

BAYERISCHE AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN
MATHEMATISCH-NATURWISSENSCHAFTLICHE KLASSE

ABHANDLUNGEN · NEUE FOLGE HEFT 76

GOTTFRIED ECKART

Über die Streuung elektrischer Wellen an Zonen dielektrischer Turbulenz

(Zweiter Teil einer Theorie der Streuung elektrischer Wellen
in turbulenter Atmosphäre)

Mit 4 Abbildungen

Vorgelegt von Herrn Winfried O. Schumann
am 11. November 1955

MÜNCHEN 1956

VERLAG DER BAYERISCHEN AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN
IN KOMMISSION BEI DER C. H. BECK'SCHEN VERLAGSBUCHHANDLUNG

Druck der C. H. Beck'schen Buchdruckerei Nördlingen
Printed in Germany

HERRN A. BESTELMEYER
ZUM 80. GEBURTSTAG GEWIDMET

INHALT

Übersicht	7
I. Einführung	7
II. Die Strahlung einer Stör-Zone bei Erregung durch eine kontinuierliche Welle	8
A. Die Entwicklung der DK-Störung nach FOURIER in Raum und Zeit	10
B. Die Streustrahlung	12
III. Die statistische Verteilung des gestreuten Feldes	13
A. Die äquiphasen Ebenen im Falle eines Senders und eines Empfängers	13
B. Die statistische Verteilung des Empfangsfeldes . . .	15
1. Die erste Häufigkeitsfunktion des gestreuten Feldes	15
a) Allgemein	15
b) Spezialisierung auf den GAUSS-LAPLACESchen Fall	18
2. Die zweite Häufigkeitsfunktion	23
a) Allgemein	23
b) GAUSS-LAPLACEScher Fall	26
IV. Die statistische Theorie des Ultrakurzwellenfadings . .	32
A. Der Zusammenhang der statistischen Kenngrößen der Störzone mit denjenigen des Fadings im komplexen Fall	33
B. Spektren und Correlationen	33
C. Weitere Eigenschaften des Streufeldes	35
D. Komplexes Fading und reines Amplitudenfading . .	35
Literatur	36

ÜBERSICHT

Das Problem der Streuung elektrischer Wellen an Zonen dielektrischer Turbulenz, d. h. Zonen, in denen die Dielektrizitätskonstante des Mediums – in unserem Falle der Troposphäre – kleinen raumzeitlichen Schwankungen unterliegt, bietet einen doppelten Aspekt:

1. Aus der räumlich-zeitlich als bekannt angenommenen Störung der DK ist die Streuung einer die betreffende Zone durchlaufenden elektrischen Welle zu berechnen;
 - a) direkt,
 - b) wenn die Störung nur in ihren statistischen Eigenschaften bekannt ist, statistisch.
2. Aus geeigneten Beobachtungen der Streustrahlung ist die Verteilung der DK-Störung zu ermitteln, ebenfalls nach a) und b).

In dem vorliegenden Bericht wird das Problem 1 vollständig behandelt in einer Form, die auf das Problem 2 direkt hinführt. Eine vorläufige prinzipielle Lösung von 2 wurde schon in [1] gegeben. Eine viel weiter reichende Behandlung ist der Gegenstand einer Arbeit, die auf die vorliegende folgt.

I. EINFÜHRUNG

Im folgenden soll die Streuung elektromagnetischer Wellen an kleinen Inhomogenitäten der Dielektrizitätskonstante des Ausbreitungsmediums untersucht werden. In einer vorhergehenden Arbeit [2] waren diese Inhomogenitäten als Funktion von Raum und Zeit besonders auch als stochastischer Prozeß studiert worden. Dabei wurde die Erscheinung entsprechend einem Vorschlag von Herrn FRAGER als „dielektrische Turbulenz“ bezeichnet. Da im vorliegenden Falle das Ausbreitungsmedium durch die Troposphäre gebildet wird, so wollen wir mit diesem Wort die kleinen Störungen der Dielektrizitätskonstante (DK) bezeichnen, die zusammen mit atmosphärischer Turbulenz auftreten, etwa in Form von Luftschlieren, die sich bei ungleichmäßiger Erwärmung durch heterogene Sonneneinstrahlung ergeben, oder die durch eine Mischung der Luft mit Sandkörnern in einem Sandsturm auftreten. Um nun die Rechnung einigermaßen übersichtlich zu gestalten, gehen wir von der Annahme aus, daß eine räumlich begrenzte Zone gestörter DK von einem weit entfernten Sender mit einer Welle angestrahlt wird, die in der Störzone als eben angesehen werden kann und einen gemeinsamen Faktor $1/R$ besitzt, wo R der Abstand des Senders von einem geeignet gewählten Punkt der Störzone ist. Ebenso sei der Empfänger von der Störzone so weit entfernt, daß in ihm das gestreute Feld den Charakter

ebener Wellen hat, die noch den Faktor $1/R'$ haben, wobei R' der Abstand des oben genannten Punktes vom Empfänger ist.

Da nun dabei die genannten Störungen der DK zeitlich schwanken, so beobachten wir im Empfänger schwankende Feldstärken, d. h. wir haben es mit einer Fadingerscheinung zu tun. Wie bereits in der Übersicht bemerkt, ist es von erheblichem Interesse, die Zusammenhänge zwischen DK-Störung und Streufeld in beiden Richtungen zu studieren. In der vorliegenden Arbeit wollen wir ausschließlich das Streufeld aus der DK-Störung berechnen. Die Umkehrung, d. h. die Berechnung der DK-Störung aus dem Streufeld ist schon einmal in [1] begonnen worden; dies Problem soll in einer folgenden Arbeit gründlichst neu aufgerollt werden.

Wir wollen zunächst ausgehend von einer FOURIERentwicklung der DK-Störung in Raum und Zeit das Streufeld berechnen; sodann wollen wir aus den statistischen Kenngrößen der Störung die statistischen Kenngrößen des Streufeldes ermitteln. Wir bekommen auf diese Weise eine Fadingtheorie.

Teile des vorliegenden Problems wurden schon von GARDON-BOOKER [3] sowie von STARAS [4] behandelt. Das wesentliche Ergebnis der GARDON-BOOKERSchen Arbeit ist die Erkenntnis, daß sich durch solche DK-Störungen Reichweiten ergeben, die über die von einem Duct herrührenden weit hinausgehen. Die BOOKERSche Arbeit ist mathematisch nicht ganz einwandfrei. STARAS erweitert die BOOKERSche Betrachtung, doch ist aus keiner der beiden Arbeiten eine feinere kausale und statistische Theorie des Streufeldes zu entnehmen.

II. DIE STRAHLUNG EINER STÖR-ZONE BEI ERREGUNG DURCH EINE KONTINUIERLICHE WELLE

Zunächst geben wir die geometrische Anordnung unseres Problems:

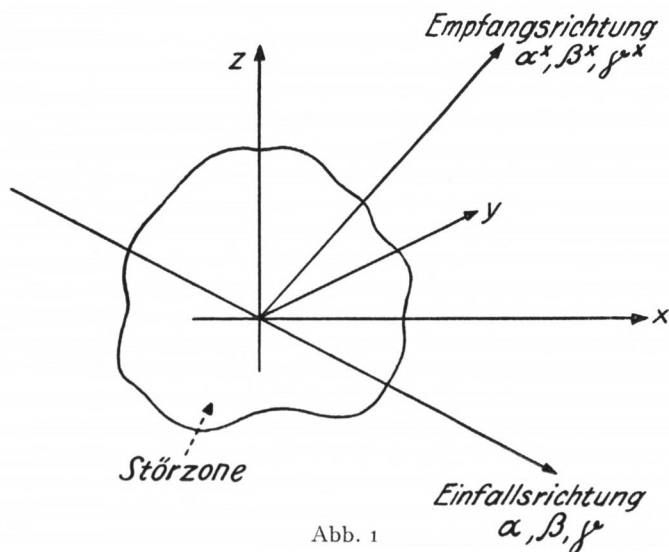


Abb. 1

Es seien α, β, γ beziehungsweise die Cosinus der Winkel der Einfallsrichtung mit der x, y, z -Achse; $\alpha^*, \beta^*, \gamma^*$ die Richtungskosinus der Richtung Störzone – Empfänger. Wir setzen R und R' als sehr groß gegenüber den Abmessungen der Störzone und der Wellen-

länge voraus. Die Werte der DK-Störung seien so klein, daß Mehrfachstreuung unberücksichtigt bleiben kann, wir also nur die erste Reflexion zu betrachten haben. Für die Gangunterschiede können wir dann, wie es in der klassischen Beugungstheorie üblich ist, einfach die Projektionen der streuenden Punkte auf die Einfall- und Empfangsrichtung wählen.

In der Störzone falle also eine ebene Welle ein, deren elektrische Feldstärke irgendeine Polarisationsrichtung senkrecht zur Richtung α, β, γ habe. Die Zeitfunktion sei $\exp(-j\omega t)$. Dann sei, wenn die einfallende Welle die Amplitude 1 hat,

$$(1) \quad \vec{E}_e = \frac{I}{R} \exp[jk(\alpha x + \beta y + \gamma z)], \quad k = \frac{2\pi}{\lambda}$$

wo λ die Wellenlänge in der ungestörten Atmosphäre sei.

Ein Volumenelement dv im Punkte x, y, z erzeugt im Empfänger einen HERTZschen Vektor

$$(2) \quad \vec{\Pi} = \frac{I}{RR'} \frac{dv}{4\pi\epsilon_1} \Delta\epsilon(x, y, z) \exp[jk((\alpha - \alpha^x)x + (\beta - \beta^x)y + (\gamma - \gamma^x)z)],$$

wo wir statt dv auch dx, dy, dz schreiben können. Der HERTZsche Vektor hat dieselbe Richtung wie der Vektor $\vec{E}$. $\Delta\epsilon(x, y, z)$ ist der Wert der ϵ -Störung im Punkte x, y, z . Die elektrische Feldstärke E am Empfangsort drückt sich durch $\vec{\Pi}$ folgendermaßen aus:

$$(3) \quad E_{Empf} = -k^2 \Pi \sin \vartheta,$$

wobei ϑ der Winkel zwischen der Richtung von $\vec{E}$ und der Empfangsrichtung ist. Die Richtung von $\vec{E}$ bestimmt sich aus der bekannten Gesetzmäßigkeit des Fernfeldes der HERTZschen Lösung (Abb. 2). Den Faktor $\exp(jk(R + R'))$, herrührend vom Abstand

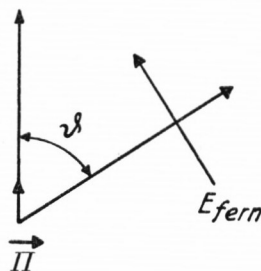


Abb. 2

des Nullpunktes von Sender und Empfänger, haben wir unterdrückt, da er nur einer beliebigen Wahl des Zeitnullpunktes entspricht. Der HERTZsche Vektor des Streufeldes der gesamten Störzone lautet dann:

$$(4) \quad \vec{\Pi} = \frac{I}{RR' 4\pi\epsilon_1} \iiint_{Störzone} \Delta\epsilon(x, y, z) \exp[jk((\alpha - \alpha^x)x + (\beta - \beta^x)y + (\gamma - \gamma^x)z)] dx dy dz.$$

Dabei soll noch auf folgenden Umstand hingewiesen werden:

(3) und (4) geben das Empfangsfeld nach Größe und Phase; ein Empfänger mit einem Gleichrichter würde aber nur die Größe erkennen lassen. Um die Phase in Evidenz zu setzen, muß dem Streufeld im Empfänger ein Dauerfeld überlagert werden, das etwa über eine ungestörte Kabelleitung vom Sender zum Empfänger gelangt. Wir werden später sehen, daß es für eine Analyse der DK-Störungen aus dem Streufeld notwendig ist, auch dessen Phase zu kennen; deshalb müssen wir bei Fadingbeobachtungen darauf achten.

A. DIE ENTWICKLUNG DER DK-STÖRUNG NACH FOURIER IN RAUM UND ZEIT

In einer vorangehenden Arbeit [2] war die Störung der DK der Atmosphäre als Phänomen in Raum und Zeit in Form einer FOURIER-Entwicklung angesetzt worden. Dann wurden die FOURIER-Koeffizienten als Zufallsvariable angenommen und im Rahmen einer statistischen Theorie die Verteilungsfunktionen des Vorganges in Abhängigkeit von denen der FOURIER-Koeffizienten studiert; ebenfalls wurde die umgekehrte Betrachtung durchgeführt.

Mit Hilfe der genannten FOURIER-Entwicklung der ε -Störung wollen wir nun das Streufeld berechnen. Wir nehmen dabei an, daß die zeitliche Variation der ε -Störung sehr langsam gegenüber der Variation des elektrischen Feldes ist, d. h. also, daß die in der DK-Störung auftretenden Frequenzen um mehrere Größenordnungen kleiner als die der einfallenden Welle sind. Für die einzelnen in der Entwicklung der DK-Störung auftretenden FOURIER-Koeffizienten berechnen wir jetzt das Integral (4). Dabei ergeben sich (vgl. [2]) verschiedene Möglichkeiten. Zunächst: das Entwicklungsintervall erstreckt sich über die ganze Störzone; außerhalb deren sei $\Delta\varepsilon = 0$. Man kann nun das Entwicklungsintervall als ganze Periode in jeder Veränderlichen wählen; wir nehmen es symmetrisch zum Nullpunkt, dann kann man entwickeln

- a) nach trigonometrischen Funktionen,
- b) nach Exponentialfunktionen.

Dann bekommen wir (vgl. [2])

$$a) \quad (5) \quad \Delta\varepsilon(x, y, z, t) = \sum_{k'=0}^{\infty} \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} C_{k'lmn}^{ssss} \frac{\sin \frac{k'\pi t}{T}}{\cos \frac{k'\pi t}{T}} \frac{\sin \frac{l\pi x}{X}}{\cos \frac{l\pi x}{X}} \frac{\sin \frac{m\pi y}{Y}}{\cos \frac{m\pi y}{Y}} \frac{\sin \frac{n\pi z}{Z}}{\cos \frac{n\pi z}{Z}},$$

wobei für jedes Quadrupel von Werten k', l, m, n alle möglichen 16 Kombinationen der Sinus und Cosinus auftreten müssen und die oberen Indices an den C die Sinus- und Cosinus-Kombination andeuten. So lautet z. B. ein Term:

$$C_{k'lmn}^{sccs} \sin \frac{k'\pi t}{T} \cos \frac{l\pi x}{X} \cos \frac{m\pi y}{Y} \sin \frac{n\pi z}{Z},$$

wobei also die obere Indexfolge scs bei der fest gegebenen Reihenfolge k', l, m, n die Reihenfolge $\sin, \cos, \cos, \sin$ bedeutet. Das Entwicklungsintervall ist gegeben durch:

$$-X \leq x \leq +X, \quad -Y \leq y \leq +Y, \quad -Z \leq z \leq +Z, \quad -T \leq t \leq +T,$$

wo X, Y, Z, T jeweils die Halbperioden darstellen. Schreiben wir die Entwicklungskomplexe an, so bekommen wir:

b) (6)

$$\Delta \varepsilon(x, y, z, t) = \sum_{k'=-\infty}^{+\infty} \sum_{l=-\infty}^{+\infty} \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_{k'lmn} \times \exp \left[j \left(\frac{k'\pi t}{T} + \frac{l\pi x}{X} + \frac{m\pi y}{Y} + \frac{n\pi z}{Z} \right) \right].$$

Zu einer Kombination von Absolutwerten k', l, m, n gehören dann alle 16 Kombinationen der positiven und negativen Werte, z. B.

$$+k', +l, +m, +n; \quad -k', -l, -m, -n; \quad +k', -l, +m, -n; \quad -k', +l, -m, +n.$$

Dabei ist immer

$$(7) \quad a_{k'lmn} = -a_{-k'-l-m-n}^*$$

für irgendeine solche Kombination, wobei der Stern den konjugiert komplexen Wert bedeutet.

