BAYERISCHE AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN
MATHEMATISCH-NATURWISSENSCHAFTLICHE KLASSE

ABHANDLUNGEN · NEUE FOLGE, HEFT 174

FRIEDRICH L. BAUER
CHRISTOPH HAENEL

Übersehene numerische Aspekte in der Geschichte der Kettenbrüche

Dem Andenken an Oskar Perron
(1880–1975)

Vorgetragen in der Sitzung
vom 7. Juli 2006

MÜNCHEN 2007

VERLAG DER BAYERISCHEN AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN

IN KOMMISSION BEIM VERLAG C. H. BECK MÜNCHEN

ISSN 0005–6995
(Abhandlungen – Bayerische Akademie der Wissenschaften,
Mathematisch-Naturwissenschaftliche Klasse)

ISBN 978 3 7696 0966 0
© Bayerische Akademie der Wissenschaften, München 2007
Gesamtherstellung: Druckerei C. H. Beck, Nördlingen
Gedruckt auf säurefreiem, alterungsbeständigem Papier
(hergestellt aus chlorfrei gebleichtem Zellstoff)
Printed in Germany

Inhalt

Die Anfänge: Der Euklidsche Algorithmus 4
Die banale Kettenbruchentwicklung für π 5
Banale Kettenbruchentwicklung für andere Irrationalzahlen 7
Von Archimedes bis Cataldi: Vorläufer in der Antike und Renaissance 8
Bombelli und Cataldi 9
Periodische regelmäßige Kettenbrüche 10
Darstellung der Näherungsbrüche in geschlossener Form 11
Lineare Konvergenz der Cataldischen Kettenbrüche 11
Eulers Irrweg 12
Reihendarstellung reeller Zahlen und Konvergenzverbesserung 12
Die Euler-Transformation 13
Abschreckende Beispiele: Logarithmische Konvergenz 14
Quadratisch konvergente Berechnung der Näherungsbrüche periodischer Kettenbrüche 16
Lambert und die Moderne 17
Die Lambert-Transformation einer Funktionenreihe in einen Funktionskettenbruch durch den Euklidschen Algorithmus im Polynomring 17
Umformungen des Lambertschen Kettenbruchs 19
Die Lambert-Transformation als 'vorausschauende teilweise Ausschöpfung' 19
Spezialfälle des Lambertschen Funktionskettenbruchs 20
Eine Methode von Evelyn Frank 21
Die Glaisher-Wynn Modifikation der Auswertung des Lambertschen Kettenbruchs 22
Vergleich der Leibniz-Reihe mit den Kettenbrüchen von Lambert und von Jung 23
Eine wichtige Identität von Leonhard Euler 25
Asymptotik 25
Limitärperiodische Kettenbrüche 25
Grenzkettenbrüche 26
Die Asymptotik des logarithmischen Fehlers 26
Lamberts Transformation der Logarithmus-Reihe 28
Lamberts Transformation für die hypergeometrische Reihe 29
Eulers Herleitung des Lambertschen Kettenbruchs aus einem Integral 29
Fazit 30
Index 31

„Die Kettenbrüche sind erst im 17. Jahrhundert aufgekommen. Die ältesten Spuren finden sich bei Dan. Schwenter, Wallis und vor allem Huygens. Der 'Euklidische Algorithmus' freilich geht wirklich auf Euklid zurück." (Oskar Perron, 1921)[1]

Die Anfänge: Der Euklidsche Algorithmus.

Der von Oskar Perron genannte Daniel Schwenter (1585–1636) war nur *einer* der ersten, die sich mit Kettenbrüchen beschäftigten. Er benutzte sie 1618, um Näherungsbrüche mit kleinen Zählern und Nennern zu erhalten. Dabei spielt der Euklidsche Algorithmus der fortgesetzten 'Wechselwegnahme'[2] eine zentrale Rolle, der üblicherweise dazu dient, den größten gemeinsamen Teiler $\mathrm{ggt}(a,b)$ zweier ganzer Zahlen a, b zu bestimmen:

$$\begin{aligned} 875/301 &= 2 + 273/301, \\ 301/273 &= 1 + 28/273, \\ 273/28 &= 9 + 21/28, \\ 28/21 &= 1 + 7/21\ , \\ 21/\mathbf{7} &= 3 + 0\ . \end{aligned}$$

Der größte gemeinsame Teiler ist sonach $\mathbf{7}$. Zusammengezogen ergibt die Rechnung

$$875/301 = 2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{9 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{3}}}}$$

oder kurz in der auf Moritz Abraham Stern (1833) zurückgehenden, von Pringsheim (1898), Peano (1903) und Perron (1913) bevorzugten Notation

$$875/301 = 2 + \frac{1\rfloor}{\lceil 1} + \frac{1\rfloor}{\lceil 9} + \frac{1\rfloor}{\lceil 1} + \frac{1\rfloor}{\lceil 3}\ ,$$

einen „regelmäßigen Kettenbruch" (Perron), engl. '*regular* (oder *simple*) *continued fraction*', dessen 'Teilzähler' sämtlich 1 sind und dessen 'Teilnenner' b_i sämtlich positive ganze Zahlen sind.

