der geodätischen Dreiecke von E. B. Christoffel, Abhandlungen der k. Academie der Wissenschaften zu Berlin 1868.

3) Zur Theorie der geodätischen Linie und des geodätischen Dreieckes, Abhandlungen der k. bayerischen Academie der Wissenschaften. II. Cl. XIV. Bd. II. Abth.

Anschliessend an dieses Resultat teile ich im Folgenden die Ableitung der reducirten Länge für ein System von Flächen mit, dessen Linienelement sich in der Form:

$$ds^2 = (f(\alpha) - F(\beta))\,(d\alpha^2 + d\beta^2)$$

darstellen lässt. Die Flächen dieses Systems sind die einzigen,[1]) für welche, Rotationsflächen und Flächen zweiten Grades ausgeschlossen, bis jetzt die vollständige Integration der geodätischen Linien geleistet ist. Die beiden letzteren Flächensysteme können jedoch als spezielle Fälle dieses allgemeinen Flächensystems aufgefasst werden, so dass mein Ausdruck für die reducirte Länge einerseits den für Rotationsflächen als speziellen Fall enthält, andererseits aber für ein allgemeines Coordinatensystem von angeführtem Character die reducirte Länge auf den Flächen zweiten Grades gibt. Bekannt war dieselbe bis jetzt nur für den Bogen einer geodätischen Linie, die durch die Kreispunkte eines Ellipsoides geht.[2])

Mit den im Folgenden entwickelten Formeln nahm ich nun das in letzterer Zeit von verschiedenen Seiten besprochene Problem von Monge[3]) in Angriff, welches verlangt, zu einer vorgelegten Fläche (Ausgangsfläche) diejenige Fläche (Originalfläche) zu bestimmen, für welche die gegebene eine Schale der Fläche der Krümmungscentra bildet.

Sind nämlich die Coordinaten irgend einer Fläche in Funktion der Grössen α und β bekannt, welche das Element derselben in die Form:

$$ds^2 = (f(\alpha) - F(\beta))\,(d\alpha^2 + d\beta^2)$$

überführen, so gelingt es mir, einerseits die Coordinaten der Originalfläche, andererseits aber auch, und zwar in Folge der

1) Es mag bemerkt werden, dass das Linienelement dieser Flächen sich auch in die Form $ds^2 = (\varphi\,(x+y) + \psi\,(x-y))\,d\,x\,dy$ bringen lässt. Zu ihnen gehören die Flächen, welche so in einander transformirt werden können, dass die geodätischen Linien der einen wieder in geodätische Linien der andern übergehen; vgl. hierüber: Dini Annali di Matematica t. III. Serie II. p. 269 — und ferner diejenigen Flächen, welche erst neuerdings S. Lie bezüglich ihrer geodätischen Transformirbarkeit in sich selbst betrachtete: Untersuchungen über geodätische Curven, Mathematische Annalen Bd. XX.

2) Vgl. M. Roberts, Journal des Mathématiques par Liouville t. 15. Serie I.

3) Application de l'analyse à la géométrie, Ausgabe von Liouville, p. 246—286.

Kenntnis der reducirten Länge, die Coordinaten der zweiten Schale der Krümmungscentrafläche, die Complementärfläche heissen möge, durch die Grössen α und β in allgemeinster Weise darzustellen.

Hieraus fliesst dann eine Reihe bemerkenswerter Specialfälle, worunter namentlich derjenige Interesse verdient, in welchem sich die beiden Schalen der Krümmungscentrafläche als zwei confocale Flächen zweiten Grades darstellen. Die Ausdrücke für die Coordinaten der Originalfläche ergeben sich auf meinem Wege mit grosser Leichtigkeit, während die vor Kurzem erschienene Dissertation von F. Rudio,[1]) in welcher dieser spezielle Fall zum erstenmal eingehend behandelt wird, einen ziemlichen Aufwand von Rechnung benötigt.

1.

Setzt man das Linienelement einer Fläche in der Form voraus

$$ds^2 = (f(\alpha) - F(\beta))\,(d\alpha^2 + d\beta^2), \qquad \ldots .1)$$

so kann man die von Liouville [2]) zuerst mit den Gleichungen der Dynamik geleistete Integration der geodätischen Linien auch unmittelbar durch die Integration der Gauss'schen Differentialgleichung [3]) dieser Linien vollziehen, da letztere, wie Weingarten [4]) zuerst bemerkte mit der Hamilton-Jacobi'schen Differentialgleichung [5]) der geodätischen Linien identisch ist.

In unserem Coordinatensystem heisst nämlich Gauss' Gleichung:

$$\left(\frac{\partial \varrho}{\partial \alpha}\right)^2 + \left(\frac{\partial \varrho}{\partial \beta}\right)^2 = f(\alpha) - F(\beta),$$

wo ϱ die Länge des Bogens der geodätischen Linie bezeichnet. Bedeutet a eine willkürliche Constante, so zerlegt sich diese Gleichung in die beiden:

$$\left(\frac{\partial \varrho}{\partial \alpha}\right)^2 = a - F(\beta), \left(\frac{\partial \varrho}{\partial \beta}\right)^2 = f(\alpha) - a,$$

1) Ueber diejenigen Flächen, deren Krümmungsmittelpunktsflächen confocale Flächen zweiten Grades sind. Berlin 1880.

2) Note III zu Monge's Application etc.

3) Gauss, Disquisitiones etc. XXII. Nr. 5.

4) Journal von Crelle-Borchardt. Bd. 62. p. 63.

