

Sitzungsberichte

der

mathematisch - physikalischen Classe

der

k. b. Akademie der Wissenschaften

zu München.

1882. Heft II.

München.

Akademische Buchdruckerei von F. Straub.

1882.

In Commission bei G. Franz.

Herr Seidel legt vor nachstehende Mittheilung des Herrn P. du Bois-Reymond in Tübingen:

„Ein allgemeiner Satz über die Integrirbarkeit von Functionen integrirbarer Functionen.“

Ich veröffentlichte (Leipz. Ann. Bd. XVI) ohne Beweis folgenden Lehrsatz:

Die integrirbaren Functionen

$$\varphi_1(x), \varphi_2(x), \dots \varphi_n(x)$$

seien im Intervall

$$a \leq x \leq b$$

eingeschlossen resp. zwischen den Grenzen

$$\alpha_1 \leq \varphi_1(x) \leq \beta_1,$$

$$\alpha_2 \leq \varphi_2(x) \leq \beta_2,$$

$$\dots \dots \dots$$

$$\alpha_n \leq \varphi_n(x) \leq \beta_n,$$

und die Function $F(x_1, x_2, \dots x_n)$ sei stetig ein Gebiet:

$$\alpha_1 \leq x_1 \leq \beta_1,$$

$$\alpha_2 \leq x_2 \leq \beta_2,$$

$$\dots \dots \dots$$

$$\alpha_n \leq x_n \leq \beta_n,$$

so ist $F(\varphi_1(x), \varphi_2(x), \dots \varphi_n(x))$ im Intervall $a \dots b$ von x integrirbar.

Da, wie ich höre, Zweifel an der Allgemeinheit dieses Satzes geäußert worden sind, so scheint es mir angezeigt, seinen Beweis mitzutheilen.

Es genügt die Integrirbarkeit einer stetigen Function von einer und von zwei integrirbaren Functionen nachzuweisen.

So sei denn zunächst $\varphi(x)$ im Intervall (a, b) integrirbar, α und β seien die untere und die obere Grenze der Werthe $\varphi(x)$ im Intervall (a, b) , und $F(x)$ sei im Intervall (α, β) stetig. Alsdann wird behauptet, dass $\varphi(x) = F(\varphi(x))$ im Intervall (a, b) integrirbar ist.

Beweis. Wir theilen das Intervall (a, b) in n der Einfachheit halber gleiche Theile, und bezeichnen mit $\delta^{(n, \epsilon)}$ einen jeden dieser Theile, in welchem die Schwankung von $\varphi(x)$ eine beliebig zu wählende Grösse ϵ nicht übersteigt. Bilden wir die Summe sämtlicher solcher Theilintervalle: $\Sigma \delta^{(n, \epsilon)}$, so ist $b-a$ ihr Limes, wenn n in's Unbegrenzte wächst. Umgekehrt wenn für jeden noch so kleinen Werth ϵ die Summe $\Sigma \delta^{(n, \epsilon)}$ den Limes $b-a$ hat, so ist die Function $\varphi(x)$ integrirbar. Dies ist eine von der gebräuchlichen etwas abweichende Form der Bedingung der Integrirbarkeit, die nicht selten gute Dienste leistet.

Betrachten wir jetzt die Function $f(x) = F(\varphi(x))$. Einer Schwankung $\sigma^{(n, \epsilon)}$ von $\varphi(x)$ in einer Strecke $\delta^{(n, \epsilon)}$ entspricht eine Schwankung $\zeta^{(n, \epsilon)}$ von $f(x)$. Diese Schwankungen von $f(x)$ können aber durch Verkleinerung von ϵ sämtlich unter einen gewählten Kleinheitsgrad gebracht werden. Denn da $F(\varphi)$ im Intervall (α, β) von φ stetig ist, so werden sämtliche Schwankungen von $F(\varphi)$, welche Werthunterschieden von φ entsprechen, wegen der sogenannten gleichmässigen Stetigkeit mit dem grössten Werthunterschiede der φ zugleich beliebig verkleinert werden können.

Wir können folglich ϵ so klein annehmen, dass keine der Grössen $\zeta^{(n, \epsilon)}$ eine beliebig niedrige Grenze η übersteigt.

So können wir aber auch umgekehrt η beliebig klein annehmen, und die Summe $\Sigma \delta^{(n, \epsilon)} = \Sigma \delta^{(n, \eta)}$ wird bei beliebig kleinen Schwankungen η von $f(x)$ in den Theilstrecken $\delta^{(n, \eta)}$ die Grenze $b-a$ haben, $f(x)$ daher integrirbar sein. Q. E. D.

Weiter handle es sich um eine Function $F(\varphi(x), \psi(x))$ von zwei integrirbaren Functionen $\varphi(x)$ und $\psi(x)$. Im Intervall (a, b) von x möge $\varphi(x)$ dem Intervall (α, β) , $\psi(x)$ dem Intervall (α_1, β_1) angehören. Und es sei $F(\varphi, \psi)$ eine im Gebiet $\alpha \leq \varphi \leq \beta$, $\alpha_1 \leq \psi \leq \beta$, stetige Function von φ und ψ . Bezeichnen wir ferner mit $\delta_{\varphi}^{(n, \epsilon)}$, $\delta_{\psi}^{(n, \epsilon)}$ die ähnlich wie oben definirten Theile von $b-a$ in denen die Schwankung von φ resp. ψ die Grenze ϵ nicht übersteigt und mit $\delta_{\varphi, \psi}^{(n, \epsilon)}$ die Theile von $b-a$ in denen die Schwankung weder von φ noch von ψ die Grenze ϵ übersteigt: so muss, da sowohl $\Sigma \delta_{\varphi}^{(n, \epsilon)}$ als $\Sigma \delta_{\psi}^{(n, \epsilon)}$ die Grenze $b-a$ haben, $\Sigma \delta_{\varphi, \psi}^{(n, \epsilon)}$ die nämliche Grenze besitzen. Wegen der sogenannten gleichmässigen Stetigkeit der Function zweier Variablen $F(\varphi, \psi)$ folgt das Weitere wie oben.

Die Ausdehnung dieses Beweises auf eine stetige Function einer beliebigen Anzahl integrirbarer Functionen liegt auf der Hand.

Auch eine Ausdehnung auf nur integrirbar vorausgesetzte Functionen von integrirbaren Functionen ist möglich, worauf ich an geeignetem Orte zurückkomme.

Jener allgemeine Satz gestattet u. A. die Behandlung, welcher ich in meinen „Erläuterungen zu den Anfangsgründen der Variationsrechnung“ das Problem der kürzesten Linie unterwarf, *mutatis mutandis* auf das allgemeine Variationsproblem der einfachen Integrale auszudehnen.

Tübingen, 26. December 1881.