BAYERISCHE AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN
MATHEMATISCH-NATURWISSENSCHAFTLICHE KLASSE

SITZUNGSBERICHTE

JAHRGANG

1981

MÜNCHEN 1982

VERLAG DER BAYERISCHEN AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN
In Kommission bei der C. H. Beck'schen Verlagsbuchhandlung München

In memoriam Georg Aumann

Zur Theorie der Integralsätze von Gauß und Green.

Von Georg Nöbeling

In der Literatur werden diese Sätze vielfach zunächst für Gebiete G mit glattem Rand ∂G bewiesen und sodann durch Zusatzüberlegungen auf Gebiete ausgedehnt, deren Ränder endlich viele Ecken, Kanten usw. haben. Anderseits existieren aber auch Beweise der Sätze direkt für Gebiete mit nicht glattem Rand. Ein einfacher derartiger Beweis findet sich bei Aumann-Haupt, Einführung in die reelle Analysis, III., de Gruyter 1982, § 8.[1]

Dort werden die Sätze von Gauß und Green bewiesen für Raumstücke K im n-dimensionalen euklidischen Raum E^n (mit orthonormalen, cartesischen Koordinaten $x_1, \ldots, x_n$). Ein solches Raumstück ist folgendermaßen definiert. Im E^n sei eine (simpliziale) n-Pseudomannigfaltigkeit $P = S_1 \cup \ldots \cup S_j$ gegeben. Weiter sei $g: P \to E^n$ eine Injektion von P in den E^n derart, daß für jedes $i = 1, \ldots, j$ die Restriktion $g \mid S_i$ umkehrbar dehnungsbeschränkt ist. Dann wird $K := g(P)$ a.a.O. ein Raumstück genannt. Solch ein Raumstück K liege vor. Wir werden uns mit dem Rand ∂K von K, der Orientierung von ∂K und den Normalvektoren von ∂K beschäftigen.

A. Vorbereitungen.

A 1. Die Brauchbarkeit des Raumstückes $K = g(P)$ für die Integralsätze beruht darauf, daß die Abbildung g in λ^n-fast jedem Punkt p^0 des offenen Kerns $\underline{P}$ von P differenzierbar ist, daß also, genauer gesagt, zu λ^n-fast jedem Punkt $p^0 \in \underline{P}$ eine nichtsinguläre, lineare Abbildung $l: E^n \to E^n$ derart existiert, daß

$$|g(p), l(p)| = o(|p, p^0|) \qquad (p \in P) \tag{1}$$

[1] Die vorliegende Note kann als Ergänzung dazu angesehen werden.

gilt.[2] In jedem solchen Punkt p^0 existiert dann die Jacobische Determinante

$$\det \mathrm{Dg}\,(p^0) = \frac{\partial(g_1, \ldots, g_n)}{\partial(x_1, \ldots, x_n)}\,(p^0)$$

und ist $\neq 0$. Weil mit P auch $\underline{P}$ zusammenhängend und die Abbildung g topologisch ist, ist $\det \mathrm{Dg}$ in allen Punkten p^0 positiv oder in allen Punkten p^0 negativ.[3] Wir geben hierfür den (verkürzten) Beweis wieder, weil wir die dabei verwendeten Hilfsmittel später benötigen werden.

Für jedes n-Simplex $\Sigma \subset P$, jeden Punkt $u \in \Sigma$ und jeden Punkt $v \in g(\Sigma)$ definieren wir eine stetige Abbildung $\alpha_{g,\Sigma,u,v}$: $\partial\Sigma \to \partial\Sigma$ folgendermaßen: Wir bezeichnen mit π' die Parallelverschiebung des E^n in sich, welche v in u überführt, und mit π die Zentralprojektion mit dem Zentrum u der Menge $E^n \setminus \{u\}$ auf den Rand $\partial\Sigma$ von Σ; dann sei $\alpha_{g,\Sigma,u,v} := \pi \circ \pi' \circ g \,|\, \partial\Sigma$. Den Abbildungsgrad dieser Abbildung bezeichnen wir mit J_g. Nun hängt J_g von (Σ, u, v) stetig ab und die $n(n+3)$-dimensionale Mannigfaltigkeit aller Tripel (Σ, u, v) ist zusammenhängend; also ist J_g eine (von (Σ, u, v) unabhängige, ganzzahlige) Konstante.