Die 'natürliche Berechnung' des Kettenbruchs geht rückwärts, von unten nach oben:

$$\begin{aligned} 1 + \tfrac{1}{3} &= \tfrac{4}{3} \\ 9 + \tfrac{3}{4} &= \tfrac{39}{4} \\ 1 + \tfrac{4}{39} &= \tfrac{43}{39} \\ 2 + \tfrac{39}{43} &= \tfrac{125}{43}\ . \end{aligned}$$

Sie ergibt den Bruch $875/301$ bereits in gekürzter Form $125/43 = 2.906976744\ldots$. Die Kettenbruchentwicklung von $125/43$ ergibt selbstverständlich die selben Teilnenner wie oben:

---

[1] Oskar Perron, *Irrationalzahlen*, de Gruyter 1921, S. 104.

[2] Euklid von Alexandria (um 365–300 v.Chr.), Buch VII.

$$\begin{aligned} 125/43 &= 2 + 39/43, \\ 43/39 &= 1 + 4/39, \\ 39/4 &= 9 + 3/4, \\ 4/3 &= 1 + 1/3\ . \\ 3/\mathbf{1} &= 3 + 0\ . \end{aligned}$$

und endet mit **1**, anzeigend daß Zähler und Nenner teilerfremd sind.

Zu den Zeiten von Schwenter wurden Kettenbrüche gerne benützt, um zu vorgegebenen Brüchen Näherungsbrüche mit kleineren Zählern und Nennern zu finden. Dazu wurde der Kettenbruch 'abgeschnitten': beispielsweise

$$\begin{aligned} &\text{aus } 2+\frac{1\rfloor}{\lceil 1}+\frac{1\rfloor}{\lceil 9}+\frac{1\rfloor}{\lceil 1} && \text{ergibt sich } 32/11 = 2.909090909\ , \\ &\text{aus } 2+\frac{1\rfloor}{\lceil 1}+\frac{1\rfloor}{\lceil 9} && \text{ergibt sich } 29/10 = 2.9\ , \\ &\text{aus } 2+\frac{1\rfloor}{\lceil 1} && \text{ergibt sich } 3/1 = 3\ . \end{aligned}$$

Die Folge der 'Näherungsbrüche' lautet also $\frac{3}{1}, \frac{29}{10}, \frac{32}{11}, \frac{125}{43}$.

Aus jedem Näherungsbruch können die davorliegenden Teilnenner durch den Euklidschen Algorithmus wiedergewonnen werden, etwa

$$\begin{aligned} 32/11 &= 2 + 10/11, & 29/10 &= 2 + 9/10, & 3/1 &= 2 + 1/1, \\ 11/10 &= 1 + 1/10, & 10/9 &= 1 + 1/9, & 1/\mathbf{1} &= 1 + 0\ . \\ 10/1 &= 9 + 1/1, & 9/\mathbf{1} &= 9 + 0\ . \\ 1/\mathbf{1} &= 1 + 0\ . \end{aligned}$$

Die banale Kettenbruchentwicklung für π. Um Näherungen für π zu erhalten, standen zunächst die klassischen Werte wie $\frac{22}{7}$ (Archimedes) und $\frac{377}{120}$ (Ptolemaios) zur Verfügung. Durch Subtraktion der Zähler und Nenner stellten um 1583 unabhängig voneinander Valentin Otho (um 1550–1605) und Adriaan Antoniszoon (um 1527–1607) die vorzügliche Näherung $\frac{355}{113} = 3.\underline{141592}920\ldots$ mit 6 richtigen Nachkomma-Dezimalstellen her — die in China schon um 480 von TsuChung-Chih gefunden worden war. Etwas systematischer gingen die Niederländer vor, Adriaen van Roomen (1561–1615) findet 1593 aus dem $15 \cdot 2^{24}$-Eck 15 Dezimalstellen, Ludolph van Ceulen (1540–1610) findet 1596 aus dem $15 \cdot 2^{37}$-Eck 20 Dezimalstellen, später (gedruckt 1615) aus dem $4 \cdot 2^{60}$-Eck 32 Dezimalstellen. Einen 35-stelligen Wert von van Ceulen (1621) benutzt schließlich 1633 Jan Storms (1559–1650) zur Kettenbruchentwicklung von π (und $\sqrt{\pi}$). Die Rechnung auf dieser Basis wurde häufig wiederholt, John Wallis (1616–1703) fand 1685 ('Tractatus de algebra') 35 Dezimalstellen, die sich als korrekt erwiesen, während Johann Heinrich Lambert (1728–1777) in der 26. Stelle ein Fehler unterlief. Christoph Grienberger (1561–1636) war 1630 einer der letzten, der die Methode des Archimedes weiterführte und 39 Dezimalstellen angab, bevor man weithin zur Berechnung mittels unendlicher Folgen, 1655 John Wallis (1616–1703) und Reihen, 1671 James Gregory (1638–1675) überging. Die Hoffnung, einen exakten rationalen Wert für π zu finden, war gestorben[3] als schließlich Lambert (1766) π als irrational, was schon Al-Bîrûnî (973–1048) vermutet hatte, bewies.