5) Jacobi Vorlesungen über Dynamik p. 213.

und die Integration liefert:

$$\varrho = \int \sqrt{f(\alpha) - a}\, d\alpha + \int \sqrt{a - F(\beta)}\, d\beta \qquad \ldots . 2)$$

und

$$\frac{\partial \varrho}{\partial a} = -\int \frac{d\alpha}{\sqrt{f(\alpha) - a}} + \int \frac{d\beta}{\sqrt{a - F(\beta)}} = \text{const.} \qquad \ldots . 3)$$

ist dann die Integral-Gleichung der geodätischen Linien in der von Liouville gegebenen Form. Setzt man hier $-\operatorname{tg}\vartheta = \frac{d\beta}{d\alpha}$, so folgt aus der Differentialgleichung der geodätischen Linien

$$\frac{d\alpha}{\sqrt{f(\alpha) - a}} = \frac{d\beta}{\sqrt{a - F(\beta)}} \qquad \ldots . 4)$$

die wichtige Gleichung:

$$f(\alpha) \sin^2\vartheta + F(\beta) \cos^2\vartheta = a. \qquad \ldots . 5)$$

Aus dieser Gleichung sieht man, dass ϑ derjenige Winkel ist, unter welchem die geodätische Linie die Curven $b = \text{const.}$ trifft; a ist längs dieser geodätischen Linie constant. Dieser Winkel ϑ heisst das Azimuth der geodätischen Linie.

Integrirt man die Gleichungen 2) und 3) zwischen den Grenzen α_0 und β_0, indem man für $\alpha = \alpha_0$, $\beta = \beta_0$ $\varrho = o$ setzt, so erhält man die für das Folgende wichtigen Gleichungen:

$$\varrho = \int_{\alpha_0}^{\alpha} \sqrt{f(\alpha) - a}\, d\alpha + \int_{\beta_0}^{\beta} \sqrt{a - F(\beta)}\, d\beta, \qquad \ldots . 1^a)$$

$$o = -\int_{\alpha_0}^{\alpha} \frac{d\alpha}{\sqrt{f(\alpha) - a}} + \int_{\beta_0}^{\beta} \frac{d\beta}{\sqrt{a - F(\beta)}}. \qquad \ldots . 2^a)$$

2.

Wählt man auf der Oberfläche eine beliebige Curve, deren Bogenelement $d\sigma$ sei, und bestimmt einen Punkt P der Fläche, indem man den Bogen σ von einem festen Punkte A aus zählt und durch P eine geodätische Linie legt, die diesen Bogen in P_0 orthogonal schneidet, so kann man $AP_0 = \sigma$ und $P_0P = \varrho$ als die Coordinaten des Punktes P auffassen. In diesem Coordinatensystem erhält nach Gauss l. c. das Linienelement der Fläche stets die Form:

$$ds^2 = d\varrho^2 + g_1^2\, d\sigma^2.$$

Die Linien $\sigma =$ const. sind die geodätischen Linien, die Curven $\varrho =$ const. die Orthogonaltrajectorien derselben, die parallel zu der beliebig gewählten Anfangstrajectorie verlaufen. Diese kann sich auch auf einen Punkt reduciren, dann erhält man ein gewöhnliches geodätisches Polarcoordinatensystem. g_1 heisst die reducirte Länge des geodätischen Bogens ϱ und ist im allgemeinen eine Funktion von ϱ und σ. Unsere nächste Aufgabe ist nun die, von dem Coordinatensystem der α und β auf das der ϱ und σ überzugehen, was uns auf dem nämlichen Wege gelingt, den zuerst Herr A. Brill in der Eingangs genannten Abhandlung betreten.

Für eine bestimmte geodätische Linie der Fläche, die durch den Punkt α_0, β_0 geht und das Azimuth ϑ_0 in diesem Punkte besitzt, folgt aus 5):

$$f(\alpha_0)\sin^2\vartheta_0 + F(\beta_0)\cos^2\vartheta_0 = f(\alpha)\sin^2\vartheta + F(\beta)\cos^2\vartheta = a \quad \ldots 6)$$

Betrachtet man jetzt den allgemeinsten Fall eines geodätischen Polarcoordinatensystems, indem man von dem Punkte P_0 zu P_0' um $d\sigma$ weiter geht, so variiren α_0, β_0, ϑ_0 und ϱ und folglich auch a. Hiernach erhält man durch Differentiation der Gleichungen 1^a) und 2^a):

$$\left.\begin{aligned}
d\varrho &= \sqrt{f(\alpha) - a}\, d\alpha + \sqrt{a - F(\beta)}\, d\beta - \Big(\sqrt{f(\alpha_0) - a}\cdot\alpha_0' \qquad a)\\
&\qquad + \sqrt{a - F(\beta_0)}\,\beta_0'\Big)\, d\sigma,\\
o &= -\frac{d\alpha}{\sqrt{f(\alpha) - a}} + \frac{d\beta}{\sqrt{a - F(\beta)}} + \Big(\frac{\alpha_0'}{\sqrt{f(\alpha_0) - a}} \qquad b)\\
&\qquad - \frac{\beta_0'}{\sqrt{a - F(\beta_0)}} - J a'\Big)\, d\sigma.
\end{aligned}\right\} \quad \ldots 7)$$

Hier bedeuten α_0', β_0' und a' die Abgeleiteten nach σ, während

$$J = \frac{1}{2}\int_{\alpha_0}^{\alpha} \frac{d\alpha}{\sqrt{f(\alpha) - a}^{\,3}} + \frac{1}{2}\int_{\beta_0}^{\beta} \frac{d\beta}{\sqrt{a - F(\beta)}^{\,3}} \quad \ldots 8)$$

ist.

Ferner folgt aus der Gleichung 6) und der Orthogonalität der Linien:

$$\left.\begin{aligned} \alpha_0' &= -\frac{\sin\vartheta_0}{\sqrt{f(\alpha_0) - F(\beta_0)}} = -\frac{\sqrt{a - F(\beta_0)}}{\sqrt{f(\alpha_0) - F(\beta_0)}} \\ \beta_0' &= \frac{\cos\vartheta_0}{\sqrt{f(\alpha_0) - F(\beta_0)}} = \frac{\sqrt{f(\alpha_0) - a}}{\sqrt{f(\alpha_0) - F(\beta_0)}} \end{aligned}\right\} \quad \ldots. 9)$$