Zur Bestimmung von J_g wählen wir einen Punkt $u \in \underline{P}$, in welchem g differenzierbar ist, und sodann ein n-Simplex $\Sigma \subset P$ mit $u \in \Sigma$. Mittels zweier Parallelverschiebungen des E^n in sich können wir erreichen, daß o.B.d.A. u und $v = g(u)$ mit dem Koordinatenursprung O zusammenfallen. Dann ist π' die Identität, also $\alpha_{g,\Sigma,\mathrm{O},\mathrm{O}} = \pi \circ g \,|\, \partial\Sigma$ und für jedes $t > 0$ und jeden Punkt $y \neq \mathrm{O}$ ist $\pi\left(\frac{1}{t}\,y\right) = \pi(y)$ (wir verwenden hier vorübergehend die vektorielle Schreibweise).

Für $x \in \partial\Sigma$ ist nun $|g(tx), l(tx)| = o(t)$ wegen (1), jetzt mit O statt p^0 und $x \in P$ statt $p \in P$. Für $t \to 0$ gilt also $\frac{1}{t}\,g(tx, -l(x) \to 0$ gleichmäßig in $x \in \partial\Sigma$. Folglich gilt auch $\pi \circ g(tx) - \pi \circ l(x) \to 0$ gleichmäßig in $x \in \partial\Sigma$. Daher konvergiert $\pi \circ g$

---

[2] Aumann-Haupt, a. a. O., § 6. $|.\,,.|$ bedeutet den euklidischen Abstand, λ^n das Lebesguesche Maß. – „Differenzierbar“ bedeutet hier und im folgenden immer „total differenzierbar“.

[3] Alexandroff-Hopf, Topologie I, Springer 1935, S. 475–477.

$| t\partial\Sigma$, wegen $t\partial\Sigma = \partial t\Sigma$ auch $\pi \circ g | \partial t\Sigma$ gleichmäßig gegen $\pi \circ l | \partial\Sigma$ und folglich $\alpha_{g, t\Sigma, 0, 0}$ gleichmäßig gegen $\alpha_{l, \Sigma, 0, 0}$. Da $\alpha_{g, t\Sigma, 0, 0}$ den Abbildungsgrad J_g hat, ist folglich $J_g = J_l$.

Nun ist aber $J_l = +1$ oder $= -1$, je nachdem $\det l = \det Dg(O)$ positiv oder negativ ist. Dasselbe gilt dann für J_g. Da nun aber J_g konstant ist und der Punkt $u = O$ ein beliebiger Punkt $\in \underline{P}$ war, in welchem g differenzierbar ist, so folgt, daß $\det Dg$ in allen Punkten von $\underline{P}$, in denen g differenzierbar ist, positiv oder in allen diesen Punkten negativ ist. Im ersteren Fall ist $J_g = +1$, im letzteren $J_g = -1$.

Wir setzen für alles folgende voraus, daß die Jacobische Determinante $\det Dg$ positiv ist in allen Punkten von $\underline{P}$, in den g differenzierbar ist, und nennen dann K positiv orientiert (durch g).

A 2. Nun sei R ein $(n-1)$-Randsimplex von P, etwa von S_i $(i = 1, \ldots, j)$; wir schreiben S statt S_i. Weiter sei p^0 ein Punkt im Inneren $\underline{R} = R \setminus \partial R$ von R. Ist die Restriktion $g | R$ in p^0 differenzierbar auf R, so nennen wir den Punkt $q^0 := g(p^0) \in \partial K$ regulär. (Für λ^{n-1}-fast alle Punkte p^0 von R ist $q^0 = g(p^0)$ regulär.) Die Regularität von q^0 bedeutet die Existenz (genau) einer nichtsingulären Abbildung $l: R \to E^n$ mit

$$|g(p), l(p)| = o(|p, p^0|) \qquad (p \in R). \tag{2}$$

Weil l umkehrbar dehnungsbeschränkt ist, ist (1) äquivalent mit

$$|g(p), l(p)| = o(|l(p), q^0|) \qquad (p \in R). \tag{3}$$

Der Punkt $q^0 = g(p^0)$ sei regulär. Die Hyperebene $T \supset l(R)$ ist dann Tangentialhyperebene in q^0 an $g(R)$. Mit N bezeichnen wir die Normale in q^0 zu T.

Jede offene, hinreichend kleine Strecke $s \subset N$ mit $q^0 \in s$ hat mit ∂K nur den Punkt q^0 gemein. Sie zerfällt durch Tilgung von q^0 in zwei Komponenten s^- und s^+; wir bezeichnen den Endpunkt $\neq O$ von s^+ mit e. Wir behaupten, daß nach eventueller Vertauschung der Bezeichnungen s^- und s^+ folgendes gilt:

(4^-) $\quad s^- \subset \underline{K}$; $\qquad (4^+)$ $\quad s^+ \subset E^n \setminus K$.