Die banale Entwicklung eines regelmäßigen Kettenbruchs für π auf der Basis irgendwie bereits erhaltener Näherungswerte von π beruht wieder auf dem Euklidschen Algorithmus: sie liefert bei ungekürzt rationaler Rechnung für die Näherung 3.1415926535 die Tafel 1. Der entstehende *abbrechende* Kettenbruch (seine Näherungsbrüche sind rechts aufgelistet) lautet

$$\widetilde{\pi} = 3+\frac{1\rfloor}{\lceil 7}+\frac{1\rfloor}{\lceil 15}+\frac{1\rfloor}{\lceil 1}+\frac{1\rfloor}{\lceil 292}+\frac{1\rfloor}{\lceil 1}+\frac{1\rfloor}{\lceil 1}+\frac{1\rfloor}{\lceil 6}+\frac{1\rfloor}{\lceil 2}+\frac{1\rfloor}{\lceil 13}+\frac{1\rfloor}{\lceil 3}+\frac{1\rfloor}{\lceil 1}+\frac{1\rfloor}{\lceil 12}+\frac{1\rfloor}{\lceil 3} = \frac{6283185307}{2000000000}\ .$$

In Abb. 1. ist der $^{10}\log$-Fehler-Graph (bezüglich $\widetilde{\pi}$) für diesen Kettenbruch aufgezeichnet[4]; man ersieht, wie etwa ab der Mitte des Kettenbruchs die Fehler kaum mehr abnehmen.[5]

---

[3] Noch 1983 glaubte jedoch der 75-jährige Hamburger Modellbaumeister Ottomar Zimmermann, den exakten Wert von π zu 31428/10000 gefunden zu haben.

[4] $^{10}\log|e_i|$ bezeichnet den Logarithmus des Betrags des absoluten Fehlers e_i nach i Schritten.

[5] Diese Beobachtung machte bereits Edmund Stone (ca. 1700–1768), *A New Mathematical Dictionary*, 1725.

$31415926535/1000000000 = \underline{3} + 1415926535/10000000000$	3.0000000000 000000000
$10000000000/1415926535 = \underline{7} + 88514255/1415926535$	3.1428571428 571428571
$1415926535/88514255 = \underline{15} + 88212710/88514255$	3.1415094339 622641509
$88514255/88212710 = \underline{1} + 301545/88212710$	3.1415929203 539823009
$88212710/301545 = \underline{292} + 161570/301545$	3.1415926530 119026041
$301545/161570 = \underline{1} + 139975/161570$	3.1415926539 214210447
$161570/139975 = \underline{1} + 21595/139975$	3.1415926534 674367055
$139975/21595 = 6 + 10405/21595$	3.1415926535 024134980
$21595/10405 = \underline{2} + 785/10405$	3.1415926534 999154597
$10405/785 = 13 + 200/785$	3.1415926535 000015997
$785/200 = \underline{3} + 185/200$	3.1415926534 999995187
$200/185 = \underline{1} + 15/185$	3.1415926535 000000294
$185/15 = 12 + 5/15$	3.1415926534 999999992
$15/\mathbf{5} = 3 + 0$	3.1415926535 000000000

Tafel 1. Entwicklung eines banalen Kettenbruchs für eine Näherung von π

Es zeigt sich hier der Einfluß des Abbrechfehlers: Korrekte Teilnenner sind unterstrichen, nur die ersten sechs der insgesamt 14 Teilnenner sind sämtlich korrekt. Jan Storms konnte aus dem 35-stelligen Wert von van Ceulen nur etwa 15 korrekte Kettenbruchterme bestimmen.

Der wahre banal entwickelte Kettenbruch für π, von dessen Teilnennern heute mindestens die ersten 17 Millionen (William R. Gosper, 1985) bekannt[6] und tabelliert sind, beginnt

$$\pi = 3+\frac{1}{\lfloor 7}+\frac{1}{\lfloor 15}+\frac{1}{\lfloor 1}+\frac{1}{\lfloor 292}+\frac{1}{\lfloor 1}+\frac{1}{\lfloor 1}+\frac{1}{\lfloor 1}+\frac{1}{\lfloor 2}+\frac{1}{\lfloor 1}+\frac{1}{\lfloor 3}+\frac{1}{\lfloor 1}+\frac{1}{\lfloor 14}+\frac{1}{\lfloor 2}+\frac{1}{\lfloor 1}+\frac{1}{\lfloor 1}+\frac{1}{\lfloor 2}+\dots\,.$$

In Abb. 2. ist der entsprechende ^{10}log-Fehler-Graph für 14 Terme des banal entwickelten π-Kettenbruchs aufgezeichnet; man sieht, daß die Fehler weiterhin abnehmen, man kann aber auch beobachten, wie sprunghaft die Fehlerkurve ist (Abb. 3): Beim Abbruch in der Nähe eines großen Teilnenners nimmt der Fehler stärker ab. Ein absoluter Fehler von $10^{-103.6434257966\cdots}$ wird nach 100 Schritten erzielt (Khintchine folgend: asymptotisch $10^{-i\cdot 1.0306408341007\cdots}$ nach 10^i Schritten).