Man kann aber auch das Entwicklungsintervall als Halbperiode ansetzen und dann nach Cosinus allein oder nach Sinus allein entwickeln. Dann hat man zu einer Kombination von Werten k', l, m, n , die dann alle positiv sind, nur einen einzigen Koeffizienten. Dabei bekommen wir die Entwicklungen:

$$(8) \quad \Delta \varepsilon(x, y, z, t) = \sum_{k'=0}^{\infty} \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} b_{k'lmn}^c \cos \frac{k'\pi t}{T} \cos \frac{l\pi x}{X} \cos \frac{m\pi y}{Y} \cos \frac{n\pi z}{Z}$$

oder

$$(9) \quad \Delta \varepsilon(x, y, z, t) = \sum_{k'=0}^{\infty} \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} b_{k'lmn}^s \sin \frac{k'\pi t}{T} \sin \frac{l\pi x}{X} \sin \frac{m\pi y}{Y} \sin \frac{n\pi z}{Z}$$

in

$$0 \leq t \leq T; \quad 0 \leq x \leq X; \quad 0 \leq y \leq Y; \quad 0 \leq z \leq Z.$$

Dabei haben wir stets das Zeichen k' gewählt, um diesen Zählindex von der Kreiswellenzahl k zu unterscheiden. Natürlich kann man auch die obigen Entwicklungsmöglichkeiten kombinieren, z. B.

in t nach $\cos$ in der Halbperiode

in x nach $\sin$ in der Halbperiode

in y nach $\cos$ in der Halbperiode

und so fort entwickeln, eventuell auch nach einer Variablen in der Halbperiode, nach einer anderen in der ganzen Periode entwickeln. Wir wollen aber diese Möglichkeiten nicht weiter verfolgen.

B. DIE STREUSTRAHLUNG

Somit haben wir nach (4) folgende Integrale auszuwerten:

$$(10) \quad \frac{1}{4\pi\epsilon_1} \int_{-X}^{+X} \int_{-Y}^{+Y} \int_{-Z}^{+Z} \frac{\cos \frac{l\pi x}{X}}{\sin \frac{l\pi x}{X}} \frac{\cos \frac{m\pi y}{Y}}{\sin \frac{m\pi y}{Y}} \frac{\cos \frac{n\pi z}{Z}}{\sin \frac{n\pi z}{Z}} \exp[jk(a-a^\times)x + (\beta-\beta^\times)y + (\gamma-\gamma^\times)z] dx dy dz,$$

$$(11) \quad \frac{1}{4\pi\epsilon_1} \int_0^X \int_0^Y \int_0^Z \frac{\cos \frac{l\pi x}{X}}{\sin \frac{l\pi x}{X}} \frac{\cos \frac{m\pi y}{Y}}{\sin \frac{m\pi y}{Y}} \frac{\cos \frac{n\pi z}{Z}}{\sin \frac{n\pi z}{Z}} \exp[jk((a-a^\times)x + (\beta-\beta^\times)y + (\gamma-\gamma^\times)z)] dx dy dz.$$

Man sieht sofort, daß jedes dieser Integrale das Produkt von 3 Faktoren ist, die jeweils durch Integration nach einer Variablen gewonnen werden können. Wir geben die einzelnen Faktoren in der folgenden Liste getrennt an:

$$(12) \quad \int_{-X}^{+X} \cos \frac{l\pi x}{X} \exp[jk(a-a^\times)x] dx = \frac{(-1)^l 2k(a-a^\times) \sin k(a-a^\times)X}{k^2(a-a^\times)^2 - l^2\pi^2/X^2}$$

$$(13) \quad \int_{-X}^{+X} \sin \frac{l\pi x}{X} \exp[jk(a-a^\times)x] dx = \frac{j(-1)^l \frac{2l\pi}{X} \sin k(a-a^\times)X}{k^2(a-a^\times)^2 - l^2\pi^2/X^2}$$

$$(14) \quad \int_0^X \cos \frac{l\pi x}{X} \exp[jk(a-a^\times)x] dx = \frac{-jk(a-a^\times)}{k^2(a-a^\times)^2 - \frac{l^2\pi^2}{X^2}} (-1 + (-1)^l \exp[jk(a-a^\times)X])$$

$$(15) \quad \int_0^X \sin \frac{l\pi x}{X} \exp[jk(a-a^\times)x] dx = \frac{\frac{l\pi}{X}}{k^2(a-a^\times)^2 - \frac{l^2\pi^2}{X^2}} (-1 + (-1)^l \exp[jk(a-a^\times)X])$$

Die anderen Integrale in y und z gehen aus diesen hervor, indem wir vertauschen:

$$\begin{aligned} l & \text{ mit } m \text{ bzw. } n \\ X & \text{ mit } Y \text{ bzw. } Z \\ a & \text{ mit } \beta \text{ bzw. } \gamma \\ a^\times & \text{ mit } \beta^\times \text{ bzw. } \gamma^\times. \end{aligned}$$

Es liefert jeweils das Produkt von 3 solchen Integralen ein Glied in der Strahlung, und zwar im HERTZschen Vektor $\vec{H}$ geschrieben. Das wirklich beobachtete E -Feld erhält man daraus durch Multiplikation mit $k^2 \sin \vartheta$; dieser Faktor ist dann immer jedem Produkt von 3 der obigen Integrale beizufügen. Wir sehen sofort, daß in den Stellen, an denen ein Nenner verschwindet, auch der Zähler Null wird. Dort nehmen die Integrale die folgenden Werte an:

Integral (12) wird X
 Integral (13) wird X
 Integral (14) wird $X/2$
 Integral (15) wird $jX/2$.

für $k(a - a^\times) \rightarrow l\pi/X$

Die Werte der anderen Integrale gehen aus diesen wieder durch die schon genannten Vertauschungen hervor.

Betrachten wir zunächst den HERTZschen Vektor $\vec{H}$, so sehen wir den von der FOURIER-Integration herrührenden Effekt des RIEMANN-LEBESGUESchen Lemmas: mit zunehmenden Werten von l, m, n nehmen die Integrale asymptotisch wie die negativen ersten oder zweiten Potenzen dieser Zahlen ab, wenn wir k , d. h. die Frequenz festhalten.

Ferner zeigen die trigonometrischen und Exponentialfunktionen im Zähler, daß bei zunehmender Frequenz das Richtdiagramm sich stark in einzelne Lappen aufspaltet. Es bleibt noch die Aufgabe, die Frequenzabhängigkeit dieser Integrale zu studieren, wenn wir, um E zu bekommen, noch die Produkte von 3 solchen mit k multiplizieren. Wir sehen die Abhängigkeit von Frequenz und Richtung dadurch miteinander verkoppelt, daß k nur in den Verbindungen $k(a - a^\times)$, $k(\beta - \beta^\times)$, $k(\gamma - \gamma^\times)$ vorkommt. Dies wird weiterhin noch zu einer interessanten Folgerung führen. Zunächst sehen wir aber, daß ein Produkt aus drei nicht verschwindenden der obigen Integrale, auch wenn es mit k^2 multipliziert ist, mit k auf alle Fälle verschwinden muß. Dabei werden die oben angegebenen Werte O/O und Maxima und Minima durchlaufen.

III. DIE STATISTISCHE VERTEILUNG DES GESTREUTEN FELDES

A. DIE ÄQUIPHASEN EBENEN IM FALLE EINES SENDERS UND EINES EMPFÄNGERS

Haben wir einen Sender und einen Empfänger, die so weit von der Störzone entfernt sind, daß wir nach dem obigen Verfahren mit ebenen Wellen rechnen dürfen, so sieht man leicht, daß unendlich dünne Schichten, die parallel zur Halbierenden des aus Einfalls- und Empfangsrichtung gebildeten Winkels und senkrecht zu der aus diesen beiden Richtungen gebildeten Ebene liegen, eine gleichphasige Strahlung zum Empfänger senden. In (Abb. 3) sei die Zeichenebene diese Ebene aus den Geraden: Sender – Bezugspunkt in der Störzone und Bezugspunkt – Empfänger. Wir wählen die Koordinaten so, daß diese Zeichenebene die xy -Ebene wird, und zwar so, daß die x -Achse die genannte Winkelhalbierende wird. Die z -Achse stehe senkrecht zur Zeichenebene. Man sieht nun elementargeometrisch unmittelbar ein, daß die Winkel AOC , COB , $A'O'C$, $CO'B'$, $COB = \arccos a = \arccos a^\times$ sind. Somit ist das Dreieck ODO' gleichschenkelig, und die Gangunterschiede $OE' = O'E$ sind gleich. D. h. die xz -Ebene strahlt gleichphasig zum Empfänger, oder besser gesagt: ein Stück der xz -Ebene, dessen Abmessungen sehr klein sind gegenüber R und R' . Für die Richtungscosinus gilt dann die Beziehung

$$(16) \quad a = a^\times, \quad \beta = -\beta^\times, \quad \gamma = \gamma^\times = 0.$$

Damit wird, abgesehen von den Faktoren $1/RR' \exp [-jk(R+R')]$, die am Empfänger ankommende Strahlung in $\vec{H}$ geschrieben:

$$(17) \quad \vec{H} = \frac{I}{4\pi\epsilon_1} \iiint_{\text{Störzone}} \Delta\epsilon(x, y, z) \exp [jk((\alpha - \alpha^\times)x + (\beta - \beta^\times)y + (\gamma - \gamma^\times)z)] dx dy dz.$$

Dies wird mit (16)

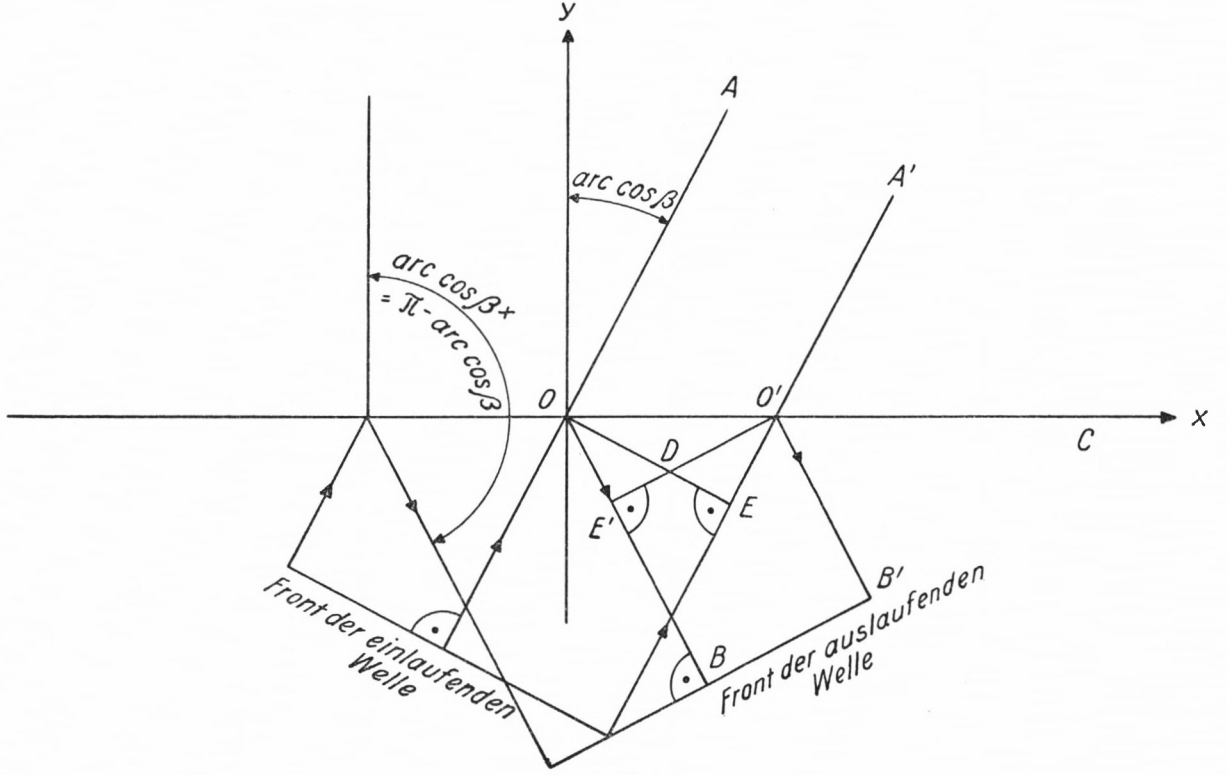


Abb. 3

$$(18) \quad \vec{H} = \frac{1}{4\pi\epsilon_1} \iiint_{\text{Störzone}} \Delta\epsilon(x, y, z, t) \exp [-j2k\beta^\times y] dx dy dz.$$

Hier wählen wir die unmittelbar einleuchtende Bezeichnung:

$$(19) \quad \iint_{\substack{\text{Ebene in} \\ \text{Störzone}}} \Delta\epsilon(x, y, z, t) dx dz = \bar{\Delta}^{\times z}\epsilon(y, t),$$

dann bekommen wir:

$$(20) \quad \vec{H} = \frac{1}{4\pi\epsilon_1} \iint_{\substack{\text{Störzone} \\ (y\text{-Achse)}}} \bar{\Delta}^{\times z}\epsilon(y, t) \exp [-j2k\beta^\times y] dy.$$

Die Richtung des Vektors $\vec{H}$ ist dabei nach (Abb. 2) zu bestimmen. Wenn wir das empfangene $\vec{H}$ in Abhängigkeit von $2k\beta^x$ betrachten, so sehen wir, daß wir die FOURIER-Transformierte der Mittel der zur xz -Ebene parallelen Schichten in $\bar{A}^{xz}_\varepsilon(y)$ beobachten. k ist dabei $2\pi/\lambda$, wobei λ die Wellenlänge in der ungestörten Atmosphäre ist.

B. DIE STATISTISCHE VERTEILUNG DES EMPFANGSFELDES

Wir denken uns jetzt die Störzone in eine sehr große Anzahl sehr dünner unter sich zur xz -Ebene paralleler Schichten zerlegt. Das Schichtenmittel $\bar{A}^{xz}_\varepsilon(y)$ ist abhängig von y und t , und wir denken es uns als einen sich zeitlich entwickelnden stochastischen Prozeß.