Drückt man mit Hilfe dieser Gleichungen β_0' durch α_0' aus, eliminirt es aus 7 und löst dann die Gleichungen nach $d\alpha$ und $d\beta$ auf, so erhält man:

$$\left.\begin{aligned} \sqrt{f(\alpha) - F(\beta)}\, d\alpha &= \frac{\sqrt{f(\alpha) - a}}{\sqrt{f(\alpha) - F(\beta)}}\, d\varrho - \frac{\sqrt{a - F(\beta)}}{\sqrt{f(\alpha) - F(\beta)}}\, g_1\, d\sigma, \\ \sqrt{f(\alpha) - F(\beta)}\, d\beta &= \frac{\sqrt{a - F(\beta)}}{\sqrt{f(\alpha) - F(\beta)}}\, d\varrho + \frac{\sqrt{f(\alpha) - a}}{\sqrt{f(\alpha) - F(\beta)}}\, g_1\, d\sigma, \end{aligned}\right\} \ldots. 10)$$

wobei

$$g_1 = -\frac{f(\alpha_0) - F(\beta_0)}{a - F(\beta_0)} \frac{\sqrt{(f(\alpha) - a)(a - F(\beta))}}{\sqrt{f(\alpha_0) - a}}\, \alpha_0' + \sqrt{(f(\alpha) - a)(a - F(\beta))} \cdot J a' \quad 11)$$

die gesuchte reducirte Länge des Bogens ϱ in Funktion von α und β ist.

Aus diesem Ausdruck von g_1 kann noch α_0' mit der Gleichung 9) eliminirt werden, wenn die geodätischen Linien sämmtlich orthogonal zu einer willkürlichen Anfangstrajectorie sind. Man erhält dann:

$$g_1 = \frac{\sqrt{(f(\alpha) - a)(a - F(\beta))}}{\sqrt{(f(\alpha_0) - a)(a - F(\beta_0))}} + a' \sqrt{(f(\alpha) - a)(a - F(\beta))} \cdot J. \quad \ldots. 11')$$

Gehen hingegen sämmtliche geodätische Linien von einem reellen Pol aus, so ist $\alpha_0' = o$ und

$$g_1 = 2\sqrt{(f(\alpha) - a)(a - F(\beta))(f(\alpha_0) - a)(a - F(\beta_0))} \cdot J. \quad \ldots. 11'')$$

Man hat nämlich in diesem Falle $\sigma = \vartheta_0$ und sonach

$$a' = \frac{da}{d\vartheta_0} = 2\sqrt{(a - F(\beta_0))(f(\alpha_0) - a)}$$

zu setzen.

Diese Werte von g_1 bleiben nur so lange brauchbar, als $J \gtrless o$ ist, d. h., da $J = o$ die Enveloppe[1]) des Systems geodätischer Linien gibt,

---

1) Vgl. meine Arbeiten über Enveloppen geodätischer Linien. Mathematische Annalen Bd. XIV und XX.

nur in dem Bereiche der Fläche, welcher sich bis zu einer solchen etwa vorhandenen Enveloppe erstreckt.

3.

In unserem allgemeinen Flächensysteme sind nun namentlich zwei Flächenclassen von besonderem Interesse, da die Darstellung ihrer Coordinaten in Funktion von α und β bekannt, und in Folge dessen die Kenntnis der reducirten Länge weiter verwendbar ist. Dieses sind die Rotationsflächen und die dreiaxigen Flächen zweiten Grades. Für die ersteren hat man nur $F(\beta) = o$ und $\sqrt{f(\alpha)}\, d\alpha = du$ zu setzen, um das Linienelement in der bekannten Form:

$$ds^2 = du^2 + f(\alpha)\, d\beta^2$$

zu erhalten, die für $f(\alpha) = g^2$ und $\beta = v$ mit der bei Herrn Brill l. c. verwendeten übereinstimmt.[1]) Setzt man endlich noch $a = \varkappa^2$, so gehen unsere sämmtlichen Formeln in die dort entwickelten über.

Für den zweiten Fall hat man:

$$ds^2 = \frac{(\lambda^2 - \mu^2)(\mu^2 - \nu^2)}{(\mu^2 - h^2)(k^2 - \mu^2)} d\mu^2 + \frac{(\lambda^2 - \nu^2)(\mu^2 - \nu^2)}{(h^2 - \nu^2)(k^2 - \nu^2)} d\nu^2 + \frac{(\lambda^2 - \nu^2)(\lambda^2 - \mu^2)}{(\lambda^2 - h^2)(\lambda^2 - k^2)} d\lambda^2.$$

Hier bezeichnen λ, μ, ν die Parameter dreier confocaler Flächen zweiten Grades. Je nachdem man $\lambda = \text{const.}$ $\mu = \text{const.}$ oder $\nu = \text{const.}$ setzt, erhält man das Linienelement des Ellipsoides, des zweischaligen oder des einschaligen Hyperboloides. Für das Folgende legen wir das Ellipsoid zu Grunde, für die andern beiden Flächen erleiden die Formeln nur unwesentliche Veränderungen. Es sei also

$$ds^2 = (\mu^2 - \nu^2)\left\{\frac{\lambda^2 - \mu^2}{(\mu^2 - h^2)(k^2 - \mu^2)} d\mu^2 + \frac{\lambda^2 - \nu^2}{(h^2 - \nu^2)(k^2 - \nu^2)} d\nu^2\right\}.$$

Da sich die Flächen eines confocalen Systems zweiten Grades in den Krümmungslinien schneiden, so sind $\mu = \text{const.}$ und $\nu = \text{const.}$ die beiden Schaaren der Krümmungscurven des Ellipsoides. Setzt man jetzt

$$\frac{\lambda^2 - \mu^2}{(\mu^2 - h^2)(k^2 - \mu^2)} d\mu^2 = d\alpha^2 \text{ und } \frac{\lambda^2 - \nu^2}{(h^2 - \nu^2)(k^2 - \nu^2)} d\nu^2 = d\beta^2,$$

dann ist $\mu^2 = f(\alpha)$, $\nu^2 = F(\beta)$, und das obige Linienelement geht in die allgemeine Form der Gleichung 1) über.

---

1) pag. 26 und 27.