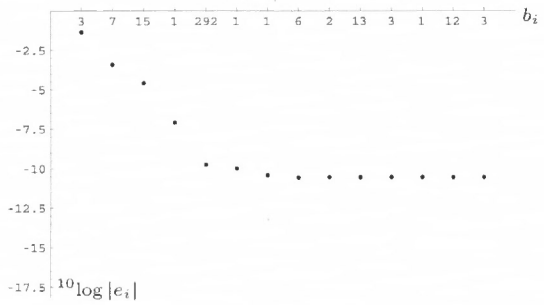


Abb. 1. ^{10}log-Fehler-*Graph für den Kettenbruch zum Näherungswert* 31415926535/10000000000

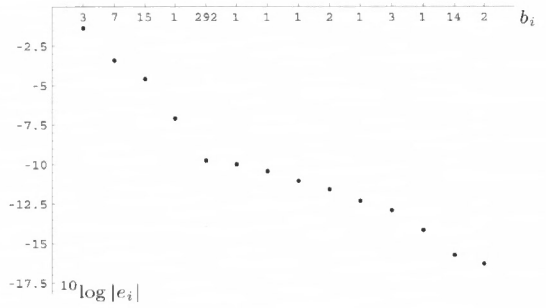


Abb. 2. ^{10}log-Fehler-*Graph für die ersten 14 Terme des banal entwickelten π-Kettenbruchs*

Die obige Berechnung zeigt überdies eine weitere Überraschung: Ein offensichtliches Bildungsgesetz für die Kettenbruchglieder ist nicht zu erkennen. Dies gilt bis heute, so weit man auch die Berechnung vorantrieb: '*Das allgemeine Bildungsgesetz der Teilnenner von π ist nicht bekannt*' (Oskar Perron 1912), '*Der volle Kettenbruch für π ist nicht bekannt*' (Donald E. Knuth 1967), '*... does not reveal any regular pattern* (Paolo Ribenboim 2000)'. Da aber in der Mathematik nichts so verrückt ist, daß es nicht vorkommen könnte, hat man die Suche noch nicht aufgegeben.

Sie ist ohnehin ein Glasperlenspiel ohne praktische Bedeutung. Denn es gibt Kettenbrüche mit einem beweisbaren Bildungsgesetz der Terme, die fast so schnell konvergieren wie der banal entwickelte Kettenbruch für π oder sogar schneller. Darauf werden wir bald zurückkommen.

[6] Die ersten 2000 im Buch von Jörg Arndt, Christoph Haenel, *Pi–Algorithmen, Computer, Arithmetik*. Springer, Berlin 2007. Dort findet sich weiteres Material zu modernen π-Berechnungen. Beispiel: Yasumasa Kanada von der Universität Tokyo berechnete π 1988 mit einer Hitachi auf 201 326 551 Dezimalen, 1997 auf 51 539 600 000, 1999 auf 206 158 430 000 und 2002 auf 1 241 100 000 000 Dezimalen — anscheinend der derzeitige Rekord.

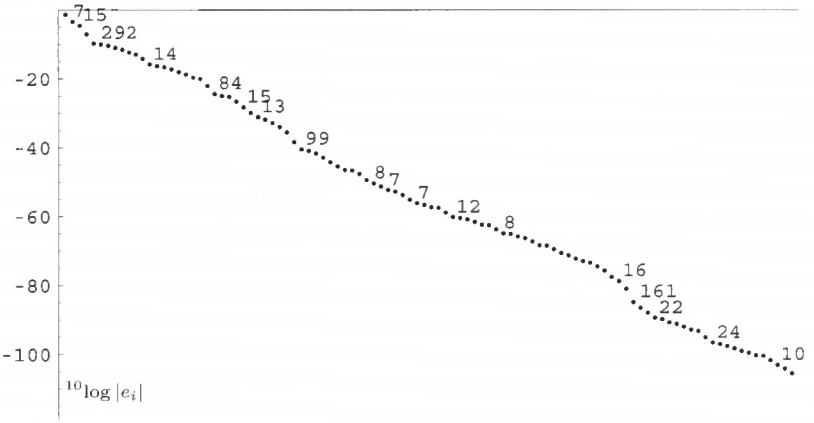


Abb. 3. ^{10}log-Fehler-*Graph für die ersten 100 Terme des banal entwickelten* π*-Kettenbruchs. Grob-linearer Verlauf, nach der 'Metrischen Theorie' von Alexander Khintchine (1894–1959).*