Zunächst jedoch sehen wir von der zeitlichen Entwicklung ab. Wir denken uns also eine sehr große Zahl von solchen Schichtungen realisiert, so daß zu jedem y -Wert eine Häufigkeitsfunktion für $\bar{A}^{xz}_\varepsilon(y)$ gehört. Weiterhin denken wir uns dann als nächste Stufe eine N -te Häufigkeitsfunktion der $\Delta\varepsilon$ -Mittelwerte der N -Schichten gegeben, wobei für N keine obere Schranke existieren soll. Nachher denken wir uns den Prozeß zeitlich ergodisch und stationär, so daß wir nacheinander eine große Zahl von Zeitmomenten herausgreifen, für jeden das $\bar{A}^{xz}_\varepsilon(y)$ angeben und so die aufeinanderfolgenden Phasen des Prozesses als seine Realisierungen betrachten, aus denen wir die Häufigkeitsfunktionen entnehmen. In [2] hatten wir schon gesehen, daß diese Verteilungen GAUSS-LAPLACEisch sein müssen.

Wenn wir dann aus unserer Kenntnis der Verteilungen der Schichtmittel heraus die Verteilungen des Integrals (20) berechnen, so bekommen wir damit die Verteilungen des Fadings, da (20) abhängig von der Zeit einfach das Empfangsfeld in seiner zeitlichen Variation also das „Fading“ darstellt. Wir können dabei noch mit annehmen, daß das Empfangsfeld von einem vom Sender dem Empfänger zugeführten Dauerfeld überlagert wird. Es wird sich nämlich herausstellen, daß Schlüsse aus dem Fading auf $\bar{A}^{xz}_\varepsilon(y, t)$ nur möglich sein werden, wenn man das Streufeld nach Größe und Phase betrachtet. Dabei liefern die folgenden Rechnungen beide Größen.

1. DIE ERSTE HÄUFIGKEITSFUNKTION DES GESTREUTEN FELDES

a) Allgemein

Wir müssen nun die erste Häufigkeitsfunktion des komplexen Wertes von (20) ermitteln. Jede der N Elementarschichten liefert uns einen Elementarvektor, der gegenüber einem Anfangsvektor eine zeitliche Phasenverschiebung hat. Wir haben die Häufigkeitsfunktion der Summe dieser Elementarvektoren zu ermitteln. „Vektoren“ heißt hier: räumlich haben alle diese Vektoren $\vec{H}$ dieselbe Richtung, zeitlich sind sie gegeneinander phasenverschoben. Wir nehmen nun an, daß die Störzone einen Bereich von y_1 bis y_2 längs der y -Achse erfüllt. Um nun die Häufigkeitsfunktion des Integrals (20) ermitteln zu können, gehen wir auf die Definition des Integrals im RIEMANNschen Sinn zurück und zerlegen, wie bereits mehrfach erwähnt, die Störzone in N Schichten, die so dünn sind, daß ihre Dicke projiziert auf Einfalls- und Empfangsrichtung sehr klein gegenüber der Wellenlänge sei. Die Anfangs-

phase, d. h. die Phase der Schicht in y , wo die Störzone beginnt, nehmen wir als reell an. $\exp[-jk(R+R')]$ lassen wir weg, was einfach einer willkürlichen Wahl des Zeitnullpunktes gleichkommt, zu der wir berechtigt sind. Wir können auch so sagen: den von der Schicht in y_1 kommenden Vektor nehmen wir als reell an. Dann ist der aus der 2. Schicht oberhalb y kommende gegenüber dem 1. um einen Winkel in der Phase nacheilend verschoben, den wir $d\varphi$ nennen wollen. Nehmen wir alle Schichten gleich dick an, dann ist der Vektor der 3. Schicht um $2d\varphi$ gegenüber dem ersten verschoben, allgemein der Vektor der n -ten Schicht um $(n-1)d\varphi$. Die Beträge dieser in ihrer Phase festliegenden Vektoren sollen Häufigkeitsfunktionen unterliegen, die noch voneinander abhängen sollen. Dann haben wir also die Häufigkeitsfunktion der Summe von N 2-dimensionalen (reelle und imaginäre Komponente) Vektoren zu finden, deren gegenseitige Phasenlagen oben bestimmt sind. Die Phase des zur Schicht in y gehörigen Vektors ist $-2k\beta^x y$ nach (20).

Zur Auffindung dieser Summenverteilung bedienen wir uns der MARKOFFSchen Methode, die in [5] von CHANDRASEKHAR eingehend dargestellt ist. Wir nennen den Vektor der i -ten Schicht Φ_i . In Darstellung seiner 2 Phasenkomponenten

$$(21) \quad \Phi_i = (\Phi_i^r, \Phi_i^i) = (\Phi_i^1, \Phi_i^2).$$

Die oberen Indizes r und i bedeuten wie 1 und 2 die reelle und imaginäre Komponente. Dann wird

$$(22) \quad \Phi_1 = (\Phi_1^{(1)}, 0),$$

$$(23) \quad \Phi_i^{(1)} = \pm |\Phi_i| \cos(i-1)d\varphi, \quad \Phi_i^{(2)} = \pm |\Phi_i| \sin(i-1)d\varphi,$$

wobei $|\Phi_i|$ noch mit einem negativen oder positiven Zeichen versehen sein kann. Wenn wir von der von der Lage in y herrührenden Gangphase absehen, kann $\bar{\Delta}^{\varepsilon\varepsilon}(y)$ an der Stelle y positiv und negativ sein, und Φ_i ist einfach

$$(24) \quad \Phi_i = \frac{1}{4\pi\varepsilon_1} \bar{\Delta}^{\varepsilon\varepsilon}(y_i) dy.$$

Nun sollen die Größen Φ_i noch folgenden Häufigkeitsfunktionen unterworfen sein:

$$(25) \quad \begin{aligned} \Phi_1 : \tau_1(\Phi_1), \quad \Phi_2 : \tau_2(\Phi_2 | \Phi_1) \\ = \text{bedingte Häufigkeitsfunktion} \\ \Phi_3 : \tau_3(\Phi_3 | \Phi_2, \Phi_1) \dots \\ \Phi_N : \tau_N(\Phi_N | \Phi_{N-1}, \Phi_{N-2} \dots \Phi_3, \Phi_2, \Phi_1). \end{aligned}$$

Bezeichnen wir mit X die reelle Komponente des Summenvektors, so gilt:

$$(26) \quad X = \sum_{i=1}^N \Phi_i^{(1)} = \sum_{i=1}^N \pm |\Phi_i| \cos(i-1)d\varphi.$$

Bedeutet Y die imaginäre Komponente, so ist

$$(27) \quad Y = \sum_{i=1}^N \Phi_i^{(2)} = \sum_{i=1}^N \pm |\Phi_i| \sin(i-1)d\varphi.$$

Nun haben wir dabei aber noch folgendes zu beachten: Die Häufigkeitsfunktion einer sicheren Größe, die als Grenzfall einer Zufallsgröße gedacht werden kann, bei der beliebig kleine Abweichungen vom Mittelwert die Wahrscheinlichkeit Null haben, ist einfach die DIRACsche Zackenfunktion. Dies ergibt in unserem Fall folgendes:

Es sei $\tau_i(\Phi_i | \Phi_{i-1} \dots \Phi_1)$ die Häufigkeitsfunktion für Φ_i . Wenn nun aber die reelle Komponente von Φ_i den Faktor $\cos(i-1) d\varphi$ hat, so bekommen wir nach [6] S. 167 für $\Phi_i \cos(i-1) d\varphi$ die Häufigkeitsfunktion

$$(28) \quad \frac{\tau_i}{\cos(i-1) d\varphi} \left(\frac{\Phi_i^{(1)}}{\cos(i-1) d\varphi} \left| \frac{\Phi_{i-1}^{(1)}}{\cos(i-2) d\varphi}, \frac{\Phi_{i-2}^{(1)}}{\cos(i-3) d\varphi} \dots \Phi_1^{(1)} \right. \right).$$

Unterliegt also Φ_i der Häufigkeitsfunktion $\tau_i(\Phi_i | \Phi_{i-1} \dots \Phi_1)$, so unterliegt seine reelle Komponente $\Phi_i \cos(i-1) d\varphi$ der Häufigkeitsfunktion (28).

Ist aber Φ_i und $\Phi_i \cos(i-1) d\varphi$ einmal gegeben, so liegt seine Imaginärkomponente $\Phi_i \sin(i-1) d\varphi$ als sichere Größe fest; es ist

$$(29) \quad \begin{aligned} \Phi_i \sin(i-1) d\varphi &= \Phi_i \cos(i-1) d\varphi \cdot \operatorname{tg}(i-1) d\varphi \\ &= \Phi_i^{(1)} \operatorname{tg}(i-1) d\varphi, \end{aligned}$$

das heißt aber, daß die bedingte Häufigkeitsfunktion von $\Phi_i^{(2)}$ unter der Voraussetzung eines gegebenen Wertes von $\Phi_i^{(1)}$ die Form hat:

$$(30) \quad \delta(\Phi_i^{(2)} - \Phi_i^{(1)} \operatorname{tg}(i-1) d\varphi),$$

wo δ die DIRACsche Zackenfunktion bedeutet. Mit $A_N(\varrho_1, \varrho_2)$ bezeichnen wir dann wie CHANDRASEKHAR die charakteristische Funktion = FOURIER-Transformierte der ersten Häufigkeitsfunktion $W_N(X, Y)$, worin der Index N die Summierung über N -Schichten bedeutet. Dies schreibt sich folgendermaßen:

$$(31) \quad W_N(X, Y) dX dY = \frac{dX dY}{4\pi^2} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} A_N(\varrho_1, \varrho_2) \exp[-j(\varrho_1 X + \varrho_2 Y)] d\varrho_1 d\varrho_2.$$

Die Größe $A_N(\varrho_1, \varrho_2)$ erhält man durch eine einfache Anwendung der bei CHANDRESEKHAR dargestellten Methode:

$$(32) \quad \begin{aligned} A_N(\varrho_1, \varrho_2) &= \int_{-\infty}^{+\infty} \dots \int_{-\infty}^{+\infty} d\Phi_1^{(1)} d\Phi_2^{(1)} d\Phi_2^{(2)} \dots d\Phi_N^{(1)} d\Phi_N^{(2)} \times \\ &\quad \times \left\{ \exp \left[j \left\{ \varrho_1 \sum_{i=1}^N \Phi_i^{(1)} + \varrho_2 \sum_{i=1}^N \Phi_i^{(2)} \right\} \right] \prod_{i=1}^N \frac{\tau_i}{\cos(i-1) d\varphi} \left(\frac{\Phi_i^{(1)}}{\cos(i-1) d\varphi} \left| \dots \Phi_1^{(1)} \right. \right) \right. \\ &\quad \times \left. \prod_{i=2}^N \delta(\Phi_i^{(2)} - \Phi_i^{(1)} \operatorname{tg}(i-1) d\varphi) \right\}. \end{aligned}$$

Die Integration nach den $\Phi_i^{(2)}$ können wir sofort ausführen:

¹ Wir schreiben Φ_i von jetzt an für den pos. oder neg. Wert von $\pm |\Phi_i|$.

$$(33) \quad A_N(\varrho_1, \varrho_2) = \int_{-\infty}^{+\infty} \dots \int_{-\infty}^{+\infty} d\Phi_1^{(1)} \dots d\Phi_N^{(1)} \exp \left[j \left[\varrho_1 \sum_{i=1}^N \Phi_i^{(1)} + \varrho_2 \sum_{i=1}^N \Phi_i^{(1)} \operatorname{tg}(i-1) d\varphi \right] \right] \times \\ \times \frac{1}{\prod_{i=1}^N \cos(i-1) d\varphi} \tau \left(\frac{\Phi_1^{(1)}}{\cos d\varphi}, \dots, \frac{\Phi_N^{(1)}}{\cos(N-1) d\varphi} \right),$$

wo nach dem Satz der verbundenen Wahrscheinlichkeit τ für das Produkt der τ_i steht. $\tau(\Phi_1, \dots, \Phi_N)$ ist die Häufigkeitsfunktion N -ter Ordnung für die von dem 1., 2., ..., N -ten Schichtmittel herrührenden Vektoren, die einfach gleich $1/4\pi\epsilon_1$ mal den Werten dieser Schichtmittel sind.

b) Spezialisierung auf den GAUSS-LAPLACESchen Fall

Wir hatten in [2] gesehen, daß die τ_i GAUSS-LAPLACESchen Charakter haben müssen, und wollen deshalb solche Häufigkeitsfunktionen für die τ_i einsetzen. Nach CRAMÉR [6] wählen wir dabei folgende Bezeichnungen:

$$(34) \quad m_i = \text{Mittelwert von } \Phi_i$$

$$(35) \quad \lambda_{ii} = \sigma_{ii}^2 = E(\Phi_i - m_i)^2,$$

wo E die „Erwartung“ bedeutet. Allgemein schreiben wir:

$$(36) \quad \lambda_{ik} = E((\Phi_i - m_i)(\Phi_k - m_k)).$$

Dann wird im GAUSS-LAPLACESchen Falle die charakteristische Funktion, also die FOURIER-Transformierte von $\tau(\Phi_1, \dots, \Phi_N)$ ([6] S. 311 $\varphi(t_1, \dots, t_N)$)

$$(37) \quad \varphi(\vec{t}) = \exp \left[-\frac{1}{2} \sum_{i,k=1}^N \lambda_{ik} t_i t_k \right] \exp \left[j \sum_{i=1}^N m_i t_i \right]$$

$\vec{t} = (t_1, \dots, t_N)$ bedeutet den Vektor mit den Komponenten $t_1, \dots, t_N$. Wir bezeichnen nun mit

$$(38) \quad A = \begin{pmatrix} \lambda_{11} & \dots & \lambda_{1N} \\ \vdots & & \vdots \\ \lambda_{N1} & \dots & \lambda_{NN} \end{pmatrix}$$

die Momentenmatrix der Verteilung mit $\lambda_{ik} = \lambda_{ki}$, die also symmetrisch ist und mit A_{ik} das algebraische Komplement (= den Cofaktor) von λ_{ik} in $|A|$ = Determinante der λ_{ik} . Dann erhält man nach CRAMÉR [6] für die Verteilung der Φ_i

$$(39) \quad \tau(\Phi) = \tau(\Phi_1, \dots, \Phi_N) = \frac{1}{(2\pi)^{N/2}} \frac{1}{V|A|} \exp \left[-\frac{1}{2|A|} \sum_{i,k=1}^N A_{ik} (\Phi_i - m_i)(\Phi_k - m_k) \right].$$

Die Funktion (39) ist, wie in [6] S. 118/119 gezeigt ist, die FOURIER-Transformierte von $\varphi(t)$ in (37). Mit diesen Voraussetzungen wollen wir jetzt die 1. Verteilung von X ; Y im