Durch Ausführung dieser Substitution in den Formeln 11′ und 11″, erhält man für $a = \mu_1^2$:

$$g_1 = \sqrt{\frac{(\mu^2 - \mu_1^2)(\mu_1^2 - \nu^2)}{(\mu_0^2 - \mu_1^2)(\mu_1^2 - \nu_0^2)}} + 2\mu_1 \mu_1' \sqrt{(\mu^2 - \mu_1^2)(\mu_1^2 - \nu^2)} \cdot J \quad \ldots . 12)$$

und

$$g_1 = 2 \sqrt{(\mu_0^2 - \mu_1^2)(\mu_1^2 - \nu_0^2)(\mu^2 - \mu_1^2)(\mu_1^2 - \nu^2)} \cdot J, \quad \ldots . 12')$$

wo für $M^2 = (\lambda^2 - \mu^2)(k^2 - \mu^2)(\mu^2 - \mu_1^2)(\mu^2 - h^2)$ und

$$N^2 = (\lambda^2 - \nu^2)(k^2 - \nu^2)(\mu_1^2 - \nu^2)(h^2 - \nu^2)$$

$$J = \int_{\mu_0}^{\mu} \frac{\lambda^2 - \mu^2}{2(\mu^2 - \mu_1^2) M} d\mu + \int_{\nu_0}^{\nu} \frac{\lambda^2 - \nu^2}{2(\mu_1^2 - \nu^2) N} d\nu$$

wird.

Je nach der Wahl der Anfangstrajectorie nehmen natürlich auch die Formeln 11′ und 12 eine einfachere Gestalt an. So kann man z. B. auf dem Ellipsoid ein System von Krümmungslinien als Orthogonaltrajectorien nehmen, wodurch sich die Formeln einfacher gestalten. Nimmt man als Anfangstrajectorie der geodätischen Linien wieder eine geodätische Linie, so hat man in Gleichung 6) $\vartheta_0 + \frac{\pi}{2}$ an Stelle von ϑ zu setzen und bekommt dadurch die Relation:

$$f(\alpha_0) \sin^2\left(\vartheta_0 + \frac{\pi}{2}\right) + F(\beta_0) \cos^2\left(\vartheta_0 + \frac{\pi}{2}\right) = \text{const.},$$

oder $f(\alpha_0) + F(\beta_0) - a = \text{const.}$

Wir gehen auf diese speciellen Fälle nicht näher ein und bemerken nur noch einen, der für das Folgende von Wichtigkeit wird.

Wenn nämlich $a' = o$, d. h. a von σ unabhängig ist, dann folgt aus 11′)

$$g_1 = \sqrt{\frac{(f(\alpha) - a)(a - F(\beta))}{(f(\alpha_0) - a)(a - F(\beta_0))}}, \quad \ldots . 13)$$

und für das Ellipsoid aus 12)

$$g_1 = \sqrt{\frac{(\mu^2 - \mu_1^2)(\mu_1^2 - \nu^2)}{(\mu_0^2 - \mu_1^2)(\mu_1^2 - \nu_0^2)}}. \quad \ldots . 14)$$

In diesem Falle berühren alle Geodätischen, die einem constanten Werte von a oder μ_1 entsprechen, ein und dieselbe Curve $F(\beta) = a$, oder die Krümmungslinie $\nu = \mu_1$ im Falle des Ellipsoides. Es mag noch bemerkt werden, dass sich in diesem einfachsten Falle wohl für Rotationsflächen g_1 in Funktion von ϱ und σ ausdrücken lässt,[1]) nicht aber für das dreiaxige Ellipsoid.

Diesem Falle stellt sich der einzige bis jetzt behandelte an die Seite, wenn nämlich als Pol der Geodätischen ein Kreispunkt des Ellipsoides betrachtet wird. Die reducirte Länge

$$g_1 = \frac{\sqrt{(\mu^2 - h^2)(h^2 - \nu^2)(\lambda^2 - h^2)}}{\sin\vartheta \sqrt{h^2 (k^2 - h^2)}},$$

die dem Linienelemente $ds^2 = d\varrho^2 + g_1^2\, d\vartheta^2$ entspricht, ergibt sich dann naturgemäss aus der Formel 12′ und zwar durch einen ganz ähnlichen Grenzübergang, wie er sich in Salmon-Fiedler's Raumgeometrie II. T. pag. 163 findet.

4.

Wir gehen nun dazu über, die gefundenen Resultate auf das in der Einleitung erwähnte Problem anzuwenden, die Originalfläche und die Complementärfläche zu einer gegebenen Ausgangsfläche zu finden, deren Coordinaten ξ, η, ζ in Funktion zweier Parameter α und β gegeben sind, die dem Linienelement der Fläche die Form

$$ds^2 = (f(\alpha) - F(\beta))\,(d\alpha^2 + d\beta^2)$$

erteilen.

Als Ausgangspunkt dient uns ein Theorem von Weingarten in der bereits erwähnten Note im 62. Band von Borchardt's Journal für Mathematik, pag. 62. Dasselbe lautet: „Spannt man über eine gegebene Fläche, senkrecht gegen eine willkürlich auf derselben gezeichnete Curve, eine Schaar biegsamer Fäden, denen man sämmtlich von den Punkten dieser Curve an gerechnet, gleiche Länge gibt, so erzeugen die Endpunkte dieser Fäden bei ihrer Abwicklung die allgemeinste Fläche, von welcher die gegebene eine Schale der Fläche der Krümmungsmittelpunkte ist.“

Die Endpunkte der Fäden beschreiben bei dieser Erzeugung der Fläche das eine System von Krümmungscurven der Originalfläche und somit sind die respektiven Bogenlängen der geodätischen Linien gleich den

1) Vgl. die mehrfach citirte Abhandlung von A. Brill. p. 30.

Krümmungsradien der Fläche längs des einen Systems von Krümmungslinien. Also erhält man die Coordinaten x, y, z eines Punktes der Originalfläche ausgedrückt in den Coordinaten des entsprechenden Punktes ξ, η, ζ der Ausgangsfläche durch die Gleichungen:

$$x = \xi - \varrho \frac{\partial \xi}{\partial \varrho}\,;\; y = \eta - \varrho \frac{\partial \eta}{\partial \varrho}\,;\; z = \zeta - \varrho \frac{\partial \zeta}{\partial \varrho}, \qquad \ldots .\ 15)$$

wo ϱ die doppelte Bedeutung des einen Krümmungsradius und des Bogens der geodätischen Linie hat.