Banale Kettenbruchentwicklung für andere Irrationalzahlen. Auch für andere in der Mathematik gebräuchliche und vielgebrauchte irrationale reelle Zahlen gibt es regelmäßige Kettenbrüche mit einem beweisbaren Bildungsgesetz. Die ersten drei der nachfolgenden Beispiele sind quadratische Irrationalitäten, sie lassen sogar ein periodisches Bildungsgesetz erkennen, wie 1770 Joseph de Lagrange (1736–1813) in voller Allgemeinheit bewies:

$$\sqrt{2}-1 = \frac{1}{|2}+\frac{1}{|2}+\frac{1}{|2}+\frac{1}{|2}+\frac{1}{|2}+\frac{1}{|2}+\frac{1}{|2}+\frac{1}{|2}+\frac{1}{|2}+\frac{1}{|2}+\frac{1}{|2}+\frac{1}{|2}+\frac{1}{|2}+\frac{1}{|2}+\frac{1}{|2}+\frac{1}{|2}+\frac{1}{|2}+\frac{1}{|2}+\ldots,$$

$$\phi-1 = \frac{1}{|1}+\frac{1}{|1}+\frac{1}{|1}+\frac{1}{|1}+\frac{1}{|1}+\frac{1}{|1}+\frac{1}{|1}+\frac{1}{|1}+\frac{1}{|1}+\frac{1}{|1}+\frac{1}{|1}+\frac{1}{|1}+\frac{1}{|1}+\frac{1}{|1}+\frac{1}{|1}+\frac{1}{|1}+\frac{1}{|1}+\frac{1}{|1}+\ldots,$$

(wo $\phi = \frac{1}{2}(\sqrt{5}+1)$ die Zahl des Goldenen Schnitts ist),

$$\sqrt{3}-1 = \frac{1}{|1}+\frac{1}{|2}+\frac{1}{|1}+\frac{1}{|2}+\frac{1}{|1}+\frac{1}{|2}+\frac{1}{|1}+\frac{1}{|2}+\frac{1}{|1}+\frac{1}{|2}+\frac{1}{|1}+\frac{1}{|2}+\frac{1}{|1}+\frac{1}{|2}+\frac{1}{|1}+\frac{1}{|2}+\frac{1}{|1}+\ldots.$$

Obschon die Zahl e, wie Hermite 1873 bewiesen hat, transzendent ist, also nicht als Lösung einer algebraischen Gleichung darstellbar ist, hat sie — anders als π — einen regelmäßigen Kettenbruch mit offensichtlichem Bildungsgesetz, den 1737 Leonhard Euler (1707–1783) angab:

$$e-2 = \frac{1}{|1}+\frac{1}{|2}+\frac{1}{|1}+\frac{1}{|1}+\frac{1}{|4}+\frac{1}{|1}+\frac{1}{|1}+\frac{1}{|6}+\frac{1}{|1}+\frac{1}{|1}+\frac{1}{|8}+\frac{1}{|1}+\frac{1}{|1}+\frac{1}{|10}+\frac{1}{|1}+\frac{1}{|1}+\frac{1}{|12}+\ldots.$$

Weitere Beispiele für regelmäßige Kettenbrüche mit offensichtlichem Bildungsgesetz sind rationale Ausdrücke in e und Quadratwurzeln aus solchen, 1890 von Thomas Joannes Stieltjes (1856–1894) behandelt, 1895 von Karl Frithiof Sundman (1873–1949) eingehender untersucht:

$$e^2-7 = \frac{1}{|2}+\frac{1}{|1}+\frac{1}{|1}+\frac{1}{|3}+\frac{1}{|18}+\frac{1}{|5}+\frac{1}{|1}+\frac{1}{|1}+\frac{1}{|6}+\frac{1}{|30}+\frac{1}{|8}+\frac{1}{|1}+\frac{1}{|1}+\frac{1}{|9}+\frac{1}{|42}+\frac{1}{|11}+\frac{1}{|1}+\frac{1}{|1}+\ldots,$$

$$\sqrt{e}-1 = \frac{1}{|1}+\frac{1}{|1}+\frac{1}{|1}+\frac{1}{|5}+\frac{1}{|1}+\frac{1}{|1}+\frac{1}{|9}+\frac{1}{|1}+\frac{1}{|1}+\frac{1}{|13}+\frac{1}{|1}+\frac{1}{|1}+\frac{1}{|17}+\frac{1}{|1}+\frac{1}{|1}+\frac{1}{|21}+\frac{1}{|1}+\ldots.$$

So wie der banal entwickelte Kettenbruch für π jedoch zum Zoo nutzloser Kuriositäten gehört, so gehört dorthin ebenfalls der ohne offensichtliches Bildungsgesetz für $\sqrt{\pi}$ und der für π^e:

$$\sqrt{\pi}-1 = \frac{1}{|1}+\frac{1}{|3}+\frac{1}{|2}+\frac{1}{|1}+\frac{1}{|1}+\frac{1}{|6}+\frac{1}{|1}+\frac{1}{|28}+\frac{1}{|13}+\frac{1}{|1}+\frac{1}{|1}+\frac{1}{|2}+\frac{1}{|18}+\frac{1}{|1}+\frac{1}{|1}+\frac{1}{|1}+\frac{1}{|83}+\ldots,$$