Andernfalls gälte: $s^- \cup s^+ \subset \underline{K}$ oder $s^- \cup s^+ \subset E^n \setminus K$. Wir widerlegen beides.

Nach (3) existiert ein $r_1 > 0$ derart, daß

$$|g(p), l(p)| < \frac{1}{3}\, |l(p), q^0|$$

für alle $p \in R$ mit $|p, p^0| < r_1$. Weiter sei $r_2 := |p^0, \partial R|$. Schließlich sei $r := \min(r_1, r_2)$. Mit U bezeichnen wir nun die $(n - 2)$-Sphäre $\subset R$ mit dem Radius r und dem Mittelpunkt p^0. Dann ist $U^{**} := l(U)$ ein $(n - 2)$-Ellipsoid $\subset T$ mit dem Mittelpunkt q^0; es ist mit der Geraden N verschlungen. Weil

$$|g(p), l(p)| < \frac{1}{3}\, |l(p), q^0|$$

für alle $p \in U$, ist auch $U^* := g(U)$ mit N verschlungen. Wir setzen schließlich noch $\delta := |q^0, U^*|$.

Angenommen nun erstens, es wäre $s^- \cup s^+ \subset \underline{K}$. Dann seien p^- und p^+ zwei Punkte von $\underline{S}$ derart, daß $g(p^-) \in s^-$, $g(p^+) \in s^+$ gilt, und die so nahe bei p^0 liegen, daß das Bild $g([p^-, p^+])$ der Strecke $[p^-, p^+] \subset \underline{S}$ in der δ-Umgebung von q^0 liegt. Wir setzen $(N \setminus [g(p^-), g(p^+)]) \cup g([p^-, p^+]) =: N^*$. Dann ist U^* auch mit N^* verschlungen. Dies ist jedoch falsch, weil N^* fremd ist zum g-Bild der $(n - 1)$-Kugel $\subset \partial S$ mit dem Rand U.

Angenommen zweitens, es wäre $s^- \cup s^+ \subset E^n K$. Wir verbinden einen Punkt $p^1 \in \underline{S}$ mit allen Punkten $p \in U$ durch Strecken. Die Vereinigung aller dieser Strecken heiße V. Dann ist V homöomorph zur $(n - 1)$-Kugel und es ist $\partial V = U$ und $\underline{V} \subset \underline{S}$. Aus der Annahme folgt, daß, wenn p^1 hinreichend nahe bei p^0 liegt, $g(V)$ zu N fremd ist. Also ist $U^* = \partial(g(V))$ nicht mit N verschlungen. Dies ist abermals ein Widerspruch.

Ein Vektor $\mathfrak{v} \neq 0$ im E^n heiße ein Innen- bzw. Außenvektor von K in einem regulären Punkt q^0 von ∂K, wenn für hinreichend kleines $\varepsilon > 0$ alle Punkte $q^0 + \varepsilon \mathfrak{v}$ in $\underline{K}$ bzw. in $E^n \setminus K$ liegen.

B. Die Orientierung des Randes.

Die Faszination, die der Integralsatz von Stokes und die daraus hergeleiteten Sätze von Gauß und Green immer wieder auf die Mathematiker ausüben, beruht darauf, daß sich in ihnen drei völlig verschiedene Grundbegriffe in überraschend einfacher

Weise zusammenfügen: 1. die orientierbare, n-dimensionale Mannigfaltigkeit M im R^m und ihr Rand ∂M; 2. die alternierende Differentialform ω und ihr Differential $d\omega$; 3. das Integral über M und ∂M.

Leider tritt in der Literatur die Schönheit dieser Sätze vielfach nicht voll zutage, weil die durch die Orientierung von M induzierte Orientierung des Randes ∂M unzweckmäßig definiert wird, wodurch ein entstellender Vorzeichenwirrwarr entsteht. Dies läßt sich durchaus vermeiden, indem man sich an die in der algebraischen Topologie übliche und bestens bewährte Definition der Randorientierung hält.