Bezeichnet ferner ϱ' den anderen Krümmungsradius im Punkte x, y, z, so erhält man die Coordinaten x', y', z' des entsprechenden Punktes der Complementärfläche, indem man auf der Tangente der Ausgangsfläche in ξ, η, ζ das Stück $\varrho - \varrho'$ von diesem Punkte aus aufträgt. Der Endpunkt dieses Stückes ist dann der verlangte Punkt der Complementärfläche, und seine Coordinaten sind:

$$x' = \xi - (\varrho - \varrho')\frac{\partial \xi}{\partial \varrho}\,,\; y' = \eta - (\varrho - \varrho')\frac{\partial \eta}{\partial \varrho}\,,\; z' = \zeta - (\varrho - \varrho')\frac{\partial \zeta}{\partial \varrho} \qquad \ldots .\ 16)$$

Nun ist aber die Differenz der beiden Hauptkrümmungsradien des betreffenden Punktes der Originalfläche gleich dem Radius der geodätischen Krümmung der Orthogonaltrajectorie in dem Berührungspunkte der Normalen (auf welcher die Krümmungsradien gemessen sind) mit der Ausgangsfläche und kann somit nach einer bekannten Formel[1]) durch die Gleichung bestimmt werden:

$$\varrho - \varrho' = \frac{g_1}{\frac{\partial g_1}{\partial \varrho}}, \qquad \ldots .\ 17)$$

wo g_1 die Bedeutung der reducirten Länge des Bogens ϱ hat. Wären also die Coordinaten der Punkte der Ausgangsfläche, sowie g_1 in Funktion von ϱ und σ bekannt, so wären die Original- und die Complementärfläche sofort durch die Gleichungen 15) und 16) bestimmt. Dies findet nun im Allgemeinen nicht statt; jedoch gelingt es, in unserem Falle, wenn ξ, η und ζ in Funktion von α und β bekannt sind, was z. B. bei Rotations- und den dreiaxigen Flächen zweiten Grades der Fall ist, die

1) Zum erstenmal wurde die geodätische Krümmung einer Curve aufgestellt von Lionville: Note II zu Monge's Application etc.

Coordinaten der Punkte dieser Flächen in Function von α und β darzustellen. Es sei also:

$$\xi = \varphi(\alpha, \beta) = \varphi\ ;\ \eta = \psi(\alpha, \beta) = \psi\ ;\ \zeta = \chi(\alpha, \beta) = \chi, \quad \ldots .18)$$

dann hat man vorerst:

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial \xi}{\partial \varrho} &= \frac{\partial \xi}{\partial \alpha}\frac{d\alpha}{d\varrho} + \frac{\partial \xi}{\partial \beta}\frac{d\beta}{d\varrho}, \\ \frac{\partial \eta}{\partial \varrho} &= \frac{\partial \eta}{\partial \alpha}\frac{d\alpha}{d\varrho} + \frac{\partial \eta}{\partial \beta}\frac{d\beta}{d\varrho}, \\ \frac{\partial \zeta}{\partial \varrho} &= \frac{\partial \zeta}{\partial \alpha}\frac{d\alpha}{d\varrho} + \frac{\partial \zeta}{\partial \beta}\frac{d\beta}{d\varrho}. \end{aligned}\right\} \quad \ldots .19)$$

Die Formeln 18) liefern die Werte $\frac{\partial \xi}{\partial \alpha} = \varphi'_\alpha$, $\frac{\partial \xi}{\partial \beta} = \varphi'_\beta$ etc. und zur Bestimmung von $\frac{d\alpha}{d\varrho}$ und $\frac{d\beta}{d\varrho}$ hat man in den Gleichungen 10) ϱ als unabhängige Variable zu betrachten, dann folgt:

$$\left.\begin{aligned} \frac{d\alpha}{d\varrho} &= \frac{\sqrt{f(\alpha) - a}}{f(\alpha) - F(\beta)}, \\ \frac{d\beta}{d\varrho} &= \frac{\sqrt{a - F(\beta)}}{f(\alpha) - F(\beta)}; \end{aligned}\right\} \quad \ldots .20)$$

also hat man:

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial \xi}{\partial \varrho} &= \frac{\varphi'_\alpha \sqrt{f(\alpha) - a} + \varphi'_\beta \sqrt{a - F(\beta)}}{f(\alpha) - F(\beta)} \\ \frac{\partial \eta}{\partial \varrho} &= \frac{\psi'_\alpha \sqrt{f(\alpha) - a} + \psi'_\beta \sqrt{a - F(\beta)}}{f(\alpha) - F(\beta)} \\ \frac{\partial \zeta}{\partial \varrho} &= \frac{\chi'_\alpha \sqrt{f(\alpha) - a} + \chi'_\beta \sqrt{a - F(\beta)}}{f(\alpha) - F(\beta)} \end{aligned}\right\} \quad \ldots .21)$$

Nimmt man hiezu aus der Gleichung 2) den Wert von

$$\varrho = \int_{\alpha_0}^{\alpha} \sqrt{f(\alpha) - a}\, d\alpha + \int_{\beta_0}^{\beta} \sqrt{a - F(\beta)}\, d\beta,$$

so sind die Coordinaten für die Originalfläche vollständig bestimmt.

Zur Bestimmung von $\varrho - \varrho'$ erhält man:

$$\frac{\partial g_1}{\partial \varrho} = \frac{\partial g_1}{\partial \alpha}\frac{d\alpha}{d\varrho} + \frac{\partial g_1}{\partial \beta}\frac{d\beta}{d\varrho}.$$

verschafft man sich die Werte der partiellen Differentialquotienten von g_1 aus der Gleichung 11), so geht die vorstehende über in:

$$\frac{\partial g_1}{\partial \varrho} = \frac{g_1 \left(f'(\alpha) \sqrt{a - F(\beta)} - F'(\beta) \sqrt{f(\alpha) - a}\right) + a' \left(f(\alpha) - F(\beta)\right)}{2 \left(f(\alpha) - F(\beta)\right) \sqrt{(f(\alpha) - a)(a - F(\beta))}}.$$

Dieser Wert in Gleichung 17) eingeführt, liefert:

$$\varrho - \varrho' = \frac{2 g_1 \left(f(\alpha) - F(\beta)\right)}{g_1 \left(\frac{f'(\alpha)}{\sqrt{f(\alpha) - a}} - \frac{F'(\beta)}{\sqrt{a - F(\beta)}}\right) + a' \frac{f(\alpha) - F(\beta)}{\sqrt{(f(\alpha) - a)(a - F(\beta))}}}, \quad \ldots . 22)$$

wodurch auch die Coordinaten der Punkte der Complementärfläche in Funktion von α und β bestimmt sind, wenn man diese Gleichung in Zusammenhalt mit Gleichung 16) und 21) betrachtet.