$$\pi^e-22 = \frac{1}{|2}+\frac{1}{|5}+\frac{1}{|1}+\frac{1}{|1}+\frac{1}{|1}+\frac{1}{|1}+\frac{1}{|1}+\frac{1}{|3}+\frac{1}{|2}+\frac{1}{|1}+\frac{1}{|1}+\frac{1}{|3}+\frac{1}{|9}+\frac{1}{|15}+\frac{1}{|25}+\frac{1}{|1}+\frac{1}{|1}+\frac{1}{|5}+\ldots,$$

aber ebenso der für die algebraische Zahl $\sqrt[3]{2}$, mit dem sich Perron erfolglos herumgeschlagen hat:

$$\sqrt[3]{2}-1 = \frac{1}{|3}+\frac{1}{|1}+\frac{1}{|5}+\frac{1}{|1}+\frac{1}{|1}+\frac{1}{|4}+\frac{1}{|1}+\frac{1}{|1}+\frac{1}{|8}+\frac{1}{|1}+\frac{1}{|14}+\frac{1}{|1}+\frac{1}{|10}+\frac{1}{|2}+\frac{1}{|1}+\frac{1}{|4}+\frac{1}{|12}+\frac{1}{|2}+\ldots.$$

Lediglich stochastische Aussagen lassen sich für banal entwickelte regelmäßige Kettenbrüche ohne Bildungsgesetz machen, nämlich daß der Grenzwert $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{b_1 \cdot b_2 \cdot \ldots \cdot b_n} = K$ mit einer Wahrscheinlichkeit 1 existiert und den Wert 2.68545 20010 65306 445... besitzt, wie 1935 Alexander Khintchine gezeigt hat.[7] Daß dies für Kettenbrüche mit Bildungsgesetz nicht gilt, zeigen die oben gegebenen Beispiele, wobei für die quadratische Irrationalität ϕ der Grenzwert $=1$ ist; für e der Ausdruck, wie Derrick Henry Lehmer 1939 bemerkt hat, über alle Grenzen geht.

Von Archimedes bis Cataldi: Vorläufer in der Antike und Renaissance.

Kettenbrüche haben eine weit zurückreichende Geschichte. Sie beginnt mit den ersten Versuchen, Näherungsbrüche für Quadratwurzeln $\sqrt{N}$ aus positiven ganzen, allenfalls rationalen Zahlen, die nicht Quadrate sind, zu finden. Vereinzelte Beispiele finden sich schon früh, so bei[8] Archimedes von Syrakus (287 v. Chr.–212 v. Chr.):

$$\frac{265}{51} = 5 + \frac{1|}{|5} + \frac{1|}{|10} < \sqrt{27} < 5 + \frac{1|}{|5} + \frac{1|}{|10} + \frac{1|}{|5} = \frac{1351}{260} \ .$$

Diophantos von Alexandria (um 250 v. Chr.) benützte bereits den Kettenbruch für $\sqrt{3}$

$$1 + \frac{1|}{|1} + \frac{1|}{|2} + \frac{1|}{|1} + \frac{1|}{|2} + \frac{1|}{|1} + \frac{1|}{|2} + \frac{1|}{|1} + \frac{1|}{|2} + \frac{1|}{|1} + \frac{1|}{|2} + \frac{1|}{|1}$$

mit den Näherungsbrüchen (die ersten zwölf stehen schon bei Diophantos)

$$\tfrac{1}{1}, \tfrac{2}{1}, \tfrac{5}{3}, \tfrac{7}{4}, \tfrac{19}{11}, \tfrac{26}{15}, \tfrac{71}{41}, \tfrac{97}{56}, \tfrac{265}{153}, \tfrac{362}{209}, \tfrac{989}{571}, \tfrac{1351}{780}, \tfrac{3691}{2131}, \tfrac{5042}{2911}, \tfrac{13775}{7953}, \tfrac{18817}{10864}, \tfrac{51409}{29681}, \tfrac{70226}{40545}, \tfrac{191861}{110771}, \ldots$$

die $\sqrt{3}$ abwechselnd von unten und von oben einschließen. Dieser Kettenbruch ist periodisch mit der Periodenlänge 2. Er kann rein algebraisch in den periodischen mit der Periodenlänge 1

$$1 + \frac{2|}{|2} + \frac{2|}{|2} + \frac{2|}{|2} + \frac{2|}{|2} + \frac{2|}{|2} + \frac{2|}{|2} + \frac{2|}{|2} + \frac{2|}{|2} + \frac{2|}{|2} + \frac{2|}{|2} + \frac{2|}{|2} + \frac{2|}{|2}$$

mit den selben (gekürzten) Näherungsbrüchen umgeformt werden. Die Faktorzerlegung der Zähler und Nenner jedes *dritten* der Näherungsbrüche bietet übrigens eine Überraschung:

$$\tfrac{5}{3} = \mathbf{\tfrac{1}{1}} \cdot \tfrac{5}{3}, \ \tfrac{26}{15} = \mathbf{\tfrac{2}{1}} \cdot \tfrac{13}{15}, \ \tfrac{265}{153} = \mathbf{\tfrac{5}{3}} \cdot \tfrac{53}{51}, \ \tfrac{1351}{780} = \mathbf{\tfrac{7}{4}} \cdot \tfrac{193}{195}, \ \tfrac{13775}{7953} = \mathbf{\tfrac{19}{11}} \cdot \tfrac{725}{723}, \ \tfrac{70226}{40545} = \mathbf{\tfrac{26}{15}} \cdot \tfrac{2701}{2703} \ .$$

Übrigens gilt auch $\frac{70226}{40545} = \frac{26}{15} \cdot \frac{37}{51} \cdot \frac{73}{53}$, was sich noch im 18. Jh. zu mechanischen Zahnradübersetzungen ausdeuten ließ[9].