Im vorliegenden Fall des Raumkörpers K im E^n läuft dies darauf hinaus, daß man in jedem $(n - 1)$-Randsimplex R von K Koordinaten (Parameter) $y_2, \ldots, y_n$ einführt, die konsistent sind zu den Koordinaten $x_1, \ldots, x_n$ in K. Damit ist folgendes gemeint: Sei wieder R ein Randsimplex des n-Simplexes $S = S_i$ mit den Ecken $a_0, \ldots, a_n$, und zwar seien $a_0, \ldots, \hat{a}_k, \ldots, a_n$ die Ecken von R. Wir führen nun in der R enthaltenden Hyperebene des E^n ein orthonormiertes cartesisches Koordinatensystem $(y_2, \ldots, y_n)$ so ein, daß folgende zwei Bedingungen erfüllt sind: erstens hat die Transformation der Koordinaten x_μ in die Koordinaten y_ν die Determinante $= + 1$; zweitens ist für die Ecke a_k von S die y_1-Koordinate < 0 (m.a.W. der Einheitsvektor der positiven y_1-Achse ist in jedem Punkt von R ein Außenvektor von S). Wir nennen dann P und ∂P durch das Koordinatensystem $(x_1, \ldots, x_n)$ in P und die Koordinatensysteme $(y_2, \ldots, y_n)$ in allen $(n - 1)$-Randsimplexen R von P konsistent parametrisiert. Bei dieser Definition der im Rand von P induzierten Orientierung treten keinerlei Vorzeichenschwierigkeiten auf.[4]

Diese konsistente Parametrisierung steht im Einklang mit der in der algebraischen Topologie üblichen Orientierung des Randes eines orientierten kombinatorischen Simplexes. Es sei nämlich die durch die Reihenfolge $(a_0, \ldots, a_n)$ bestimmte Orientierung des aus den Ecken $a_0, \ldots, a_n$ bestehenden kombinatorischen Simplexes positiv, d. h. es sei die Volumendeterminante

[4] Vgl. Haupt-Aumann, a. a. O., § 8, oder etwa G. Nöbeling, Integralsätze der Analysis, de Gruyter 1979 (insbes. S. 40).

$$\begin{vmatrix} 1\, x_1^0 & \dots & x_n^0 \\ \dots & \dots & \dots \\ 1\, x_1^n & \dots & x_n^n \end{vmatrix} > 0$$

($x_1^\nu, \dots, x_n^\nu$ die x-Koordinaten von a_ν; $\nu = 0, \dots, n$)). Weil die Transformation der x_μ in die y_ν eine positive Determinante hat, ist auch

$$\begin{vmatrix} 1\, y_1^0 & \dots & y_n^0 \\ \dots & \dots & \dots \\ 1\, y_1^n & \dots & y_n^n \end{vmatrix} > 0.$$

Nun ist $y_1^i = 0$ für alle $i \neq k$, hingegen $y_1^k < 0$. Also folgt durch Entwicklung nach der zweiten Spalte

$$\begin{vmatrix} 1\, y_2^0 & \dots & y_n^0 \\ \dots & \dots & \dots \\ 1\, y_2^{k-1} & \dots & y_n^{k-1} \\ 1\, y_2^{k+1} & \dots & y_n^{k+1} \\ \dots & \dots & \dots \\ 1\, y_2^n & \dots & y_n^n \end{vmatrix} > 0.$$

Also ist durch $(-1)^k\ (a_0, \dots \hat{a}_k \dots, a_n)$ bestimmte Orientierung des kombinatorischen Randsimplexes mit den Ecken $a_0, \dots \hat{a}_k \dots, a_n$ (also den Ecken von R) positiv. Dies ist aber gerade die Orientierung, die in der algebraischen Topologie dem Randsimplex aufgeprägt wird.[5]

C. Der Normalenvektor $\mathfrak{n}$ auf dem Rand ∂K.

Im E^n liege vor ein Raumstück $K = g(P)$; dabei seien P und ∂P konsistent parametrisiert. Es sei $q^0 = g(p^0)$ ein regulärer Punkt von ∂K. In diesem Punkt definieren wir

$$\mathfrak{n}_\nu := (-1)^{\nu-1}\frac{1}{Q}\cdot\frac{\partial(g_1, \dots \hat{g}_\nu \dots, g_n)}{\partial(y_2, \dots, y_n)} \qquad (\nu = 1, \dots, n)$$

mit

$$Q := \left[\sum_{\nu=1}^{n}\left(\frac{\partial(g_1, \dots \hat{g}_\nu \dots g_n)}{\partial(y_2, \dots, y_n)}\right)^2\right]^{1/2}.$$

[5] Vgl. Alexandroff-Hopf, a. a. O., S. 165.