5.

Fasst man die obigen Formeln, welche die beiden Flächen bestimmen, genauer in's Auge, so erkennt man, dass es zweckmässig ist, zu ihrer Discussion drei verschiedene Annahmen zu machen:

1. die geodätischen Linien sind orthogonal zu einer willkürlich gewählten Anfangstrajectorie,
2. die geodätischen Linien gehen von einem einzigen Punkte der Fläche aus,
3. die geodätischen Linien berühren alle ein und dieselbe feste Curve.

Im ersten Falle sei die Anfangstrajectorie durch die Gleichung $\alpha_0 = \Phi(\beta_0)$ bestimmt, dann sind α_0, β_0 und a längs dieser Curve variabel; fasst man einen Punkt der Curve in's Auge, indem man bestimmte Werte α_0, β_0 gibt, so läuft durch ihn eine geodätische Linie, welche in diesem Punkte orthogonal zu dem Curvenelemente $d\sigma$ steht. Dieser geodätischen Linie gehört somit ein bestimmter Wert von a zu: in der That erhält man aus der ersten Gleichung 9) in Verbindung mit der Curvengleichung:

$$\frac{\Phi'(\beta_0)}{\sqrt{1 + \Phi'(\beta_0)^2}} = \sin \vartheta_0 \text{ und } \frac{1}{\sqrt{1 + \Phi'(\beta_0)^2}} = \cos \vartheta_0,$$

und diese Werte in 6) eingeführt, liefern a in Function von β_0, etwa $a = F(\beta_0)$. Eliminirt man ebenso aus der Relation 2_a) für die geodätische Linie α_0, so bekommt man eine zweite Relation: $F_1(\beta_0, a, \alpha, \beta) = 0$, und diese letzten zwei Relationen verbunden mit $\alpha_0 = \Phi(\beta_0)$ dienen dazu, um aus den Gleichungen der Original- und Complementärfläche die Variabeln a, α_0 und β_0 zu entfernen, so dass diese Coordinatenwerte nur mehr von den Parametern α und β abhängig sind.

Im Falle 2. ist der Ausgangspunkt sämmtlicher Linien ein fester Punkt, also sind α_0 und β_0 Constante und brauchen nicht eliminirt zu werden; hingegen ist a variabel, da die Gleichung 6) zeigt, dass a von dem veränderlichen Azimuthe der geodätischen Linie abhängt. Somit hat man a mit Hilfe der Gleichung der geodätischen Linien aus den Coordinatenwerten 15) und 16) zu entfernen. Bemerkt kann noch werden, dass in diesem Falle die Differenz $\varrho - \varrho'$ den einfacheren Wert:

$$\varrho - \varrho' = \frac{2\,(f(\alpha) - F(\beta)) \cdot J}{J\left(\dfrac{f'(\alpha)}{\sqrt{f(\alpha) - a}} - \dfrac{F'(\beta)}{\sqrt{a - F(\beta)}}\right) + \dfrac{f(\alpha) - F(\beta)}{(f(\alpha) - a)\,(a - F(\beta))}}$$

annimmt.

Im dritten Falle ist, wie bereits unter Nr. 3 bemerkt wurde, a eine Constante, α_0 und β_0 hingegen sind variabel. Nun verschwinden aber diese beiden Grössen ganz aus dem Werte von $\varrho - \varrho'$, indem derselbe die Gestalt annimmt:

$$\varrho - \varrho' = \frac{f(\alpha) - F(\beta)}{\dfrac{f'(\alpha)}{\sqrt{f(\alpha) - a}} - \dfrac{F'(\beta)}{\sqrt{a - F(\beta)}}}.$$

Somit hat man in diesem Falle zur Darstellung der Coordinaten der Complementärfläche keine Elimination mehr zu vollziehen. Was hingegen die Originalfläche anlangt, so befinden sich in dem Werte von ϱ noch die Grenzen α_0 und β_0; diese können aber durch eine einzige von α und β unabhängige additive Constante ersetzt werden, die übrigens willkürlich ist und der Summe der unbestimmten Integrale hinzugefügt wird. In der That gibt es ja auch nicht nur eine, sondern eine einfach unendliche Schaar von Originalflächen, die unter einander parallel laufen, und deren Krümmungsradien sich also nur um Constante unterscheiden. Dieser letzte Fall liefert also, da für die allgemeine Darstellung beider Flächen jede Elimination entbehrlich ist, die Coordinaten derselben in vollständig bestimmter Form.

Wir geben zum Schlusse im Folgenden zwei umfangreiche Anwendungen dieser Betrachtungen, indem wir eine allgemeine Rotationsfläche und das dreiaxige Ellipsoid als Ausgangsflächen wählen.

6.

Das Linienelement einer beliebigen Rotationsfläche sei

$$ds^2 = du^2 + g^2\, dv^2,$$

wo die reducirte Länge nur von u abhängt, dann sind die Coordinaten der Fläche:

$$\begin{aligned}\xi &= g \cos v\\ \eta &= g \sin v\\ \zeta &= -\int \sqrt{1-g'^2}\, du = f(u),\end{aligned}$$

für $g' = \frac{\partial g}{\partial u}$. Diese Fläche sei als Ausgangsfläche zu Grunde gelegt; dann hat man:

$$\begin{aligned}\frac{\partial \xi}{\partial \varrho} &= g' \frac{du}{d\varrho} \cos v - g \frac{dv}{d\varrho} \sin v,\\ \frac{\partial \eta}{\partial \varrho} &= g' \frac{du}{d\varrho} \sin v + g \frac{dv}{d\varrho} \cos v,\\ \frac{\partial \zeta}{\partial \varrho} &= f'(u) \frac{du}{d\varrho}.\end{aligned}$$