Es stellt sich die Frage: Wie geht das in sonstigen Fällen? Gilt ähnliches auch für $\sqrt{27}$? Der von Cataldi stammende Kettenbruch für $\sqrt{27}$ lautet mit 6 Gliedern

$$5 + \frac{1|}{|5} + \frac{1|}{|10} + \frac{1|}{|5} + \frac{1|}{|10} + \frac{1|}{|5} \qquad \text{oder} \qquad 5 + \frac{2|}{|10} + \frac{2|}{|10} + \frac{2|}{|10} + \frac{2|}{|10} + \frac{2|}{|10}$$

und hat die Näherungsbrüche

$$\tfrac{5}{1}, \tfrac{26}{5}, \tfrac{265}{51}, \tfrac{1351}{260}, \tfrac{13775}{2651}, \tfrac{70226}{13515}, \tfrac{716035}{137801}, \tfrac{3650401}{702520}, \tfrac{37220045}{7163001}, \tfrac{189750626}{36517525}, \tfrac{1934726305}{372338251}, \tfrac{9863382151}{1898208780}, \ldots \ ;$$

wenn man jeden *dritten* der Näherungsbrüche für $\sqrt{3}$ mit 3 multipliziert ($\sqrt{27} = 3\sqrt{3}$), erhält man die gleiche Folge. Die Berechnung von $\frac{1}{3}\sqrt{27}$ braucht weniger Schritte als die Berechnung von $\sqrt{3}$:

$$\sqrt{3}: \quad \tfrac{1}{1}, \tfrac{2}{1}, \tfrac{5}{3}, \tfrac{7}{4}, \tfrac{19}{11}, \tfrac{26}{15}, \tfrac{71}{41}, \tfrac{97}{56}, \tfrac{265}{153}, \tfrac{362}{209}, \tfrac{989}{571}, \tfrac{1351}{780}, \tfrac{3691}{2131}, \tfrac{5042}{2911}, \tfrac{13775}{7953}, \tfrac{18817}{10864}, \tfrac{51409}{29681}, \tfrac{70226}{40545}, \ldots \ ,$$

$$\tfrac{1}{3}\sqrt{27}: \quad \tfrac{5}{3}, \quad \tfrac{26}{15}, \quad \tfrac{265}{153}, \quad \tfrac{1351}{780}, \quad \tfrac{13775}{7953}, \quad \tfrac{70226}{40545}, \ldots \ .$$

Und die Faktorzerlegung zeigt wieder die Überraschung für jeden *dritten* Näherungsbruch:

$$\tfrac{265}{51} = \mathbf{\tfrac{5}{1}} \cdot \tfrac{53}{51}, \ \tfrac{70226}{13515} = \mathbf{\tfrac{26}{5}} \cdot \tfrac{2701}{2703}, \ \tfrac{37220045}{7163001} = \mathbf{\tfrac{265}{51}} \cdot \tfrac{140453}{140451}, \ \tfrac{9863382151}{1898208780} = \mathbf{\tfrac{1351}{260}} \cdot \tfrac{7300801}{7300803} \ .$$

Die Näherung $\sqrt{n^2+r} - n \approx \frac{r}{2n}$ war schon zu den Zeiten von Heron von Alexandria (1. Jh.) bekannt. In einem indischen Manuskript aus dieser Zeit, das erst 1881 in Bakhsālī, nahe Peshawar ausgegraben wurde, finden sich bereits Näherungen, die in heutiger Schreibweise lauten

---

[7] A. Ya. Khintchine, *Metrische Kettenbruchprobleme*, Compositio Mathematica 1 (1935), S. 361–382.

[8] Herbert Westren Turnbull, *The great mathematicians*, Methuen, London 1929.

[9] Christiaan Huygens, *Opescula pästhumus*. Lugdumi Batavorum, 1703.

$$C_1 = n + \frac{r}{|2n} = n + \frac{r}{2n}, \quad C_3 = n + \frac{r}{|2n} + \frac{r}{|2n} + \frac{r}{|2n} = n + \frac{r}{2n} \cdot \frac{4n^2 + r}{4n^2 + 2r}$$

und die sich $\sqrt{n^2 + r}$ von oben annähern. Eine Annäherung von unten findet sich erst bei Al-Qalasādī (†1486)

$$C_2 = n + \frac{r}{|2n} + \frac{r}{|2n} = n + \frac{2nr}{4n^2 + r} \ .$$

Die Werte der Näherungsbrüche für $\sqrt{2}$ mit $n=r=1$ lauten $C_0=\frac{1}{1}$, $C_1=\frac{3}{2}$, $C_2=\frac{7}{5}$, $C_3=\frac{17}{12}$; sie wurden bereits von Theon von Smirna (ca. 130–ca. 160) angegeben. Auch in den Werken von Leonardo Fibonacci (1170–1240), der die Mathematik ins Abendland brachte, und Fra Luca Paciolo (1445–1514) finden sich Kettenbrüche.