GAUSS-LAPLACESchen Fall berechnen. Wir beziehen uns dabei auf [6] S. 162, 166 ff. Aus der Verteilung der Φ_i in (39) ermitteln wir jetzt die Verteilung der reellen Komponenten der zu addierenden Vektoren. Für

$$\frac{1}{\prod_{n=1}^{N-1} \cos n d\varphi} \tau \left(\Phi_1^{(1)}, \frac{\Phi_2^{(1)}}{\cos \varphi d\varphi}, \frac{\Phi_3^{(1)}}{\cos 2 d\varphi}, \dots, \frac{\Phi_N^{(1)}}{\cos (N-1) d\varphi} \right)$$

erhalten wir dann im GAUSS-LAPLACESchen Fall:

$$(40) \quad \frac{1}{\prod_{n=1}^{N-1} \cos n d\varphi} \frac{1}{(2\pi)^{N/2} \sqrt{|A|}} \exp \left[-\frac{1}{2|A|} \sum_{i,k=1}^N A_{ik} \frac{(\Phi_i^{(1)} - m_i \cos (i-1) d\varphi)}{\cos (i-1) d\varphi} \times \right. \\ \left. \times \frac{(\Phi_k^{(1)} - m_k \cos (k-1) d\varphi)}{\cos (k-1) d\varphi} \right].$$

Damit wird die FOURIER-Transformierte der Häufigkeitsfunktion $A_N(\varrho_1, \varrho_2)$:

$$(41) \quad A_N(\varrho_1, \varrho_2) = \int_{-\infty}^{+\infty} \dots \int_{-\infty}^{+\infty} d\Phi_1^{(1)} \dots d\Phi_N^{(1)} \exp \left[j \left\{ \varrho_1 \sum_{i=1}^N \Phi_i^{(1)} + \varrho_2 \sum_{i=1}^N \Phi_i^{(1)} \operatorname{tg} (i-1) d\varphi \right\} \right] \times \\ \times \frac{1}{\prod_{n=1}^{N-1} \cos n d\varphi} \frac{1}{(2\pi)^{N/2}} \frac{1}{\sqrt{|A|}} \times \exp \left[-\frac{1}{2} \sum_{i,k=1}^N \frac{A_{ik}}{|A|} \frac{(\Phi_i^{(1)} - m_i \cos (i-1) d\varphi)}{\cos (i-1) d\varphi} \times \frac{(\Phi_k^{(1)} - m_k \cos (k-1) d\varphi)}{\cos (k-1) d\varphi} \right].$$

Dieses FOURIER-Integral werten wir jetzt in der bei CRAMÉR [6] S. 118/19 angegebenen Weise aus. Wir schreiben zu diesem Zwecke:

$$(42) \quad \exp \left[j \left\{ \varrho_1 \sum_{i=1}^N \Phi_i^{(1)} + \varrho_2 \sum_{i=1}^N \Phi_i^{(1)} \operatorname{tg} (i-1) d\varphi \right\} \right] = \\ = \exp [j \{ \Phi_1^{(1)} \varrho_1 + \Phi_2^{(1)} (\varrho_1 + \varrho_2 \operatorname{tg} d\varphi) + \Phi_3^{(1)} (\varrho_1 + \varrho_2 \operatorname{tg} 2 d\varphi) \dots \\ \dots + \Phi_N^{(1)} (\varrho_1 + \varrho_2 \operatorname{tg} (N-1) d\varphi) \}] = \exp \left[j \sum_{i=1}^N \Phi_i^{(1)} (\varrho_1 + \varrho_2 \operatorname{tg} (i-1) d\varphi) \right]$$

und führen die Bezeichnung ein:

$$(43) \quad \varrho_1 + \varrho_2 \operatorname{tg} v d\varphi = \psi_v.$$

Ferner nennen wir die quadratische Form im Exponenten von (41)

$$(44) \quad -\frac{1}{2} \sum_{i,k=1}^N \frac{A_{ik}}{|A|} \frac{(\Phi_i^{(1)} - m_i \cos (i-1) d\varphi)}{\cos (i-1) d\varphi} \frac{(\Phi_k^{(1)} - m_k \cos (k-1) d\varphi)}{\cos (k-1) d\varphi} \\ = -\frac{1}{2} Q^{-1} \left(\frac{(\Phi_i^{(1)} - m_i \cos (i-1) d\varphi)}{\cos (i-1) d\varphi} \frac{(\Phi_k^{(1)} - m_k \cos (k-1) d\varphi)}{\cos (k-1) d\varphi} \right).$$

Wir schreiben Q^{-1} deswegen, weil diese Form die reziproke der Form mit der Matrix (λ_{ik}) ist. Dann wird mit [6] S. 118/119 und S. 311 die charakteristische Funktion der gesuchten 1. Häufigkeitsfunktion von X, Y :

$$\begin{aligned}
 (45) \quad A_N(\varrho_1, \varrho_2) &= \frac{1}{\prod_{n=1}^N \cos n d \varphi} \frac{1}{(2\pi)^{\frac{N}{2}}} \cdot \frac{1}{V|A|} \int_{-\infty}^{+\infty} \dots \int_{N \text{ fach}} \exp \left[j \sum_{i=0}^{N-1} \Phi_{i+1}^{(1)} \psi_i \right] \times \\
 &\times \exp \left[-\frac{1}{2} Q^{-1} \right] d\Phi_1^{(1)} \dots d\Phi_N^{(1)} = \\
 &= \exp \left[-\frac{1}{2} \sum_{i,k=1}^N \cos(i-1) d\varphi \cos(k-1) d\varphi \lambda_{ik} (\varrho_1 + \varrho_2 \operatorname{tg}(i-1) d\varphi) \times \right. \\
 &\times \left. (\varrho_1 + \varrho_2 \operatorname{tg}(k-1) d\varphi) \exp \left[j \sum_{i=1}^N m_i \cos(i-1) d\varphi (\varrho_1 + \varrho_2 \operatorname{tg}(i-1) d\varphi) \right] \right].
 \end{aligned}$$

Wir ordnen jetzt die quadratische Form im Exponenten nach ϱ_1, ϱ_2 um, indem wir schreiben:

$$\begin{aligned}
 (46) \quad &(\varrho_1 + \varrho_2 \operatorname{tg}(i-1) d\varphi) (\varrho_1 + \varrho_2 \operatorname{tg}(k-1) d\varphi) = \\
 &\varrho_1^2 + \varrho_2^2 \operatorname{tg}(i-1) d\varphi \operatorname{tg}(k-1) d\varphi + \varrho_1, \varrho_2 (\operatorname{tg}(i-1) d\varphi + \operatorname{tg}(k-1) d\varphi).
 \end{aligned}$$

Also wird:

$$\begin{aligned}
 (47) \quad A_N(\varrho_1, \varrho_2) &= \exp \left[j \left(\varrho_1 \sum_{i=1}^N m_i \cos(i-1) d\varphi + \varrho_2 \sum_{i=1}^N m_i \sin(i-1) d\varphi \right) \times \right. \\
 &\times \exp \left[-\frac{1}{2} \left\{ \varrho_1^2 \sum_{i,k=1}^N \lambda_{ik} \cos(i-1) d\varphi \cos(k-1) d\varphi \right. \right. \\
 &+ \varrho_2^2 \sum_{i,k=1}^N \lambda_{ik} \sin(i-1) d\varphi \sin(k-1) d\varphi \\
 &\left. \left. + \varrho_1 \varrho_2 \sum_{i,k=1}^N \lambda_{ik} \cos(i-1) d\varphi \cos(k-1) d\varphi (\operatorname{tg}(i-1) d\varphi + \operatorname{tg}(k-1) d\varphi) \right\} \right].
 \end{aligned}$$

Um nun die Häufigkeitsfunktion zu finden, müssen wir $A_N(\varrho_1, \varrho_2)$ nach FOURIER invertieren. Nun wissen wir aber aus [6] S. 118/119, daß hier eine GAUSS-LAPLACESche Verteilung entsteht, deren quadratische Form im Exponenten die reziproke Form der Form in (47) ist, und deren beide Variablen dann $(X - \bar{X})$ und $(Y - \bar{Y})$ sind, wobei $\bar{X}, \bar{Y}$ die Mittelwerte von X und Y bedeuten. Die Matrix der 2. Momente dieser Häufigkeitsfunktion ist ja gerade die aus (47) ersichtliche Matrix der Form, deren Variable ϱ_1 und ϱ_2 sind. Nun erinnern wir uns aber, daß wir unsere Summenverteilung als die Verteilung der Näherung eines Integrals angeschrieben haben. Es erscheint zweckmäßig, jetzt wieder zum Continuum überzugehen, indem wir die Summen in (47) in Integrale überführen. Wir haben in diesen Summen insofern eine Kontrolle unserer Rechnungen, als ja die Mittelwerte der Summe gleich der Summe der Mittelwerte sein müssen und ebenso die Summe der Abweichungsquadrate gleich dem Abweichungsquadrat der Summe.

Zum Zwecke des Übergangs zum Integral führen wir die folgenden beiden kontinuierlichen Variablen ein:

$$(48) \quad \frac{i-1}{N} = \nu, \quad \frac{k-1}{N} = \mu, \quad \left(0 \leq \nu < 1 \right).$$

Dazu bemerken wir folgendes:

Wir legen den Anfang der Störzone nach $y = 0$, ihre Höhe sei Y ; dann haben wir bei N Schichten je Schicht die Dicke Y/N ; der Phasenwinkel der i -ten Schicht ist nach (20) $-2 k \beta^\times (i-1) Y/N$, also ist mit (48) dieser Winkel:

$$(49) \quad (i-1) \Delta \varphi = -2 k \beta^\times v Y.$$

Wenn wir etwa die Summe der Mittelwerte = Mittelwert der Summe als Integral berechnen, so haben wir in v von 0 bis 1 zu integrieren. Ferner: λ_{ik} ist die Covarianz zwischen der i -ten und k -ten Schicht, also zwischen $k/N \cdot Y$ und $i/N \cdot Y$, also mit $N \rightarrow \infty$ zwischen $v Y$ und μY . Dann wird:

$$(50) \quad \sum_{i=1}^N m_i \frac{\cos}{\sin} (i-1) d\varphi \rightarrow \int_{v=0}^{v=1} m(v Y) \frac{\cos}{\sin} (-2 k \beta^\times v Y) d v Y \\ = M_1 \text{ im Cosinusfall} \\ = M_2 \text{ im Sinusfall.}$$

Ferner wird:

$$(51) \quad \sum_{i=1}^N \sum_{k=1}^N \lambda_{ik} \sin (i-1) d\varphi \sin (k-1) d\varphi = a_{22} \\ \rightarrow \int_{v=0}^1 \int_{\mu=0}^1 \sin (\mu 2 k \beta^\times Y) \sin (v 2 k \beta^\times Y) C(v Y, \mu Y) \sigma(\mu Y) \sigma(v Y) d \mu Y d v Y,$$

worin wir in üblicher Symbolik schreiben:

$$(52) \quad \lambda_{ik} = c_{ik} \sigma_i \sigma_k \\ c_{ik} = \text{Korrelationskoeffizient} \\ \sigma_i^2 = \text{Mittlere Schwankungsquadrate.} \\ \sigma_k^2 =$$

Analog haben wir:

$$(53) \quad \sum_{i=1}^N \sum_{k=1}^N \lambda_{ik} \cos (i-1) d\varphi \cos (k-1) d\varphi = a_{11} \\ \rightarrow \int_{v=0}^1 \int_{\mu=0}^1 \cos (v 2 \beta^\times k Y) \cos (\mu 2 k \beta^\times Y) c(\mu Y, v Y) \sigma(\mu Y) \sigma(v Y) d \mu Y d v Y$$

und:

$$(54) \quad \sum_{i=1}^N \sum_{k=1}^N \lambda_{ik} \cos (i-1) d\varphi \cos (k-1) d\varphi (\operatorname{tg} (i-1) d\varphi + \operatorname{tg} (k-1) d\varphi) \\ = 2 a_{12} \rightarrow \int_{v=0}^1 \int_{\mu=0}^1 c(\mu Y, v Y) \sigma(\mu Y) \sigma(v Y) \sin [(\mu + v) 2 k \beta^\times Y] d \mu Y d v Y.$$

Dann lautet die charakteristische Funktion für

$$W(X, Y) = \lim_{N \rightarrow \infty} W_N(X; Y)$$

$$(55) \quad \varphi(t_1, t_2) = \exp[j(M_1 t_1 + M_2 t_2)] \times \exp\left[-\frac{1}{2}(a_{11} t_1^2 + a_{22} t_2^2 + 2a_{12} t_1 t_2)\right].$$

Wir verweisen darauf, daß die Variablen t_1, t_2 keinerlei Zeiten bedeuten. Die Häufigkeitsfunktion $W(X, Y)$ wird dann nach [6] S. 118/19 mittels FOURIER-Inversion:

$$(56) \quad W(X, Y) = \frac{2\pi}{\sqrt{A}} \exp\left[-\frac{1}{2}(A_{11}(X-M_1)^2 + A_{22}(Y-M_2)^2 + 2A_{12}(X-M_1)(Y-M_2))\right],$$

wo

$$(57) \quad A = \text{Det} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \quad \text{mit } a_{12} = a_{21}$$

und

$$A_{11} = \frac{a_{22}}{A}, \quad A_{22} = \frac{a_{11}}{A}, \quad A_{12} = -\frac{a_{12}}{A} \quad \text{ist.}$$

Damit haben wir die erste Verteilung angegeben und müssen nun die Abhängigkeit ihrer Kenngrößen von ω und $\beta^\times$, also von k und $\beta^\times$ studieren. Die Kenngrößen sind aber die Mittelwerte und die zweiten Momente. Nun hängen alle diese Größen nur von dem Produkt $k\beta^\times$ ab. Wir nehmen einmal 2 Werte k und 2 Werte $\beta^\times$ so an, daß

$$(58) \quad k_1 \beta_1^\times = k_2 \beta_2^\times \quad \text{sei.}$$

Dann müssen die Kenngrößen des Streufeldes für die beiden Fälle dieselben sein. Wir hatten früher schon auf diese Proportionalitäten hingewiesen, die auch jede kausale Betrachtung des Streufeldes regiert und a fortiori dann für die statistische Betrachtung gilt.

Weiterhin: M_1 und M_2 sind bei einem festen $k\beta^\times$ einfach beziehungsweise die FOURIER-Cosinus- oder FOURIER-Sinustransformierte von $m(\nu Y)$. Lassen wir k von 0 bis ∞ laufen, bei festem $\beta^\times \neq 0$, so bekommen wir einfach die FOURIER-Transformierte (sin oder cos) von $m(\nu Y)$ im Intervall $0 \div \infty$. Die Bedeutung dieser Tatsache für eine Analyse der Störzone soll in einer weiteren Arbeit untersucht werden. Wir haben jetzt die Häufigkeitsfunktion für die beiden orthogonalen Komponenten X und Y angegeben. Wir wollen noch die Verteilung des Betrages $\sqrt{X^2 + Y^2} = B$ abhängig vom Phasenwinkel ermitteln.