Dann ist

$$\mathfrak{n} := (\mathfrak{n}_1, \ldots, \mathfrak{n}_n)$$

einer der beiden Einheitsvektoren, normal zur Tangentialhyperebene T an $g(R)$ in q^0. Dieser Einheitsvektor $\mathfrak{n}$ tritt (bei konsistenter Parametrisierung) in den Integralsätzen von Gauß und Green auf. Es ist wichtig zu wissen, ob er ein Innen- oder ein Außenvektor von K in q^0. Wir behaupten:

(5) $\mathfrak{n}$ ist ein Außenvektor von K in q^0.

Der Vektor $\mathfrak{n}$ bleibt unverändert, wenn wir die Koordinaten $x_1, \ldots, x_n$ im E^n und (oder) die Parameter $y_2, \ldots, y_n$ in R einer orthogonalen Transformation mit $\det = +1$ unterwerfen. Wenn wir anderseits auf das Raumstück K (m.a.w. auf das System $g_1, \ldots, g_n$ der Komponenten von g) eine orthogonale Transformation mit $\det = +1$ ausüben, so unterliegt $\mathfrak{n}$ derselben Transformation. Daher können wir o.B.d.A. annehmen, daß die folgende Situation vorliegt (dabei O der Ursprung der Koordinaten $x_1, \ldots, x_n$):

(6) $S \subset \{x : x_1 \leqq 0\}$; $R \subset \{x : x_1 = 0\}$; $P^0 = \mathrm{O}$;

(7) $q^0 = \mathrm{O}$; $T = \{x : x_1 = 0\}$; der (positive) Einheitsvektor der x_1-Achse ist Außenvektor von K in O.

Die Normale N zu T in O ist dann die x_1-Achse; wir bezeichnen für jeden Punkt $\varrho = (\varrho_1, \ldots, \varrho_n)$ von N mit N_ϱ die abgeschlossene Halbgerade $\{x : x_1 \geqq \varrho_1, x_2 = \ldots = x_n = 0\}$. Wir können dann, indem wir nötigenfalls die Triangulierung von P verfeinern, weiter annehmen:

(8) $$g(S) \cap N_{\mathrm{O}} = \{\mathrm{O}\}.$$

(Denn für eine isotone Folge $(S_k)_k$ von n-Simplexen $S_k \subset P$ mit $\bigcap S_k = \{\mathrm{O}\}$ ist $\bigcap (g(S_k) \cap N_e) = \emptyset$ wegen (4^+); der Cantorsche Durchschnittsatz liefert also die Behauptung.)

Wegen (6) können wir als (mit den $x_1, \ldots, x_n$ konstistenten) Parameter in R die Koordinaten $x_2, \ldots, x_n$ wählen. Wegen (7) ist $\mathfrak{n} = \pm \mathfrak{e}$. Die Behauptung lautet daher: $\mathfrak{n} = \mathfrak{e}$. Es genügt also zu zeigen:

$$\frac{\partial(g_2, \ldots, g_n)}{\partial(x_2, \ldots, x_n)}(O) > 0.$$

Wegen (4^-) und (6) können wir in s^- einen Punkt $z = (z_1, 0, \ldots, 0)$, $z_1 < 0$, so wählen, daß die halbabgeschlossene Strecke $N_z \setminus N_0 \subset g(\underline{S})$ ist, Nach (8) gilt dann

(9) $$g(\partial S) \cap N_z = \{O\}.$$

Zufolge (6) können wir z außerdem so nahe bei O wählen, daß auch $z \in \underline{S}$ gilt.

Nun sei ein $r > 0$ so klein gewählt, daß erstens für die abgeschlossene $(n-1)$-Kugel $U_{2r} \subset T$ mit dem Radius $2r$ und dem Mittelpunkt O eine Teilmenge von R ist und zweitens für jeden Punkt $p \in U_{2r}$ gilt:

(10) $$|g^0(p), l(p)| < \tfrac{1}{2}|z_1|,$$

(11) $$|g^0(p), l(p)| < \tfrac{1}{2}|l(p), O|,$$

was möglich ist wegen (3).

Wir setzen $g^0 := g \mid \partial S$ und definieren eine neue stetige Abbildung $g^1 : \partial S \to E^n$ folgendermaßen:

(12) auf $\partial S \setminus \underline{U_{2r}}$ sei $g^1 \equiv g^0$;

(13) auf U sei $g^1 \equiv l$;

(14) auf jeder radialen, abgeschlossenen Strecke $[a, b]$ mit $a \in \partial U_r$, $b \in \partial U_{2r}$ sei g^1 linear.