Um von unsern in den frühern Nummern aufgestellten Formeln zu denen für Rotationsflächen überzugehen und das Linienelement in der obigen Form zu erhalten, hat man, wie bereits in Nr. 3 bemerkt, $F(\beta) = o$, $\beta = v$, $\sqrt{f(\alpha)}\, d\alpha = du$, $f(\alpha) = g^2$ zu setzen. Ausserdem sei noch statt a $\varkappa^2$ geschrieben, dann erhält man leicht aus 1_a) und 2_a) die bekannten Formeln:[1])

$$\varrho = \int_{u_0}^{u} \frac{g\, du}{\sqrt{g^2 - \varkappa^2}}, \quad v - v_0 = \int_{u_0}^{u} \frac{\varkappa\, du}{g\sqrt{g^2 - \varkappa^2}}$$

und

$$J = \frac{1}{2\varkappa^2} \int_{u_0}^{u} \frac{g\, du}{\sqrt{g^2 - \varkappa^2}^{\,3}}.$$

1) Vgl. A. Brill l. c. pag. 24.

Weiter erhält man aus den Formeln 10):

$$\frac{du}{d\varrho} = \frac{\sqrt{g^2 - \varkappa^2}}{g}, \quad \frac{dv}{d\varrho} = \frac{\varkappa}{g^2},$$

somit folgen mit Hilfe der Gleichungen 15) die Coordinaten eines Punktes der Originalfläche in der Form:

$$x = g \cos v - \left(\frac{g'}{g} \sqrt{g^2 - \varkappa^2} \cos v - \frac{\varkappa}{g} \sin v\right) \cdot \int_{u_0}^{u} \frac{g\, du}{\sqrt{g^2 - \varkappa^2}},$$

$$y = g \sin v - \left(\frac{g'}{g} \sqrt{g^2 - \varkappa^2} \sin v + \frac{\varkappa}{g} \cos v\right) \cdot \int_{u_0}^{u} \frac{g\, du}{\sqrt{g^2 - \varkappa^2}},$$

$$z = f(u) - \frac{f'(u)}{g} \sqrt{g^2 - \varkappa^2} \cdot \int_{u_0}^{u} \frac{g\, du}{\sqrt{g^2 - \varkappa^2}}.$$

Die Coordinaten eines Punktes der Complementärfläche sind nach 16):

$$x' = \frac{g' g_1 \varkappa^2 + g^2 \varkappa'}{g(g_1 g' + \varkappa')} \cos v + \frac{g_1 \varkappa \sqrt{g^2 - \varkappa^2}}{g(g_1 g' + \varkappa')} \sin v,$$

$$y' = \frac{g' g_1 \varkappa^2 + g^2 \varkappa'}{g(g_1 g' + \varkappa')} \sin v - \frac{g_1 \varkappa \sqrt{g^2 - \varkappa^2}}{g(g_1 g' + \varkappa')} \cos v,$$

$$z' = f(u) - \frac{g_1 (g^2 - \varkappa^2)}{g(g_1 g' + \varkappa')} f'(u).$$

Für den in diesen Gleichungen erscheinenden Anfangswert u_0 und die Grösse $\varkappa$ gelten natürlich die Betrachtungen der Nummer 5), und es erhellt sofort, dass man durch diese Formeln die Coordinaten der Original- und Complementärfläche auch in dem allgemeinsten Falle einer beliebig auf der Ausgangsfläche angenommenen Orthogonaltrajectorie oder eines festen Ausgangspunktes der geodätischen Linien, vollständig bekommt, sobald sich mittelst der obigen Gleichung der geodätischen Linien die Grösse $\varkappa$ eliminiren lässt. Fälle, in welchen dieses stets gelingt, bilden die Flächen constanten Krümmungsmasses. Herr L. Bianchi[1]) hat zuerst für eine Fläche constanten negativen Krümmungsmasses als

1) Ricerche sulle superficie a curvatura costante e sulle elicoidi; Pisa 1879.

Ausgangsfläche auf anderem Wege die Complementärflächen dargestellt und zwar in drei speciellen Fällen, in welchen die reducirte Länge bereits durch Untersuchungen der Herren Dini und Beltrami bekannt war. Einmal fasste er einen Büschel geodätischer Linien ins Auge, deren Centrum im Unendlichen lag, dann liess er sie von einem Punkt im Endlichen ausgehen und endlich betrachtete er das System geodätischer Linien, die senkrecht zu einem Meridian der Fläche laufen. Diese drei Fälle, sowie die entsprechenden für die Flächen constanter positiver Krümmung sind natürlich sämmtlich in unseren allgemeinen Formeln enthalten und lassen sich unmittelbar aus den Gleichungen dieser Nummer gewinnen.

Solche Flächen lassen sich natürlich je nach der Wahl der Anfangstrajectorie in beliebiger Anzahl aufstellen. Eine besondere Erwähnung verdienen unter ihnen wieder diejenigen, welche für $\varkappa' = 0$ resultiren.

7.

Einen weiteren interessanten Specialfall unserer allgemeinen Betrachtungen bilden die dreiaxigen Flächen zweiten Grades. Wir beschränken uns im Folgenden auf das Ellipsoid, das wir bereits in Nr. 3 bezüglich der reducirten Länge näher ins Auge fassten.

Die rechtwinkligen Coordinaten eines Punktes des Ellipsoides:

$$\frac{\xi^2}{\lambda^2} + \frac{\eta^2}{\lambda^2 - h^2} + \frac{\zeta^2}{\lambda^2 - k^2} = 1 \qquad \ldots . 23)$$

sind bekanntlich in elliptischen Coordinaten ausgedrückt:

$$\xi = \frac{\lambda \mu \nu}{h k}, \quad \eta = \frac{\sqrt{(\lambda^2 - h^2)(\mu^2 - h^2)(h^2 - \nu^2)}}{h \sqrt{k^2 - h^2}}, \quad \zeta = \frac{\sqrt{(\lambda^2 - k^2)(k^2 - \mu^2)(k^2 - \nu^2)}}{k \sqrt{k^2 - h^2}},$$

und ϱ nimmt mit den Substitutionsformeln in Nr. 3 den Wert an:

$$\varrho = \int_{\mu_0}^{\mu} d\mu \sqrt{\frac{(\lambda^2 - \mu^2)(\mu^2 - \mu_1{}^2)}{(\mu^2 - h^2)(k^2 - \mu^2)}} + \int_{\nu_0}^{\nu} d\nu \sqrt{\frac{(\lambda^2 - \nu^2)(\mu_1{}^2 - \nu^2)}{(k^2 - \nu^2)(h^2 - \nu^2)}} \qquad \ldots . 24)$$