Wir betrachten zunächst die quadratische Form im Exponenten und transformieren sie auf Polarkoordinaten R, Φ um den Mittelwert M_1, M_2 herum. Mit

$$(59) \quad X - M_1 = X'; \quad Y - M_2 = Y' \quad \text{und}$$

$$(60) \quad X' = R \cos \Phi; \quad Y' = R \sin \Phi; \quad R^2 = X'^2 + Y'^2$$

tg $\Phi = Y'/X'$ wird die quadratischen Form im Exponenten:

$$(61) \quad A_{11} R^2 \cos^2 \Phi + A_{22} R^2 \sin^2 \Phi + 2A_{12} R^2 \sin \Phi \cos \Phi =$$

$$= R^2/2 (A_{11} + A_{22} + \cos 2\Phi (A_{11} - A_{22}) + A_{12} 2 \sin 2\Phi).$$

Hier tritt die Phase nur in der Form 2Φ auf. Für $dX dY = dX' dY'$ setzen wir $R dR d\Phi$; dann wird die Häufigkeitsfunktion:

$$(62) \quad W(R, \Phi) R dR d\Phi = \frac{2\pi}{\sqrt{A}} \exp \left[-\frac{R^2}{4} (A_{11} + A_{22} + \cos 2\Phi (A_{11} - A_{22}) + 2A_{12} \sin 2\Phi) \right] R dR d\Phi.$$

2. DIE ZWEITE HÄUFIGKEITSFUNKTION

a) Allgemein

Im bisherigen waren wir folgendermaßen vorgegangen: Wir setzten eine große Anzahl aufeinanderfolgender Realisierungen einer Störzone voraus und berechneten die Häufigkeitsfunktion für die reelle und imaginäre Komponente des Streufeldes. Die aufeinanderfolgenden Realisationen der Störzone konnten wir uns auch so denken, daß wir dem zeitlichen Ablauf des Vorganges folgten. Wir nahmen dabei noch an, daß in dem von uns gewählten Zeitraum der Prozeß ergodisch und stationär war, wozu wir noch folgendes bemerken wollen: Man denkt sich eine große Anzahl solcher Prozesse ablaufen und beobachtet für jedes y die Schichtmittel kontinuierlich mit der Zeit, wobei der Zeitnullpunkt jedesmal der Anfangszeitpunkt des Prozesses sein soll; dann nimmt man für $t = 0, t = t_1, t = t_2, \dots, t = t_n$ (t immer auf den Anfang des Prozesses bezogen) aus einer sehr großen Zahl von solchen Prozessen die Häufigkeitsfunktionen der Schichtmittel auf. Wenn sich herausstellt, daß diese Häufigkeitsfunktionen in einem bestimmten Teilzeitintervall unabhängig von der Zeit sind, dann können wir in diesem Intervall die Mittel über die Realisierungen durch Zeitmittel ersetzen. Wir hatten die Häufigkeitsfunktion τ der Φ_i angegeben. Mittels

$$(63) \quad \Phi_i = \frac{1}{4\pi\epsilon_1} \int \int \int_{\substack{\text{Volumen} \\ \text{der } i\text{ten Schicht}}} \Delta\epsilon(x, y, z) dx dy dz \exp [j(i-1) d\varphi]$$

können diese Φ_i aus den $\Delta\epsilon$ -Schichtmitteln genommen werden. Die Häufigkeitsfunktion τ können wir uns auch in $(\bar{\Delta\epsilon})_i$ gegeben denken. Wir müßten eigentlich dieser Funktion in (33) noch den Parameter t beifügen, den wir aber unterdrücken konnten, wenn τ in dem betrachteten Intervall von t unabhängig wird. Wenn sich der Vorgang aus einem ungestörten Medium heraus entwickelt und später wieder verschwindet, so kann (vgl. [2]) ein solches stationäres Zeitintervall existieren. Auf dieses soll sich dann die obige GAUSS-LAPLACE-Verteilung beschränken. Wenn wir jetzt zu einer zweiten Häufigkeitsfunktion weiterschreiten, dürfen wir die Zeit nicht mehr unterdrücken, insofern, als wir uns die aufeinanderfolgenden Realisationen der Störzone als einen zeitlich ablaufenden Prozeß vorstellen, in dem eine zeitliche Korrelation existiert. Im Falle eines von 2. Ordnung stationären Prozesses darf dann die Korrelation nur von der Differenz der beiden ins Auge gefaßten Zeiten abhängen. Wir berechnen jetzt eine Häufigkeitsfunktion $W(X_1, Y_1, t_1; X_2, Y_2, t_2) dX_1 dY_1 dX_2 dY_2$, die von der Streuzone herrührt, die zunächst in N Schichten zerlegt werden möge, wobei später $N \rightarrow \infty$ gehen soll.

Wir schreiben die ϵ -Störung mittels (63) gleich in den Schichtmitteln Φ_i und müssen die Schichtmittel zur Zeit t_1 und t_2 unterscheiden. Die Verteilung der Schichtmittel zur Zeit t_2 soll auch noch von derjenigen zur Zeit t_1 abhängen, so daß die Verteilung zur Zeit t_2

also eine bedingte sein soll. Wir wollen soweit als möglich dieselben Symbole verwenden wie bei der ersten Verteilung, wollen aber die Zeiten t_1 und t_2 durch einen links unten stehenden Index andeuten: ${}_{t_1}\Phi_i^{(1)(2)}$, ${}_{t_2}\Phi_i^{(1)(2)}$, ${}_{t_1}\tau$. Dann führen wir in erweiterter Analogie zur ersten Verteilung die Häufigkeitsfunktionen ein:

$$(64) \quad \frac{{}_{t_2}\tau_i}{\cos(i-1)d\varphi} \left(\frac{{}_{t_1}\Phi_i^{(1)}}{\cos(i-1)d\varphi} \left| \frac{{}_{t_1}\Phi_{i-1}^{(1)}}{\cos(i-2)d\varphi}, \dots, \frac{{}_{t_1}\Phi_1^{(1)}}{\cos d\varphi} \right. \right); \quad i = 1, 2, \dots, N$$

und

$$(65) \quad \frac{{}_{t_2}\tau_i}{\cos(i-1)d\varphi} \left(\frac{{}_{t_1}\Phi_i^{(1)}}{\cos(i-1)d\varphi} \left| \frac{{}_{t_1}\Phi_{i-1}^{(1)}}{\cos(i-2)d\varphi}, \dots, \frac{{}_{t_1}\Phi_1^{(1)}}{\cos d\varphi}; \frac{{}_{t_1}\Phi_i^{(1)}}{\cos(i-1)d\varphi}, \frac{{}_{t_1}\Phi_{i-1}^{(1)}}{\cos(i-2)d\varphi}, \dots, \frac{{}_{t_1}\Phi_1^{(1)}}{\cos d\varphi} \right. \right) \quad i = 1, \dots, N,$$

wo also die Häufigkeitsfunktion zur Zeit t_2 noch von den Werten $\Phi_i^{(1)}$ zur Zeit t_1 mit abhängen soll, worin sich die zeitliche Correlation ausdrückt. Multiplizieren wir alle ${}_{t_1}\tau_i$ und ${}_{t_2}\tau_i$ ($i = 1 \dots N$) miteinander, so bekommen wir folgende Verteilungen:

$$(66) \quad \prod_{i=1}^N {}_{t_1}\tau_i = \frac{{}_{t_1}\tau}{\prod_{i=1}^N \cos(i-1)d\varphi} \left({}_{t_1}\Phi_1^{(1)}, \frac{{}_{t_1}\Phi_2^{(1)}}{\cos d\varphi}, \frac{{}_{t_1}\Phi_3^{(1)}}{\cos 2d\varphi}, \dots, \frac{{}_{t_1}\Phi_N^{(1)}}{\cos(N-1)d\varphi} \right)$$

$$(67) \quad \prod_{i=1}^N {}_{t_2}\tau_i = \frac{{}_{t_2}\tau}{\prod_{i=1}^N \cos(i-1)d\varphi} \left({}_{t_2}\Phi_1^{(1)}, \frac{{}_{t_2}\Phi_2^{(1)}}{\cos \varphi}, \dots, \frac{{}_{t_2}\Phi_N^{(1)}}{\cos(N-1)d\varphi}; {}_{t_1}\Phi_1^{(1)}, \frac{{}_{t_1}\Phi_2^{(1)}}{\cos d\varphi}, \dots, \frac{{}_{t_1}\Phi_N^{(1)}}{\cos(N-1)d\varphi} \right).$$

Dabei ist also (67) die bedingte Verteilung der Projektionen der Schichtmittelvektoren zur Zeit t_2 auf die reelle Achse unter Voraussetzung ihrer Werte zur Zeit t_1 . Bilden wir nun die Produkte der $2N$ Häufigkeitsfunktionen (je N zu den Zeiten t_1 und t_2), so bekommen wir die verbundene Gesamthäufigkeitsfunktion der $2N$ Vektoren ${}_{t_1}\Phi_i^{(1)}$, ${}_{t_2}\Phi_i^{(1)}$ ($i = 1 \dots N$)

$$(68) \quad \prod_{i=1}^N {}_{t_1}\tau_i {}_{t_2}\tau_i = \frac{1}{\left(\prod_{i=1}^N \cos(i-1)d\varphi \right)^2} \tau \left({}_{t_1}\Phi_1^{(1)}, \frac{{}_{t_1}\Phi_2^{(1)}}{\cos d\varphi}, \dots, \frac{{}_{t_1}\Phi_N^{(1)}}{\cos(N-1)d\varphi}, {}_{t_2}\Phi_1^{(1)}, \frac{{}_{t_2}\Phi_2^{(1)}}{\cos d\varphi}, \dots, \frac{{}_{t_2}\Phi_N^{(1)}}{\cos(N-1)d\varphi} \right).$$

Für die imaginären Komponenten, die bei gegebenen ${}_{t_1,t_2}\Phi_i^{(1)}$ einfach festliegen, haben wir wieder DIRAC-Funktionen als Häufigkeitsfunktionen:

Es ist nämlich

$$(69) \quad {}_{t_1}\Phi_i^{(2)} = {}_{t_1}\Phi_i^{(1)} \operatorname{tg}(i-1)d\varphi$$

$$(70) \quad {}_{t_2}\Phi_i^{(2)} = {}_{t_2}\Phi_i^{(1)} \operatorname{tg}(i-1)d\varphi$$

und die Häufigkeitsfunktionen der Imaginärkomponente unter Voraussetzung der Werte der reellen Komponenten werden:

$$(71) \quad \delta(\Phi_i^{(2)} - \Phi_i^{(1)} \operatorname{tg}(i-1) d\varphi)$$

und

$$(72) \quad \delta(\Phi_i^{(2)} - \Phi_i^{(1)} \operatorname{tg}(i-1) d\varphi).$$

Jetzt haben wir das Material zusammengestellt, das wir zur Ermittlung der 2. Häufigkeitsfunktion brauchten: Nach CHANDRASEKKAR (l. c.) schreiben wir:

$$(73) \quad W(X_1, Y_1, t_1; X_2, Y_2, t_2) dX_1 dY_1 dX_2 dY_2 = \frac{1}{(2\pi)^4} dX_1 dY_1 dX_2 dY_2 \times \\ \int_{\varrho_1=-\infty}^{+\infty} \int_{\varrho_2=-\infty}^{+\infty} \int_{\varrho_3=-\infty}^{+\infty} \int_{\varrho_4=-\infty}^{+\infty} A(\varrho_1, \varrho_2, \varrho_3, \varrho_4) \exp[-j(\varrho_1 X_1 + \varrho_2 Y_1 + \varrho_3 X_2 + \varrho_4 Y_2)] d\varrho_1 d\varrho_2 d\varrho_3 d\varrho_4$$

$$(74) \quad A(\varrho_1, \varrho_2, \varrho_3, \varrho_4) = \int_{\Phi_1^{(1)}=-\infty}^{+\infty} \dots \int_{\Phi_N^{(2)}=-\infty}^{+\infty} d\Phi_1^{(1)} d\Phi_2^{(1)} \dots d\Phi_N^{(1)} d\Phi_1^{(2)} \dots d\Phi_N^{(2)} d\Phi_1^{(1)} \dots d\Phi_N^{(1)} d\Phi_1^{(2)} \dots d\Phi_N^{(2)} \\ \times \prod_{i=1}^N (\tau_i \tau_i) \delta(\Phi_i^{(1)} - \Phi_i^{(1)} \operatorname{tg}(i-1) d\varphi) \delta(\Phi_i^{(2)} - \Phi_i^{(1)} \operatorname{tg}(i-1) d\varphi) \times \\ \exp[j(\varrho_1 \Phi_i^{(1)} + \varrho_2 \Phi_i^{(2)} + \varrho_3 \Phi_i^{(1)} + \varrho_4 \Phi_i^{(2)})].$$

In (32) hatten wir $\Phi_1^{(2)}$ weggelassen, weil es identisch Null ist nach Voraussetzung. In (74) lassen wir den Index in der Multiplikation von 1 bis N laufen auch für die Blindkomponenten: dann ist die Häufigkeitsfunktion von $\Phi_1^{(2)}$ als DIRAC-Funktion mit dem Maximum in $\Phi_1^{(2)} = 0$ anzusetzen. Die Integration nach den $\Phi_i^{(2)}$ und $\Phi_i^{(1)}$, die nur in solchen DIRAC-Funktionen erscheinen, können wir sofort ausführen: es wird also:

$$(75) \quad A(\varrho_1, \varrho_2, \varrho_3, \varrho_4) = \int_{\Phi_1^{(1)}=-\infty}^{+\infty} \dots \int_{\Phi_N^{(1)}=-\infty}^{+\infty} \prod_{i=1}^N d\Phi_i^{(1)} d\Phi_i^{(1)} \tau_i \tau_i \times \exp[j(\varrho_1 \Phi_i^{(1)} + \varrho_2 \Phi_i^{(1)} \operatorname{tg}(i-1) d\varphi \\ + \varrho_3 \Phi_i^{(1)} + \varrho_4 \Phi_i^{(1)} \operatorname{tg}(i-1) d\varphi)],$$

wobei das Produkt auch über die i in der Exponentialfunktion zu erstrecken ist und für $\tau_i \tau_i$ der Wert aus (68) eingesetzt zu denken ist.

Setzt man dieses $A(\varrho_1, \varrho_2, \varrho_3, \varrho_4)$ in (73) ein, so erhält man die gewünschte Häufigkeitsfunktion.

Damit haben wir also die 2. Häufigkeitsfunktion des Streufeldes bei N Schichten ermittelt. Den Übergang zur kontinuierlichen Schichtung ($N \rightarrow \infty$) wollen wir anschließend in dem GAUSS-LAPLACESchen Fall durchführen. Der vorliegende Ausdruck ermöglicht es, prinzipiell alle Momente der Verteilung, besonders die Matrix der Momente 2. Ordnung räumlich, zeitlich und raumzeitlich des gestreuten Feldes anzugeben (vgl. [6] S. 294 ff.).

b) GAUSS-LAPLACEScher Fall

Wir wollen ausgehen von einer GAUSS-LAPLACESchen Verteilung in den Schichtmitteln, von diesen dann zu den reellen und imaginären Komponenten übergehen.

