Sitzungsberichte

der

mathematisch-naturwissenschaftlichen

Klasse

der

Bayerischen Akademie der Wissenschaften

zu München

Jahrgang 1951

München 1952

Verlag der Bayerischen Akademie der Wissenschaften

In Kommission bei der C. H. Beck'schen Verlagsbuchhandlung München

Beweis des Moessnerschen Satzes

Von **Oskar Perron** in München

Vorgelegt am 4. Mai 1951

Der Moessnersche Satz lautet:[1]

Wenn man aus der Reihe der natürlichen Zahlen jede k^{te} ausstreicht und von der übrigbleibenden Reihe die Summenreihe bildet, sodann aus dieser jede $(k-1)^{\text{te}}$ Zahl ausstreicht und wieder die Summenreihe bildet, aus dieser sodann jede $(k-2)^{\text{te}}$ Zahl ausstreicht und abermals die Summenreihe bildet und diesen Prozeß fortsetzt, bis man schließlich beim $(k-1)^{\text{ten}}$ Schritt jede zweite Zahl ausstreicht und dann die Summenreihe bildet, so entsteht die Reihe der k^{ten} Potenzen: $1^k, 2^k, 3^k, 4^k, \ldots$.

Zum Beweis des Satzes ordnen wir die natürlichen Zahlen, nachdem jede k^{te} ausgestrichen ist, in Zeilen zu je $k-1$ Zahlen:

$$\begin{array}{ccccc}
1, & 2, & 3, & \ldots, & k-1, \\
k+1, & k+2, & k+3, & \ldots, & 2k-1, \\
2k+1, & 2k+2, & 2k+3, & \ldots, & 3k-1, \\
\multicolumn{5}{c}{\text{-----------------------------}}.
\end{array}$$

Wir schreiben dafür

$$\begin{array}{cccc}
A_{11}^{(1)}, & A_{12}^{(1)}, & \ldots, & A_{1,k-1}^{(1)}, \\
A_{21}^{(1)}, & A_{22}^{(1)}, & \ldots, & A_{2,k-1}^{(1)}, \\
A_{31}^{(1)}, & A_{32}^{(1)}, & \ldots, & A_{3,k-1}^{(1)}, \\
\multicolumn{4}{c}{\text{----------------------}},
\end{array}$$

so daß also

$$(1) \quad A_{n\nu}^{(1)} = (n-1)k + \nu \qquad (n = 1, 2, 3, \ldots; \ \nu = 1, 2, \ldots, k-1)$$

ist. Nun bilden wir die Summenreihe und ordnen sie, nachdem jede $(k-1)^{\text{te}}$ Zahl daraus gestrichen ist, in Zeilen zu je $k-2$ Zahlen:

[1] Siehe Seite 29 dieses Bandes der Sitzungsberichte.

$$\begin{array}{llll} A_{11}^{(2)}, & A_{12}^{(2)}, & \ldots, & A_{1,k-2}^{(2)}, \\ A_{21}^{(2)}, & A_{22}^{(2)}, & \ldots, & A_{2,k-2}^{(2)}, \\ A_{31}^{(2)}, & A_{32}^{(2)}, & \ldots, & A_{3,k-2}^{(2)}, \\ \multicolumn{4}{c}{\text{— — — — — — — — — — —.}} \end{array}$$

Jetzt bilden wir wieder die Summenreihe und ordnen sie, nachdem jede $(k-2)^{\text{te}}$ Zahl daraus gestrichen ist, in Zeilen zu je $k-3$ Zahlen. So fortfahrend erhalten wir, nachdem wir zum $(\lambda-1)^{\text{ten}}$ Mal die Summenreihe gebildet und jede $(k-\lambda+1)^{\text{te}}$ Zahl daraus gestrichen haben, das Schema

$$\begin{array}{llll} A_{11}^{(\lambda)}, & A_{12}^{(\lambda)}, & \ldots, & A_{1,k-\lambda}^{(\lambda)}, \\ A_{21}^{(\lambda)}, & A_{22}^{(\lambda)}, & \ldots, & A_{2,k-\lambda}^{(\lambda)}, \\ A_{31}^{(\lambda)}, & A_{32}^{(\lambda)}, & \ldots, & A_{3,k-\lambda}^{(\lambda)}, \\ \multicolumn{4}{c}{\text{— — — — — — — — — — —.}} \end{array}$$

Indem wir nun zur nächsten Summenreihe übergehen und daraus jede $(k-\lambda)^{\text{te}}$ Zahl streichen, ergibt sich für $A_{n\nu}^{(\lambda+1)}$ augenscheinlich die Formel

$$(2) \qquad A_{n\nu}^{(\lambda+1)} = \sum_{\rho=1}^{n-1} \sum_{\mu=1}^{k-\lambda} A_{\rho\mu}^{(\lambda)} + \sum_{\mu=1}^{\nu} A_{n\mu}^{(\lambda)} \quad \begin{pmatrix} n = 1, 2, 3, \ldots \\ \nu = 1, 2, \ldots, k-\lambda-1 \end{pmatrix},$$

wobei die für $n = 1$ entstehende leere Summe gleich 0 zu setzen ist. Der Moessnersche Satz besagt dann:

$$(3) \qquad \sum_{\rho=1}^{n} A_{\rho 1}^{(k-1)} = n^k \qquad (n = 1, 2, 3, \ldots),$$

oder, was dasselbe ist:

$$(4) \qquad A_{n1}^{(k-1)} = n^k - (n-1)^k \qquad (n = 1, 2, 3, \ldots).$$

Um (4) zu beweisen, leiten wir die allgemeinere Formel her:

$$(5) \qquad A_{n\nu}^{(\lambda)} = \sum_{\tau=0}^{\lambda} \binom{\nu+\tau-1}{\tau} \binom{k}{\lambda-\tau} (n-1)^{\lambda-\tau} \qquad \begin{pmatrix} n = 1, 2, 3, \ldots \\ \nu = 1, 2, \ldots, k-\lambda \end{pmatrix},$$

die speziell für $\nu = 1$, $\lambda = k-1$ übergeht in:

$$\begin{aligned} A_{n1}^{(k-1)} &= \sum_{\tau=0}^{k-1} \binom{k}{k-1-\tau} (n-1)^{k-1-\tau} = \sum_{\tau=0}^{k-1} \binom{k}{\tau} (n-1)^{\tau} \\ &= [1 + (n-1)]^k - (n-1)^k, \end{aligned}$$

also in (4), so daß mit (5) insbesondere auch der Moessnersche Satz bewiesen sein wird.

Die Formel (5) lautet speziell für $\lambda = 1$:

$$A_{n\nu}^{(1)} = k \cdot (n-1) + \nu \qquad \begin{pmatrix} n = 1, 2, 3, \ldots \\ \nu = 1, 2, \ldots, k-1 \end{pmatrix},$$

was nach (1) richtig ist. Die Allgemeingültigkeit von (5) beweisen wir nun durch Schluß von λ auf $\lambda+1$. Aus der angenommenen Gültigkeit von (5) ergibt sich nämlich durch Einsetzen in die Rekursionsformel (2) zunächst

$$\begin{aligned} A_{n\nu}^{(\lambda+1)} &= \sum_{\rho=1}^{n-1} \sum_{\mu=1}^{k-\lambda} \sum_{\tau=0}^{\lambda} \binom{\mu+\tau-1}{\tau} \binom{k}{\lambda-\tau} (\rho-1)^{\lambda-\tau} \\ &+ \sum_{\mu=1}^{\nu} \sum_{\tau=0}^{\lambda} \binom{\mu+\tau-1}{\tau} \binom{k}{\lambda-\tau} (n-1)^{\lambda-\tau} \\ &= \sum_{\rho=1}^{n-1} \sum_{\tau=0}^{\lambda} \binom{k}{\lambda-\tau} (\rho-1)^{\lambda-\tau} \sum_{\mu=1}^{k-\lambda} \binom{\mu+\tau-1}{\tau} \\ &+ \sum_{\tau=0}^{\lambda} \binom{k}{\lambda-\tau} (n-1)^{\lambda-\tau} \sum_{\mu=1}^{\nu} \binom{\mu+\tau-1}{\tau}. \end{aligned}$$

Nun ist aber

$$\sum_{\mu=1}^{m} \binom{\mu+\tau-1}{\tau} = \binom{m+\tau}{\tau+1},$$

so daß obige Formel übergeht in:

$$\begin{aligned} A_{n\nu}^{(\lambda+1)} &= \sum_{\rho=1}^{n-1} \sum_{\tau=0}^{\lambda} \binom{k}{\lambda-\tau} \binom{k-\lambda+\tau}{\tau+1} (\rho-1)^{\lambda-\tau} \\ &+ \sum_{\tau=0}^{\lambda} \binom{k}{\lambda-\tau} \binom{\nu+\tau}{\tau+1} (n-1)^{\lambda-\tau}. \end{aligned}$$

Wegen

$$\begin{aligned} &\binom{k}{\lambda-\tau} \binom{k-\lambda+\tau}{\tau+1} = \frac{k!}{(\lambda-\tau)!\,(k-\lambda+\tau)!} \cdot \frac{(k-\lambda+\tau)!}{(\tau+1)!\,(k-\lambda-1)!} \\ &= \frac{k!}{(\lambda-\tau)!\,(\tau+1)!\,(k-\lambda-1)!} = \frac{k!}{(\lambda+1)!\,(k-\lambda-1)!} \cdot \frac{(\lambda+1)!}{(\lambda-\tau)!\,(\tau+1)!} \\ &= \binom{k}{\lambda+1} \binom{\lambda+1}{\tau+1} \end{aligned}$$

läßt sich die letzte Formel auch folgendermaßen schreiben:

$$A_{n\nu}^{(\lambda+1)} = \binom{k}{\lambda+1} \sum_{\rho=1}^{n-1} \sum_{\tau=0}^{\lambda} \binom{\lambda+1}{\tau+1} (\rho-1)^{\lambda-\tau}$$

$$+ \sum_{\tau=0}^{\lambda} \binom{k}{\lambda-\tau} \binom{\nu+\tau}{\tau+1} (n-1)^{\lambda-\tau}$$

$$= \binom{k}{\lambda+1} \sum_{\rho=1}^{n-1} \{[(\rho-1)+1]^{\lambda+1} - (\rho-1)^{\lambda+1}\}$$

$$+ \sum_{\tau=1}^{\lambda+1} \binom{k}{\lambda-\tau+1} \binom{\nu+\tau-1}{\tau} (n-1)^{\lambda-\tau+1}$$

$$= \binom{k}{\lambda+1} (n-1)^{\lambda+1} + \sum_{\tau=1}^{\lambda+1} \binom{k}{\lambda+1-\tau} \binom{\nu+\tau-1}{\tau} (n-1)^{\lambda+1-\tau}$$

$$= \sum_{\tau=0}^{\lambda+1} \binom{k}{\lambda+1-\tau} \binom{\nu+\tau-1}{\tau} (n-1)^{\lambda+1-\tau}.$$

Das ist aber gerade die Formel (5) mit $\lambda+1$ an Stelle von λ. W. z. b. w.