Dann gilt zufolge (10):

(15) für jeden Punkt p von U_{2r} haben $g^0(p)$ und $g^1(p)$ Abstände $< \tfrac{1}{2}|z_1|$ von T.

Wegen (9) und (11) gilt

(16) $$g^1(\partial S) \cap N_z = \{O\}.$$

Für jedes t mit $0 < t < 1$ definieren wir schließlich eine stetige Abbildung $g^t : \partial S \to E^n$ folgendermaßen. Für jeden Punkt $p \in \partial S$ mit $g^0(p) = g^1(p)$ sei $g^0(p) = g^t(p) = g^1(p)$; für jeden Punkt $p \in \partial S$ mit $g^0(p) \neq g^1(p)$ sei $g^t(p)$ der Punkt der Strecke

$[g^0(p), g^1(p)]$ mit $|g^0(p), g^t(p)| : |g^t(p), g^1(p)| = t : (1 - t)$. Die Abbildungen g^t mit $0 \leqq t \leqq 1$ bilden eine stetige, g^0 und g^1 verbindende Schar. Wegen (10) und (13) gilt:

(17) auf $\partial S \setminus \underline{U_{2r}}$ ist $g^t \equiv g^0$ für alle $0 \leqq t \leqq 1$; für jeden Punkt p von $\underline{U_{2r}}$ und alle $0 \leqq t \leqq 1$ hat $g^t(p)$ einen Abstand $< \frac{1}{2} |z_1|$ von T.

Für $u := z$ und $v := z$ gilt $u \in \underline{S}$ und $v \in g(\underline{S})$; die Parallelverschiebung π' ist also jetzt die Identität und daher $\alpha_{g, S, z, z} = \pi \circ g^0$ (vgl. A 1 mit $\Sigma := S$). Wegen (17) sind für alle $0 \leqq t \leqq 1$ die stetigen Abbildungen $\pi \circ g^t : \partial S \to \partial S$ definiert. Sie bilden eine stetige Schar. Daher haben $\pi \circ g^0$ und $\pi \circ g^1$ denselben Abbildungsgrad. Zufolge der positiven Orientierung von K hat $\pi \circ g^0$ den Abbildungsgrad $+1$. Also hat auch $\pi \circ g^1$ den Abbildungsgrad $+1$.

Wegen (16) hat die (kompakte) Menge $g^1(\partial S \setminus \underline{U_{2r}})$ einen positiven Abstand von der Halbgeraden N_z. Wegen (11) und (14) gilt für jeden Punkt p einer radialen Strecke $[a, b]$ mit $a \in \partial U_r$, $b \in \partial U_{2r}$ die Ungleichung $|g^1(p), N_z| \geqq |l(a), O|$; ist also d der (positive) Abstand der (kompakten) Menge $l(\partial U_r)$ von N_z, so hat die Menge $g^1(U_{2r} \setminus \underline{U_r})$ einen Abstand $\geqq d$ von N_z. Insgesamt hat daher die Menge $g^1(\partial S \setminus \underline{U_r})$ einen positiven Abstand von N_z. Dasselbe gilt dann auch für jede abgeschlossene Halbgerade N_z' mit dem Anfangspunkt z, die mit N_z einen hinreichend kleinen Winkel bildet. (Diese Halbgeraden N_z' sind Projektionsstrahlen der Projektion π von $E^n \setminus \{z\}$ auf ∂S mit dem Zentrum z; vgl. A 1.)

Nun ist $g^1 | U_r \equiv l | U_r$ nach (13). Folglich besitzt der Punkt O eine Umgebung V in R, auf welcher die Umkehrung von $\pi \circ g^1$ eindeutig, und zwar gleich der Umkehrung von $\pi \circ g^1$ eindeutig, und zwar gleich der Umkehrung l^{-1} von l ist.

Hieraus folgt, daß der Abbildungsgrad von $\pi \circ g^1$ positiv oder negativ ist, je nachdem die Determinante der linearen Abbildung l, d. h. $\frac{\partial (g_2, \ldots, g_n)}{\partial (x_2, \ldots, x_n)}$ in O positiv oder negativ ist. Nun ist, wie vorhin gezeigt, der Abbildungsgrad von $\pi \circ g^1$ gleich $+1$. Folglich ist $\frac{\partial (g_2, \ldots, g_n)}{\partial (x_2, \ldots, x_n)}$ (O) > 0, w. z. z. w.