Wir haben bei N Schichten zunächst $2N$ Variable: $_{t_1}\Phi_1, _{t_1}\Phi_2, \dots, _{t_1}\Phi_N; _{t_2}\Phi_1, _{t_2}\Phi_2, \dots, _{t_2}\Phi_N$, die für das Streufeld je eine reelle und eine imaginäre Komponente ergeben. Diese $2N$ Größen denken wir uns nach GAUSS-LAPLACE verteilt. Die Verteilung ist definiert durch die Mittelwerte und die Matrix der 2. Momente λ_{ik} . Um diese Matrix verständlicher zu machen, denken wir uns die obigen Größen $_{t_1}\Phi_1, \dots, _{t_1}\Phi_N, _{t_2}\Phi_1, \dots, _{t_2}\Phi_N$ der Reihe nach von 1 bis $2N$ durchnummeriert und nennen sie Ψ_i , $1 \leq i \leq 2N$ bedeutet dann ein Element, das der Zeit t_1 zugeordnet ist, $N+1 \leq i \leq 2N$ ein der Zeit t_2 zugeordnetes Element. Dementsprechend bedeutet λ_{ik}

- mit a) $1 \leq i \leq N; 1 \leq k \leq N, i \neq k$ eine Covarianz zwischen den Schichten i und k , beide für $t = t_1$
 $i = k$ einen quadratischen Mittelwert $t = t_1$
 b) $N+1 \leq i \leq 2N; N+1 \leq k \leq 2N, i \neq k$ eine Covarianz zwischen den Schichten i und k beide für $t = t_2$
 $i = k$ einen quadratischen Mittelwert, $t = t_2$
 c) $1 \leq i \leq N; N+1 \leq k \leq 2N$ eine Covarianz zwischen der Schicht i für $t = t_1$ und der Schicht k für $t = t_2$; ist $i = k - N$, so sind die beiden Schichten dieselben und λ_{ik} bedeutet eine zeitliche Covarianz für eine Schicht.
 d) $N+1 \leq i \leq 2N; 1 \leq k \leq N, i \neq k$ eine Covarianz zwischen einer Schicht zur Zeit t_2 und einer anderen zur Zeit t_1 in Analogie zu c).

Die charakteristische Funktion = FOURIER-Transformierte der Häufigkeitsfunktion setzt die Matrix λ_{ik} in Evidenz. In der Häufigkeitsfunktion haben wir $2N$ Variable, also ebenso viele in der charakteristischen Funktion: $\vec{t} = (t_1 \dots t_{2N})$.

Da wir die Mittelwerte m nicht notwendig gleich Null setzen wollen, so lautet die charakteristische Funktion unserer Häufigkeitsfunktion, die wir wieder in Φ_i , d. h. jetzt in Ψ_i schreiben an Stelle von $\overline{A\varepsilon}$

$$(76) \quad \varphi(\vec{t}) = \varphi(t_1, t_2 \dots t_{2N}) = \exp \left[j \sum_{i=1}^{2N} t_i m_i - \frac{1}{2} \vec{t}' A \vec{t} \right],$$

wo

$$(77) \quad \begin{aligned} \vec{t}' &= \text{Zeilenvektor mit den Komponenten } t_i && (\text{diese } t_i \text{ sind mit den Zeiten} \\ \vec{t} &= \text{Spaltenvektor mit den Komponenten } t_i && t_1 \text{ und } t_2 \text{ nicht in Beziehung}) \\ A &= \text{Covarianzmatrix mit den Elementen } \lambda_{ik} \end{aligned}$$

$\vec{t}' A \vec{t}$ ist dann in der üblichen Schreibweise die quadratische Form in der Matrix λ_{ik} . Dann wird wieder die Häufigkeitsfunktion selbst gegeben durch eine Exponentialfunktion in den Variablen $\Psi_i - m_i$ mit der zu A reziproken Matrix als Matrix der Form im Exponenten. Dann ist also die Häufigkeitsfunktion der Ψ_i ([6] S. 310/311)

$$(78) \quad \tau(\vec{\Psi}) = \tau(\Psi_1 \dots \Psi_{2N}) = \frac{1}{(2\pi)^N} \frac{1}{\sqrt{|A|}} \times \exp \left[-\frac{1}{2} \sum_{i,k=1}^{2N} \frac{A_{ik}}{|A|} (\Psi_i - m_i) (\Psi_k - m_k) \right],$$

wo A_{ik} das algebraische Komplement von λ_{ki} ist. Diese Häufigkeitsfunktion ist in Ψ_i geschrieben, die nur eine andere Schreibweise für die $_{t_1}\Phi_i$, $_{t_2}\Phi_i$ und damit die Schichtmittel sind. Je nach Frequenz und Einfallswinkel und Beobachtungswinkel, die immer dieselben Schichten erzeugen sollen, sind die von den Φ_i ausgehenden Strahlungsvektoren um Phasenwinkel φ verschoben:

Der i -te Vektor zur Zeit t_1 um $(i-1) d\varphi$,

Der i -te Vektor zur Zeit t_2 um $(i-1) d\varphi$,

wo die äußerste N -te Schicht den Winkel $(N-1) d\varphi = 2k\beta^\times Y$ erzeugt. Dann wird mit [6] S. 162, 167 f. die Verteilung für die Cosinuskomponenten dieser Vektoren:

(79)

$$\prod_{i=1}^N {}_{t_1}\tau_i {}_{t_2}\tau_i = \frac{1}{\left(\prod_{i=1}^N \cos(i-1) d\varphi\right)^2} \cdot \frac{1}{(2\pi)^N} \frac{1}{V|A|} \times \\ \exp \left[-\frac{1}{2} \sum_{i,k=1}^{2N} \frac{A_{ik}}{|A|} \left(\frac{\Psi_i^{(1)} - m_i \cos \alpha d\varphi}{\cos \alpha d\varphi} \right) \left(\frac{\Psi_k^{(1)} - m_k \cos \beta d\varphi}{\cos \beta d\varphi} \right) \right] = T(\Psi_i^{(1)}, \Psi_k^{(1)}),$$

wo

$$(80) \quad \begin{aligned} \Psi_i^{(1)} &= {}_{t_1}\Phi_i^{(1)} \quad 1 \leq i \leq N \quad \text{und} \\ \Psi_{i+N}^{(1)} &= {}_{t_2}\Phi_i^{(1)} \quad \text{und wo ferner} \\ \alpha &= i-1 & \text{für } 1 \leq i \leq N \\ \beta &= k-1 & \text{für } 1 \leq k \leq N \\ \alpha &= i-N-1 & \text{für } N+1 \leq i \leq 2N \\ \beta &= k-N-1 & \text{für } N+1 \leq k \leq 2N \end{aligned}$$

Mittels (75) können wir uns jetzt $A(\varrho_1, \varrho_2, \varrho_3, \varrho_4)$ verschaffen: es wird

(81)

$$A(\varrho_1, \varrho_2, \varrho_3, \varrho_4) = \int_{\substack{\Phi_1^{(1)} \\ {}_{t_1}\Phi_1^{(1)} \\ 2N\text{fach}}}^{+\infty} \int_{\substack{-\infty \\ {}_{t_2}\Phi_N^{(1)}}} T(\Psi_i^{(1)}, \Psi_k^{(1)}) \\ \exp \left[j \left(\varrho_1 \sum_{i=1}^N {}_{t_1}\Phi_i^{(1)} + \varrho_2 \sum_{i=1}^N {}_{t_1}\Phi_i^{(1)} \operatorname{tg}(i-1) d\varphi + \varrho_3 \sum_{i=1}^N {}_{t_2}\Phi_i^{(1)} + \varrho_4 \sum_{i=1}^N {}_{t_2}\Phi_i^{(1)} \operatorname{tg}(i-1) d\varphi \right) \right] \prod_{i=1}^N d {}_{t_1}\Phi_i^{(1)} d {}_{t_2}\Phi_i^{(1)}.$$

Im Exponenten steht dann bei:

$$(82) \quad \begin{aligned} {}_{t_1}\Phi_i^{(1)} &\text{ die Variable } \varrho_1 + \varrho_2 \operatorname{tg}(i-1) d\varphi \\ {}_{t_2}\Phi_i^{(1)} &\text{ die Variable } \varrho_3 + \varrho_4 \operatorname{tg}(i-1) d\varphi. \end{aligned}$$

Die $_{t_1 t_2}\Phi_i^{(1)}$ schreiben wir jetzt folgendermaßen:

$$(83) \quad \begin{aligned} {}_{t_1}\Phi_i^{(1)} &= \Psi_i^{(1)}, \quad 1 \leq i \leq N \quad \text{mit Mittelwert } m_i \\ {}_{t_2}\Phi_i^{(1)} &= \Psi_{N+i}^{(1)} \quad 1 \leq i \leq N \quad \text{mit Mittelwert } m_{N+i} \end{aligned}$$

Dann wird aus (81)

$$(84) \quad A(\varrho_1, \varrho_2, \varrho_3, \varrho_4) = \int_{-\infty}^{+\infty} \dots \int_{-\infty}^{+\infty} T(\Psi_i^{(1)}, \Psi_k^{(1)}) \times \\ \exp \left[i \left(\sum_{i=1}^N \Psi_i^{(1)} (\varrho_1 + \varrho_2 \operatorname{tg} (i-1) d\varphi) + \sum_{i=1}^N \Psi_{N+i}^{(1)} (\varrho_3 + \varrho_4 \operatorname{tg} (i-1) d\varphi) \right) \right] \times \prod_{i=1}^N d\Psi_i^{(1)} d\Psi_{N+i}^{(1)}.$$

Wenn wir hier aus (79) die Funktion $T(\Psi_i^{(1)}, \Psi_k^{(1)})$ einsetzen, so erhalten wir für die FOURIER-Transformierte der gesuchten Verteilung nach [6] S. 118/119:

$$(85) \quad A(\varrho_1, \varrho_2, \varrho_3, \varrho_4) = \exp \left[j \left(\sum_{i=1}^N m_i \cos (i-1) d\varphi (\varrho_1 + \varrho_2 \operatorname{tg} (i-1) d\varphi + m_{N+i} \cos (i-1) d\varphi \right. \right. \\ \left. \left. \times (\varrho_3 + \varrho_4 \operatorname{tg} (i-1) d\varphi) \right) \right] \\ \times \exp \left[-\frac{1}{2} \left(\sum_{i,k=1}^N \lambda_{ik} (\varrho_1 + \varrho_2 \operatorname{tg} (i-1) d\varphi) (\varrho_1 + \varrho_2 \operatorname{tg} (k-1) d\varphi) \cos (i-1) d\varphi \cos (k-1) d\varphi \right. \right. \\ \left. \left. + \sum_{k,i=N+1}^{2N} \lambda_{ik} (\varrho_3 + \varrho_4 \operatorname{tg} (i-N-1) d\varphi) (\varrho_3 + \varrho_4 \operatorname{tg} (k-N-1) d\varphi) \cos (i-N-1) d\varphi \right. \right. \\ \left. \left. \times \cos (k-N-1) d\varphi \right. \right. \\ \left. \left. + \sum_{i=1}^N \sum_{k=N+1}^{2N} \lambda_{ik} (\varrho_1 + \varrho_2 \operatorname{tg} (i-1) d\varphi) (\varrho_3 + \varrho_4 \operatorname{tg} (k-N-1) d\varphi) \cos (i-1) d\varphi \right. \right. \\ \left. \left. \times \cos (k-N-1) d\varphi \right. \right. \\ \left. \left. + \sum_{i=N+1}^{2N} \sum_{k=1}^N \lambda_{ik} (\varrho_3 + \varrho_4 \operatorname{tg} (i-N-1) d\varphi) (\varrho_1 + \varrho_2 \operatorname{tg} (k-N-1) d\varphi) \right. \right. \\ \left. \left. \cos (i-N-1) d\varphi \cos (k-1) d\varphi \right) \right].$$

Damit haben wir die charakteristische Funktion der 2. Verteilung. Die λ_{ik} hängen je nach den Werten von i und k von t_1 allein oder von t_2 allein oder auch von t_1 und t_2 zusammen ab. Im Exponenten haben wir eine quadratische Form in den vier Veränderlichen $\varrho_1, \varrho_2, \varrho_3, \varrho_4$ stehen, und wir wollen jetzt, wie wir es oben bei der ersten Verteilung gemacht hatten, die Koeffizienten für die verschiedenen Variablenpaare ausrechnen, die uns dann die Größen liefern, die wir für die Häufigkeitsfunktion brauchen. Wir müssen die quadratische Form im Exponenten auf das Schema der vierreihigen Matrix bringen $\vec{p}' A \vec{p}$ wo $\vec{p}'$ den Zeilenvektor mit den Elementen $\varrho_1, \varrho_2, \varrho_3, \varrho_4$, $\vec{p}$ denselben Spaltenvektor bedeutet und A die vierreihige Koeffizientenmatrix der Form ist, die wir nun berechnen wollen. Wir haben also den Exponenten nach Gliedern $\varrho_1^2, \varrho_2^2, \varrho_3^2, \varrho_4^2, \varrho_1\varrho_2, \varrho_1\varrho_3, \varrho_1\varrho_4, \varrho_2\varrho_3, \varrho_2\varrho_4, \varrho_3\varrho_4$ zu ordnen. Zu diesem Zwecke multiplizieren wir folgende Klammern aus:

$$(86) \quad (\varrho_1 + \varrho_2 \operatorname{tg} (i-1) d\varphi) (\varrho_1 + \varrho_2 \operatorname{tg} (k-1) d\varphi) = \varrho_1^2 + \varrho_2^2 \operatorname{tg} (i-1) d\varphi \operatorname{tg} (k-1) d\varphi \\ + \varrho_1 \varrho_2 (\operatorname{tg} (i-1) d\varphi + \operatorname{tg} (k-1) d\varphi) \\ (\varrho_1 + \varrho_2 \operatorname{tg} (i-1) d\varphi) (\varrho_3 + \varrho_4 \operatorname{tg} (k-N-1) d\varphi) = \varrho_1 \varrho_3 + \varrho_2 \varrho_4 \operatorname{tg} (i-1) d\varphi \\ \operatorname{tg} (k-N-1) d\varphi + \varrho_2 \varrho_3 \operatorname{tg} (i-1) d\varphi + \varrho_1 \varrho_4 \operatorname{tg} (k-N-1) d\varphi \\ (\varrho_3 + \varrho_4 \operatorname{tg} (i-N-1) d\varphi) (\varrho_1 + \varrho_2 \operatorname{tg} (k-1) d\varphi) = \varrho_1 \varrho_3 + \varrho_1 \varrho_4 \operatorname{tg} (i-N-1) d\varphi \\ + \varrho_2 \varrho_3 \operatorname{tg} (k-1) d\varphi + \varrho_3 \varrho_4 \operatorname{tg} (i-N-1) d\varphi \operatorname{tg} (k-1) d\varphi$$