Die Gleichungen 21) liefern dann nach einiger Reduction:

$$\frac{\partial \xi}{\partial \varrho} = \frac{\xi}{\mu^2 - \nu^2}\left\{\frac{\mathrm{M}}{\mu(\lambda^2 - \mu^2)} + \frac{\mathrm{N}}{\nu(\lambda^2 - \nu^2)}\right\},$$

$$\frac{\partial \eta}{\partial \varrho} = \frac{\eta}{\mu^2 - \nu^2}\left\{\frac{\mu \mathrm{M}}{(\mu^2 - \mathrm{h}^2)(\lambda^2 - \mu^2)} - \frac{\nu \mathrm{N}}{(\mathrm{h}^2 - \nu^2)(\lambda^2 - \nu^2)}\right\},$$

$$\frac{\partial \zeta}{\partial \varrho} = -\frac{\zeta}{\mu^2 - \nu^2}\left\{\frac{\mu \mathrm{M}}{(\mathrm{k}^2 - \mu^2)(\lambda^2 - \mu^2)} + \frac{\nu \mathrm{N}}{(\mathrm{k}^2 - \nu^2)(\lambda^2 - \nu^2)}\right\},$$

wo M und N die in Nr. 3 angegebene Bedeutung haben.

Ferner folgt aus Gleichung 11):

$$\varrho - \varrho' = \frac{\mathrm{g}_1(\mu^2 - \nu^2)}{\mathrm{g}_1\left\{\mu\sqrt{\frac{(\mathrm{k}^2 - \mu^2)(\mu^2 - \mathrm{h}^2)}{(\lambda^2 - \mu^2)(\mu^2 - \mu_1^2)}} - \nu\sqrt{\frac{(\mathrm{k}^2 - \nu^2)(\mathrm{h}^2 - \nu^2)}{(\lambda^2 - \nu^2)(\mu_1^2 - \nu^2)}}\right\} + \frac{\mu_1 \mu_1' (\mu^2 - \nu^2)}{\sqrt{(\mu^2 - \mu_1^2)(\mu_1^2 - \nu^2)}}}$$

Durch diese Formeln sind sowol die Coordinaten eines Punktes der Original- als der Complementärfläche, vorbehaltlich der nötigen Eliminationen im Sinne der Nr. 5 vollständig gegeben.

Hier ist derjenige Specialfall der bemerkenswerteste, welchen man für $\mu_1' = 0$ d. h. $\mu_1 = \text{const.}$ erhält. Ist nämlich $\mu_1 = \text{const.}$, so berühren die geodätischen Linien der Ausgangsfläche sämmtlich die von einem confocalen einschaligen Hyperboloid ausgeschnittene Krümmungslinie. Die Gleichung des Hyperboloides ist

$$\frac{\xi^2}{\mu_1^2} + \frac{\eta^2}{\mu_1^2 - \mathrm{h}^2} - \frac{\zeta^2}{\mathrm{k}^2 - \mu_1^2} = 1 \qquad \ldots . 25)$$

Die Tangenten der geodätischen Linien der Ausgangsfläche aber berühren nach einem Satze von Chasles die confocale Fläche ebenfalls nach ihren geodätischen Linien, somit sind die Geodätischen der letzteren Fläche die Rückkehrkanten der einen Regelflächenschaar, welche von dem einen Normalen-System der Originalfläche gebildet wird, und der Ort dieser Rückkehrkanten, das ist das confocale Hyperboloid, ist dann die zweite Schale der Krümmungscentrafläche: somit sind in unserem Falle die beiden Schalen der Krümmungscentrafläche zwei confocale Flächen zweiten Grades, die durch die Gleichungen 23) und 25) gegeben sind.

Die Gleichungen für die Coordinaten eines Punktes der Originalfläche folgen dann unmittelbar aus den vorausgehenden Relationen in der Form:

$$x = \frac{\lambda\mu\nu}{h\,k}\left\{1 - \frac{\varrho}{\mu^2 - \nu^2}\left(\frac{M}{\mu(\lambda^2 - \mu^2)} + \frac{N}{\nu(\lambda^2 - \nu^2)}\right)\right\},$$

$$y = \frac{\sqrt{(\lambda^2 - h^2)(\mu^2 - h^2)(h^2 - \nu^2)}}{h\sqrt{k^2 - h^2}}\left\{1 - \frac{\varrho}{\mu^2 - \nu^2}\left(\frac{\mu M}{(\mu^2 - h^2)(\lambda^2 - \mu^2)}\right.\right.$$
$$\left.\left. - \frac{\nu N}{(h^2 - \nu^2)(\lambda^2 - \nu^2)}\right)\right\},$$

$$z = \frac{\sqrt{(\lambda^2 - k^2)(k^2 - \mu^2)(k^2 - \nu^2)}}{k\sqrt{k^2 - h^2}}\left\{1 + \frac{\varrho}{\mu^2 - \nu^2}\left(\frac{\mu M}{(k^2 - \mu^2)(\lambda^2 - \mu^2)}\right.\right.$$
$$\left.\left. + \frac{\nu N}{(k^2 - \nu^2)(\lambda^2 - \nu^2)}\right)\right\}.$$

Hier ist ϱ durch die Gleichung 24) gegeben, jedoch hat man daselbst die Integration unbestimmt vorzunehmen und eine willkürliche Constante additiv beizufügen (vgl. Nr. 5, Fall 3). Die letztere Fläche wurde, wie bereits in der Einleitung bemerkt, von Herrn Rudio gefunden, in dessen Arbeit sich auch die Betrachtung einiger Specialfälle findet. Man sieht, mit welch' geringem Aufwande von Rechnung unsere Betrachtungsweise die Coordinaten der Fläche gibt.