Wir haben nun die 17 Elemente der Matrix zu ermitteln und können, wie wir es oben schon einmal gemacht haben, die Summen in Integrale umschreiben. Wir bezeichnen die Koeffizienten von $\varrho_i \varrho_k$ mit c_{ik} , nehmen für $i \neq k$ $c_{ik} + c_{ki}$ zusammen, da wir ja unsere Form so schreiben können, und erhalten

$$\begin{aligned}
 (87) \quad c_{11} &= \sum_{i=1}^N \sum_{k=1}^N \lambda_{ik} \cos(i-1) d\varphi \cos(k-1) d\varphi \\
 c_{22} &= \sum_{i=1}^N \sum_{k=1}^N \lambda_{ik} \sin(i-1) d\varphi \sin(k-1) d\varphi \\
 c_{33} &= \sum_{i=N+1}^{2N} \sum_{k=N+1}^{2N} \lambda_{ik} \cos(i-N-1) d\varphi \cos(k-N-1) d\varphi \\
 c_{44} &= \sum_{i=N+1}^{2N} \sum_{k=N+1}^{2N} \lambda_{ik} \sin(i-N-1) d\varphi \sin(k-N-1) d\varphi \\
 c_{12} + c_{21} &= \sum_{i=1}^N \sum_{k=1}^N \lambda_{ik} \sin(i+k-2) d\varphi \\
 c_{13} + c_{31} &= \sum_{i=1}^N \sum_{k=N+1}^{2N} \lambda_{ik} \cos(i-1) d\varphi \cos(k-N-1) d\varphi \\
 &\quad + \sum_{i=N+1}^{2N} \sum_{k=1}^N \lambda_{ik} \cos(i-N-1) d\varphi \cos(k-1) d\varphi \\
 c_{14} + c_{41} &= \sum_{i=1}^N \sum_{k=N+1}^{2N} \lambda_{ik} \sin(k-N-1) d\varphi \cos(i-1) d\varphi \\
 &\quad + \sum_{i=N+1}^{2N} \sum_{k=1}^N \lambda_{ik} \sin(i-N-1) d\varphi \cos(k-1) d\varphi \\
 c_{23} + c_{32} &= \sum_{i=1}^N \sum_{k=N+1}^{2N} \lambda_{ik} \sin(i-1) d\varphi \cos(k-N-1) d\varphi \\
 &\quad + \sum_{i=N+1}^{2N} \sum_{k=1}^N \lambda_{ik} \sin(k-1) d\varphi \cos(i-N-1) d\varphi \\
 c_{24} + c_{42} &= \sum_{i=1}^N \sum_{k=N+1}^{2N} \lambda_{ik} \sin(i-1) d\varphi \sin(k-N-1) d\varphi \\
 &\quad + \sum_{i=N+1}^{2N} \sum_{k=1}^N \lambda_{ik} \sin(i-N-1) d\varphi \sin(k-1) d\varphi \\
 c_{34} + c_{43} &= \sum_{i=N+1}^{2N} \sum_{k=N+1}^{2N} \lambda_{ik} \sin(i+k-2N-2) d\varphi.
 \end{aligned}$$

Wir wollen nun mit $N \rightarrow \infty$, $d\varphi \rightarrow 0$, $N d\varphi \rightarrow 2k\beta \times Y$ zur kontinuierlichen Form übergehen:

Wir setzen

$$\begin{aligned}
 (88) \quad c_{ik} + c_{ki} &= 2c'_{ik} & i \neq k \\
 c_{ii} &= c'_{ii} & i = k,
 \end{aligned}$$

und können die Matrix in den c'_{ik} als symmetrisch ansehen. Wenn wir nun wieder die Zahl der Schichten bei abnehmender Dicke unbegrenzt zunehmen lassen, die

Substitutionen (48) verwenden und (49) berücksichtigen, so können wir die Summen in Integrale umschreiben. Der maximale Phasenwinkel ist stets seinem Betrage nach: $2k\beta^\times Y$.

Indizes $> N$ sind jeweils dem Zeitpunkt t_2 , Indizes $\leq N$ dem Zeitpunkte t_1 zuzuordnen. Wenn in λ_{ik} Indizes dieser beiden Arten vorkommen, so bedeutet dann λ_{ik} eine Kovarianz zwischen den beiden Zeiten.

Wir wollen jetzt die obigen Summen in Integrale umschreiben und beginnen mit den einfachen Mittelwerten:

$$\begin{aligned}
 (89) \quad \sum_{i=1}^N m_i \frac{\cos}{\sin} (i-1) d\varphi &\rightarrow \int_{\nu=0}^1 {}_{t_1}m(\nu Y) \frac{\cos}{\sin} (2\nu k\beta^\times Y) d\nu Y \\
 &= {}_{t_1}M_1 \text{ im cosinus-Falle} \\
 &= {}_{t_1}M_2 \text{ im sinus-Falle} \\
 \\
 \sum_{i=1}^N m_{N+i} \frac{\cos}{\sin} (i-1) d\varphi &\rightarrow \int_{\nu=0}^1 {}_{t_2}m(\nu Y) \frac{\cos}{\sin} (2\nu k\beta^\times Y) d\nu Y \\
 &= {}_{t_2}M_1 \text{ im cosinus-Falle} \\
 &= {}_{t_2}M_2 \text{ im sinus-Falle.}
 \end{aligned}$$

Für die zweiten Momente erhalten wir dann:

$$\begin{aligned}
 (90) \quad c'_{11} = c_{11} &\rightarrow \int_{\mu=0}^1 \int_{\nu=0}^1 {}_{t_1}c(\mu Y, \nu Y) {}_{t_1}\sigma(\mu Y) {}_{t_1}\sigma(\nu Y) \cos(2\mu k\beta^\times Y) \cos(2\nu k\beta^\times Y) d\mu Y d\nu Y; \\
 c'_{22} = c_{22} &\rightarrow \int_{\mu=0}^1 \int_{\nu=0}^1 {}_{t_1}c(\mu Y, \nu Y) {}_{t_1}\sigma(\mu Y) {}_{t_1}\sigma(\nu Y) \sin(2\mu k\beta^\times Y) \sin(2\nu k\beta^\times Y) d\mu Y d\nu Y; \\
 c'_{33} = c_{33} &\rightarrow \int_{\mu=0}^1 \int_{\nu=0}^1 {}_{t_2}c(\mu Y, \nu Y) {}_{t_2}\sigma(\mu Y) {}_{t_2}\sigma(\nu Y) \cos(2\mu k\beta^\times Y) \cos(2\nu k\beta^\times Y) d\mu Y d\nu Y \\
 c'_{44} = c_{44} &\rightarrow \int_{\mu=0}^1 \int_{\nu=0}^1 {}_{t_2}c(\mu Y, \nu Y) {}_{t_2}\sigma(\mu Y) {}_{t_2}\sigma(\nu Y) \sin(2\mu k\beta^\times Y) \sin(2\nu k\beta^\times Y) d\mu Y d\nu Y \\
 2c'_{12} = c_{12} + c_{21} &\rightarrow - \int_{\mu=0}^1 \int_{\nu=0}^1 {}_{t_1}c(\mu Y, \nu Y) {}_{t_1}\sigma(\mu Y) {}_{t_1}\sigma(\nu Y) \sin[2k(\mu + \nu)\beta^\times Y] d\mu Y d\nu Y \\
 2c'_{13} = c_{13} + c_{31} &\rightarrow \int_{\mu=0}^1 \int_{\nu=0}^1 [c({}_{t_1}\mu Y, {}_{t_2}\nu Y) {}_{t_1}\sigma(\mu Y) {}_{t_2}\sigma(\nu Y) + c({}_{t_2}\mu Y, {}_{t_1}\nu Y) {}_{t_2}\sigma(\mu Y) {}_{t_1}\sigma(\nu Y)] \\
 &\quad \times \cos(2k\mu\beta^\times Y) \cos[2k\nu\beta^\times Y] d\mu Y d\nu Y \\
 2c'_{14} = c_{14} + c_{41} &\rightarrow - \int_{\mu=0}^1 \int_{\nu=0}^1 [c({}_{t_1}\mu Y, {}_{t_2}\nu Y) {}_{t_1}\sigma(\mu Y) {}_{t_2}\sigma(\nu Y) \cos(2k\mu\beta^\times Y) \sin(2k\nu\beta^\times Y) \\
 &\quad + c({}_{t_2}\mu Y, {}_{t_1}\nu Y) {}_{t_2}\sigma(\mu Y) {}_{t_1}\sigma(\nu Y) \sin(2k\mu\beta^\times Y) \cos(2k\nu\beta^\times Y)] \\
 &\quad \times d\mu Y d\nu Y
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
2c'_{23} &= c_{23} + c_{32} \rightarrow - \int_{\mu=0}^1 \int_{\nu=0}^1 [c(\iota_1 \mu Y, \iota_2 \nu Y) \iota_1 \sigma(\mu Y) \iota_2 \sigma(\nu Y) \sin(2k\mu\beta^\times Y) \cos(2k\nu\beta^\times Y) \\
&\quad + c(\iota_2 \mu Y, \iota_1 \nu Y) \iota_2 \sigma(\mu Y) \iota_1 \sigma(\nu Y) \cos(2k\mu\beta^\times Y) \sin(2k\nu\beta^\times Y)] \\
&\quad \times d\mu Y d\nu Y \\
2c'_{24} &= c_{24} + c_{42} \rightarrow \int_{\mu=0}^1 \int_{\nu=0}^1 [c(\iota_1 \mu Y, \iota_2 \nu Y) \iota_1 \sigma(\mu Y) \iota_2 \sigma(\nu Y) + c(\iota_2 \mu Y, \iota_1 \nu Y) \iota_2 \sigma(\mu Y) \iota_1 \sigma(\nu Y)] \\
&\quad \times \sin(2k\mu\beta^\times Y) \sin(2k\nu\beta^\times Y) d\mu Y d\nu Y. \\
2c'_{34} &= c_{34} + c_{43} \rightarrow - \int_{\mu=0}^1 \int_{\nu=0}^1 \iota_1 c(\mu Y, \nu Y) \iota_2 \sigma(\mu Y) \iota_2 \sigma(\nu Y) \sin[2k(\mu + \nu)\beta^\times Y] d\mu Y d\nu Y.
\end{aligned}$$

Damit können wir jetzt die zweite Verteilung angeben:

$$\begin{aligned}
(91) \quad W(X_1, Y_1, t_1, X_2, Y_2, t_2) dX_1 dY_1 dX_2 dY_2 \\
= dX_1 dY_1 dX_2 dY_2 \cdot \frac{(2\pi)^2}{V|C|} \exp\left[-\frac{1}{2} Q^{-1}\right],
\end{aligned}$$

wo Q^{-1} die quadratische Form ist, deren Matrix die reziproke derjenigen Matrix ist, deren Elemente c_{ik} wir soeben angegeben haben; C ist deren Determinante und die Form ist geschrieben in den Veränderlichen:

$$(X_1 - \iota_1 M_1), (Y_1 - \iota_1 M_2), (X_2 - \iota_2 M_1), (Y_2 - \iota_2 M_2).$$

Damit haben wir für das Streufeld die Verteilungen 1. und 2. Ordnung gegeben.

Wenn wir das Streufeld als zweidimensionalen stochastischen Prozeß betrachten in den Größen X, Y , so haben wir jetzt die charakteristischen Größen bis zur 2. Ordnung angegeben.

Es bleibt noch übrig, (91) in Polarkoordinaten anzugeben: Nennen wir C_{ik} die Koeffizienten der Form Q^{-1} und setzen wir:

$$\begin{aligned}
(92) \quad (X_1 - \iota_1 M_1) &= R_1 \cos \varphi_1, & (Y_1 - \iota_1 M_2) &= R_1 \sin \varphi_1 \\
(X_2 - \iota_2 M_1) &= R_2 \cos \varphi_2, & (Y_2 - \iota_2 M_2) &= R_2 \sin \varphi_2 \\
dX_1 dY_1 &= R_1 dR_1 d\varphi_1, & dX_2 dY_2 &= R_2 dR_2 d\varphi_2,
\end{aligned}$$

so erhalten wir für die Verteilung:

$$\begin{aligned}
&W(R_1, \varphi_1, R_2, \varphi_2) R_1 dR_1 d\varphi_1 R_2 dR_2 d\varphi_2 \\
&= \frac{(2\pi)^2}{V|C|} \exp\left[-\frac{1}{2} (C_{11} R_1^2 \cos^2 \varphi_1 + C_{22} R_1^2 \sin^2 \varphi_1 + C_{33} R_2^2 \cos^2 \varphi_2 + C_{44} R_2^2 \sin^2 \varphi_2 \right. \\
&\quad + 2 C_{12} R_1^2 \cos \varphi_1 \sin \varphi_1 + 2 C_{13} R_1 R_2 \cos \varphi_1 \cos \varphi_2 + 2 C_{14} R_1 R_2 \cos \varphi_1 \sin \varphi_2 \\
&\quad + 2 C_{23} R_1 R_2 \sin \varphi_1 \cos \varphi_2 + 2 C_{24} R_1 R_2 \sin \varphi_1 \sin \varphi_2 + 2 C_{34} R_2^2 \sin \varphi_2 \cos \varphi_2) \Big] \\
&\times R_1 R_2 dR_1 dR_2 d\varphi_1 d\varphi_2.
\end{aligned}$$

IV. DIE STATISTISCHE THEORIE DES ULTRAKURZWELLEN- FADINGS

Wir betonen nochmals, daß wir uns in dieser Arbeit auf Empfangsschwankungen beschränken, die von einer endlichen Zone dielektrischer Turbulenz hervorgerufen werden. Dabei müssen wir aber noch folgendes beachten:

Unter „Fading“ versteht man gemeinhin Schwankungen der Empfangsamplitude. Nun haben wir aber in dem bisherigen Teil der Arbeit gesehen, daß das Streufeld nach Größe und Phase ermittelt wird, was schon allein daher kommt, daß es sich aus Bestandteilen variabler Phase zusammensetzt. D. h. aber, daß wir uns beim Studium von Fadingerscheinungen, die von solchen Streuzonen erzeugt werden, keinesfalls auf die Untersuchung der Amplituden des Streufeldes oder seiner Überlagerung mit einem stationären Dauerfeld beschränken dürfen; wir müssen die Phasen in Betracht ziehen.

Als experimentelles Schema legen wir die Abbildung 4 zugrunde:

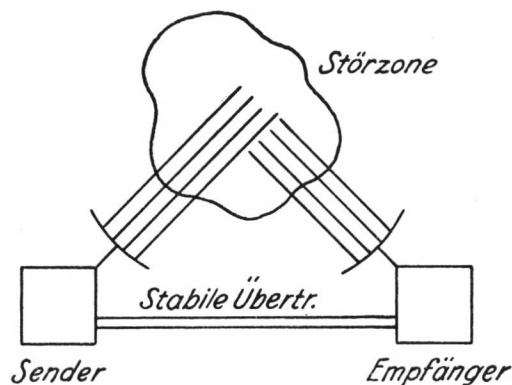


Abb. 4

Zwischen Sender und Empfänger nehmen wir zusätzlich eine amplituden- und phasenstabile Übertragung an, die etwa in einer Leitung bestehe, deren Eigenschaften keinen Schwankungen unterliegen, deren Größenordnung mit denen der dielektrischen turbulenten Zone vergleichbar sind.

Das darüber übertragene Signal gebe eine Norm für die Amplitude und Phase, der gegenüber das Störfeld beobachtet werde.

Wenn bei einer Beobachtung die Frequenz über ein weites Band hinweg variiert wird (= durchgedreht wird), so müssen im Empfänger und in der Übertragungsleitung solche Schaltungen vorhanden sein, daß das Störfeld nach Amplitude und Phase laufend beobachtet werden kann. Wir werden noch sehen, was man durch Verzicht auf eine Messung der Phase verliert.

A. DER ZUSAMMENHANG DER STATISTISCHEN KENNGRÖSSEN DER STÖR-ZONE MIT DENEN DES FADINGS IM KOMPLEXEN FALL

Zunächst nehmen wir an, daß uns aus Beobachtungen als Material zur Verfügung steht: der zeitliche Verlauf des gestreuten Feldes nach Größe und Phase, und wir diskutieren die Beziehungen, die die statistischen Daten der Schichtmittel der Störzone und diejenigen des Streufeldes zueinander haben.

In (31) (33) (41) (44) (45) (47) (53) (54) (56) haben wir die 1. Verteilung speziell im GAUSS-LAPLACESchen Fall charakterisiert. Die 2. Verteilung ist mit (84) (85) (87) (89) (90) (91) gegeben.

Wir hatten in dem Prozeß ein ergodisch stationäres Intervall angenommen, in dem wir die Mittel als Zeitmittel berechnen können. Die statistischen Daten des Streufeldes sind einfach FOURIER-Transformierte verschiedener Art der Daten der Störzone. Über die Möglichkeit, die Betrachtung umzukehren und aus dem Streufeld auf die Störzone zu schließen, soll in einer späteren Arbeit gesprochen werden. Ist der Prozeß stationär von 2. Ordnung, müssen c'_{11} , c'_{22} , c'_{33} , c'_{44} , c'_{12} , c'_{34} und ${}_tM_1$, ${}_tM_2$, ${}_tM_1$, ${}_tM_2$ unabhängig von der Zeit sein, c_{12} , c_{24} , c_{14} , c_{23} müssen von $t_2 - t_1$ abhängen.

B. SPEKTREN UND CORRELATIONEN

Wie wir gesehen haben, müssen wir das Streufeld nach Größe und Phase oder aber seine reelle und imaginäre Komponente studieren. Wir werden also Autocorrelationen und Spektren in X , in Y und wechselseitige Correlationen zwischen X und Y betrachten. In Analogie zu (5) (6) (8) entwickeln wir die Schichtmittel nach FOURIER und haben die Erleichterung, daß durch die Mittelung über die Schichten der Prozeß räumlich eindimensional wird.

Wir schreiben:

$$(94) \quad \bar{\Delta}^{\varepsilon z}(y, t) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k'=0}^{\infty} \left(a_{nk'}^{\varepsilon c} \cos \frac{2\pi ny}{Y} \cos \frac{2\pi k' t}{T} + a_{nk'}^{\varepsilon s} \cos \frac{2\pi ny}{Y} \sin \frac{2\pi k' t}{T} \right. \\ \left. + a_{nk'}^{s c} \sin \frac{2\pi ny}{Y} \cos \frac{2\pi k' t}{T} + a_{nk'}^{s s} \sin \frac{2\pi ny}{Y} \sin \frac{2\pi k' t}{T} \right).$$

Y und T bedeuten hier die ganze Periode im Gegensatz zu (5), wo sie die Halbperiode bedeuten. Wir berechnen jetzt die reelle und imaginäre Komponente des Streufeldes, wobei wir die Störzone in $-Y/2 \leq y \leq Y/2$ annehmen. Abgesehen von einem Phasenfaktor, der von der Laufzeit zwischen dem Empfänger und der Stelle $y = 0$ herrührt und den wir unterdrücken wollen, haben wir dann:

$$(95) \quad \Pi_s = \frac{1}{4\pi\varepsilon_1} \int_{-Y/2}^{+Y/2} \bar{\Delta}^{\varepsilon z}(y, t) \exp[-2jk\beta^\times y] dy.$$

In Analogie zu (12)–(15) haben wir hier nur die beiden Integrale auszuwerten:

$$(96) \quad \int_{-Y/2}^{+Y/2} \cos 2\pi n \frac{y}{Y} \exp[-j 2 k \beta^x y] dy = (-1)^n \sin k \beta^x Y \frac{(-k \beta^x)}{\frac{\pi^2 n^2}{Y^2} - k^2 \beta^x} = J_n^c(\beta^x k)$$

$$(97) \quad \int_{-Y/2}^{+Y/2} \sin 2\pi n \frac{y}{Y} \exp[-j 2 k \beta^x y] dy = (-j) (-1)^n \sin(k \beta^x Y) \frac{\frac{\pi n}{Y}}{\frac{\pi^2 n^2}{Y^2} - k^2 \beta^x} \\ = (-j) J_n^s(\beta^x k).$$

Man beachte den Zusammenhang mit 2.2 Gl. (12)–(15). Durch die Mittelung über x und z fallen dann alle Glieder mit $\frac{\cos l\pi x}{\sin X} \frac{\cos n\pi z}{\sin Z}$ heraus außer den cos-Gliedern mit $l = n = 0$.

Also geben die cos-Glieder in (94) reelle, die sin-Glieder imaginäre Komponenten. Damit können wir jetzt die reelle und imaginäre Komponente des Streufeldes angeben:

$$(98) \quad X = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k'=0}^{\infty} a_{nk'}^c J_n^c(k \beta^x) \cos \frac{2\pi k' t}{T} + a_{nk'}^s J_n^s(k \beta^x) \sin \frac{2\pi k' t}{T}$$

$$(99) \quad jY = -j \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k'=0}^{\infty} a_{nk'}^s J_n^s(k \beta^x) \cos \frac{2\pi k' t}{T} + a_{nk'}^c J_n^c(k \beta^x) \sin \frac{2\pi k' t}{T}.$$

Damit können wir die obenerwähnten Correlationen aus Spektren angeben:

Wir denken uns das stationäre Intervall sehr lange ausgedehnt; dann können wir unter Vernachlässigung eines Fehlers der Ordnung $\frac{1}{T}$ für die Autocorrelation zunächst in X schreiben:

$$(100) \quad \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{+T/2} dt \left[\sum_{k'=0}^{\infty} \cos \frac{2\pi k' t}{T} \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_{nk'}^c J_n^c(k \beta^x) \right) + \sum_{k'=0}^{\infty} \sin \frac{2\pi k' t}{T} \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_{nk'}^s J_n^s(k \beta^x) \right) \right] \\ \times \left[\sum_{k'=0}^{\infty} \cos \frac{2\pi k' (t+\tau)}{T} \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_{nk'}^c J_n^c(k \beta^x) \right) + \sum_{k'=0}^{\infty} \sin \frac{2\pi k' (t+\tau)}{T} \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_{nk'}^s J_n^s(k \beta^x) \right) \right] \\ = \sum_{k'=0}^{\infty} \left\{ \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_{nk'}^c J_n^c(k \beta^x) \right)^2 + \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_{nk'}^s J_n^s(k \beta^x) \right)^2 \right\} \cos \frac{2\pi k' \tau}{T},$$

was direkt das WIENER-KHINTCHINISCHE Theorem verifiziert.

Analog bekommen wir für die Autocorrelation in Y :

$$(101) \quad \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{+T/2} dt \left[\sum_{k'=0}^{\infty} \cos \frac{2\pi k' t}{T} \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_{nk'}^c J_n^c(k \beta^x) \right) + \sum_{k'=0}^{\infty} \sin \frac{2\pi k' t}{T} \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_{nk'}^s J_n^s(k \beta^x) \right) \right] \\ \times \left[\sum_{k'=0}^{\infty} \cos \frac{2\pi k' (t+\tau)}{T} \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_{nk'}^c J_n^c(k \beta^x) \right) + \sum_{k'=0}^{\infty} \sin \frac{2\pi k' (t+\tau)}{T} \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_{nk'}^s J_n^s(k \beta^x) \right) \right] \\ = \sum_{k'=0}^{\infty} \left\{ \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_{nk'}^c J_n^c(k \beta^x) \right)^2 + \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_{nk'}^s J_n^s(k \beta^x) \right)^2 \right\} \cos \frac{2\pi k' \tau}{T}.$$

Für die wechselseitige Correlation von X und Y erhalten wir:

(102)

$$\begin{aligned} \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{+T/2} dt & \left[\sum_{k'=0}^{\infty} \cos \frac{2\pi k' t}{T} \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_{nk'}^{\epsilon \epsilon} J_n^{\epsilon}(k\beta^{\times}) \right) + \sin \frac{2\pi k' t}{T} \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_{nk'}^{\epsilon s} J_n^{\epsilon}(k\beta^{\times}) \right) \right] \\ & \times \left[\sum_{k'=0}^{\infty} \cos \frac{2\pi k'(t+\tau)}{T} \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_{nk'}^{s \epsilon} J_n^s(k\beta^{\times}) \right) + \sin \frac{2\pi k'(t+\tau)}{T} \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_{nk'}^{s s} J_n^s(k\beta^{\times}) \right) \right] \\ & = \sum_{k'=0}^{\infty} \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_{nk'}^{\epsilon \epsilon} J_n^{\epsilon}(k\beta^{\times}) \right) \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_{nk'}^{\epsilon \epsilon} J_n^{\epsilon}(k\beta^{\times}) - \sum_{n=0}^{\infty} a_{nk'}^{\epsilon s} J_n^{\epsilon}(k\beta^{\times}) \right) \cos \frac{2\pi k' \tau}{T} \\ & + \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_{nk'}^{s \epsilon} J_n^s(k\beta^{\times}) \right) \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_{nk'}^{\epsilon \epsilon} J_n^{\epsilon}(k\beta^{\times}) - \sum_{n=0}^{\infty} a_{nk'}^{\epsilon s} J_n^{\epsilon}(k\beta^{\times}) \right) \sin \frac{2\pi k' \tau}{T}. \end{aligned}$$

Damit haben wir die Correlationen und Spektren mittels der Entwicklungskoeffizienten der ϵ -Störung und der zahlenmäßig leicht auszurechnenden Größen $J_n^{\epsilon}(k\beta^{\times})$ $J_n^s(k\beta^{\times})$ in Evidenz gesetzt.

Wir können dies noch mit den Verteilungsfunktionen in Beziehung bringen: bei deren Berechnung waren wir davon ausgegangen, daß die Störzone in $0 \leq y \leq Y$ gelegen sei und nicht in $-Y/2 < y < Y/2$. Die Entwicklung (94) würde dann in $0 < y < Y$ gelten und die Integrale (96) (97) in den Grenzen 0, Y zu nehmen sein. Gehen wir dann analog zu oben vor, muß die Autocorrelation in X durch c'_{13} gegeben sein, das dann nur von $t_2 - t_1$ abhängen darf, da der Prozeß stationär von 2. Ordnung anzunehmen ist. Ebenso wird die Autocorrelation in Y nur von $t_2 - t_1$ abhängen und durch c'_{14} gegeben sein. Die wechselseitige Correlation von X und Y zu einer Zeit muß dann durch c'_{12} und c'_{34} gegeben sein, die gleich sein müssen, wenn der Prozeß stationär von 2. Ordnung ist.

C. WEITERE EIGENSCHAFTEN DES STREUFELDES

Wir hatten schon darauf hingewiesen, daß in allen Beziehungen über das Streufeld die Größe $2k\beta^{\times}$ auftritt; wir sehen hier, daß das Streufeld für verschiedene Einfallsrichtungen und Frequenzen identisch ist, wenn

$$(103) \quad \omega_1 \beta_1^{\times} = \omega_2 \beta_2^{\times} \dots = \omega_n \beta_n^{\times}.$$

Wenn wir für ein $\beta^{\times}$ und ein genügend breites Frequenzband die Schwankungskurven der Streufeldkomponenten zur Verfügung haben, so können wir für andere Einfallswinkel und Frequenzen die Fadingerscheinungen berechnen; dabei ist natürlich vorausgesetzt, daß immer dieselben Ebenen als äquiphase Ebenen auftreten.

D. KOMPLEXES FADING UND REINES AMPLITUDENFADING

Wir hatten bisher die Störfeldstärke in 2 Komponenten zerlegt, die zeitlich senkrecht aufeinander stehen. Wir wollen einmal sehen, wie die statistische Häufigkeit sich gestaltet, wenn man auf die Phase verzichtet und nur die Amplitude studiert. Um die 1. Verteilung allein der Amplitude des Streufeldes zu bekommen, brauchen wir nur (62) nach φ von Null bis 2π zu integrieren.

Wir haben zu bilden:

$$(104) \quad \int_{\varphi=0}^{2\pi} W(R, \varphi) R dR d\varphi = W(R) dR.$$

Dies wird mit (62)

$$(105) \quad \begin{aligned} W(R) dR &= \frac{2\pi}{V|A|} \int_0^{2\pi} \exp \left[-\frac{1}{2} R^2 (A_{11} \cos^2 \varphi + A_{22} \sin^2 \varphi + 2 A_{12} \sin \varphi \cos \varphi) \right] d\varphi \\ &= \frac{2\pi}{V|A|} \int_0^{2\pi} \exp \left[-\frac{1}{4} R^2 ((A_{11} + A_{22}) + \cos 2\varphi (A_{11} - A_{22}) + 2 A_{12} \sin 2\varphi) \right] d\varphi. \end{aligned}$$

Mit

$$(106) \quad \begin{aligned} 2\varphi &= \psi, \quad C = \sqrt{(A_{11} - A_{22})^2 + 4 A_{12}^2} \\ x &= \arctg \frac{A_{12}}{A_{11} - A_{12}} \end{aligned}$$

geht (105) über in

$$(107) \quad \begin{aligned} W(R) dR &= \frac{2\pi}{V|A|} \exp \left[-\frac{1}{4} R^2 (A_{11} + A_{22}) \right]^2 \int_{-\pi+x}^{+\pi+x} \exp [-C R^2 \cos (\psi - x)] d\psi \\ &= \frac{(2\pi)^2}{V|A|} \exp \left[-\frac{1}{4} R^2 (A_{11} + A_{22}) \right] J_0 \left(\frac{j}{4} C R^2 \right). \end{aligned}$$

Diese Funktion eignet sich nicht für eine Umkehrung, d. h. die Ermittlung der DK-Störung aus dem Fading, da die Matrizenelemente nicht mehr eindeutig zu entnehmen sind.

LITERATUR

1. ECKART: Über den Zusammenhang zwischen Amplitudenverteilungen und ihren Richtcharakteristiken. A.E.Ü. Bd. 9 (1955) S. 177-180.
2. ECKART: Statistische Beschreibung der dielektrischen Turbulenz in der Troposphäre. Abh. der Bayer. Akademie d. Wiss., Math. nat. Klasse N. F. Heft 74. 1956.
3. GORDON-BOOKER: A Theory of Radio Scattering in the Toposphere PIRE Vol. 38 No. 4 April 1950.
4. STARAS: Scattering of Electromagnetic Energy in a Randomly Inhomogeneous Atmosphere. J. of Appl. Phys. Vol. 23 No. 10 Oct. 1952.
5. CHANDRASEKHAR: Stochastic Problems in Physics and Astronomy. Rev. of Mod. Phys. Vol. 15 No. 1 p. 1-89.
6. CRAMÉR: Mathematical Methods of Statistics. Princeton 1951.
7. BERNSTEIN-SLUTSKY-STEINHAUS: Les fonctions aléatoires. Act. Sc. et Ind. No. 738 Ed. Hermann, Paris.