Bombelli und Cataldi. Bis ins 16. Jahrhundert hatten Kettenbrüche mehr den Charakter von Zauberkunststücken. Systematisch wurden sie erstmals untersucht von Rafael Bombelli (1526–1572), am bekanntesten als Begründer der Lehre von den komplexen Zahlen, der 1572 einen regelrechten Algorithmus für die Entwicklung eines unendlichen Kettenbruchs zur Berechnung der Quadratwurzel aus einer ganzen Zahl N angab. Für $\sqrt{N}$ bestimmt er n derart, daß $n^2 \leq N < (n+1)^2$, bildet $r = N - n^2$, wobei $r \geq 0$, und sodann in einem sich wiederholenden Spiel

$$\sqrt{N} = n + \frac{r}{|2n} + \frac{r}{|2n} + \frac{r}{|2n} + \frac{r}{|2n} + \frac{r}{|2n} + \frac{r}{|2n} + \dots$$

wie wir heute für den 'unendlichen Kettenbruch' schreiben. Bombelli führt das nur beispielhaft für $N = 13$ durch; mit $n = 3$ und $r = 4$ erhält er

$$\sqrt{13} = 3 + \frac{4}{|6} + \frac{4}{|6} + \frac{4}{|6} + \frac{4}{|6} + \frac{4}{|6} + \frac{4}{|6} + \frac{4}{|6} + \frac{4}{|6} + \dots ,$$

mit den (gekürzten) Näherungsbrüchen $\frac{3}{1}$, $\frac{11}{3}$, $\frac{18}{5}$, $\frac{119}{33}$, $\frac{393}{109}$, $\frac{649}{180}$, $\frac{4287}{1189}$, $\frac{14159}{3927}$, $\frac{23382}{16485}$, $\frac{154451}{42837}$, $\dots$, die unendliche Fortsetzung beschreibt er als '*... e procendo si approssimarà quanta l'huomo vorrà*' (setze die Näherung fort so weit irgendjemand es will). Bombelli nennt in seinem Werk "*L'Algebra parte maggiore dell'arithmetica divisa in tre libri*", Bologna 1572, Fibonacci und Fra Luca Pacioli als Vorläufer. Ob er die elementar beweisbare Identität $\sqrt{N} = n + \frac{r}{2n+(\sqrt{N}-n)}$, also $\sqrt{N} - n = \frac{r}{\sqrt{N}+n}$, d.h. $N - n^2 = r$ explizit benutzt hat, ist nicht feststellbar.

Für $\sqrt{13}$ existiert neben Bombellis Kettenbruch auch ein regelmäßiger ('regulärer') Kettenbruch (mit Teilzählern 1) der Periode 5:

$$\sqrt{13} = 3 + \frac{1}{|1} + \frac{1}{|1} + \frac{1}{|1} + \frac{1}{|1} + \frac{1}{|6} + \frac{1}{|1} + \frac{1}{|1} + \frac{1}{|1} + \frac{1}{|1} + \frac{1}{|6} + \frac{1}{|1} + \dots .$$

Die Näherungsbrüche $\frac{3}{1}, \frac{4}{1}, \frac{7}{2}, \frac{11}{3}, \frac{18}{5}, \frac{119}{33}, \frac{137}{38}, \frac{256}{71}, \frac{393}{109}, \frac{649}{180}, \frac{4287}{1189}, \frac{4936}{1369}, \frac{9223}{2558}, \frac{14159}{3927}, \frac{23382}{6485}, \frac{154451}{42837}, \dots$ stimmen nicht mit denen des Kettenbruchs von Bombelli überein. Der zu einer quadratischen Irrationalität gehörende ganzzahlige Kettenbruch ist nicht eindeutig bestimmt. Und der reguläre Kettenbruch, so beliebt er auch bei den Theoretikern ist, konvergiert genau dann langsamer, wenn seine Periode größer als Zwei ist (für $N = 7, 13, 14, 19, 21, 22, 23, 28, 29, 31, 32, 33, 34, \dots$).

Für das Beispiel $\sqrt{13}$ gilt, daß Bombellis Kettenbruch die Näherungen $\frac{4}{1}, \frac{7}{2}, \frac{137}{38}, \frac{256}{71}, \frac{4936}{1369}, \frac{9223}{2558}$ des regelmäßigen Kettenbruchs überspringt. Wohl aber gibt es nun eine Faktorisierung des 15. Näherungsbruchs von $\sqrt{13}$: $\frac{23382}{6485} = \mathbf{\frac{18}{5}} \cdot \frac{1299}{1297}$.

Der wirkliche Entdecker ('*The real discoverer*', Claude Brezinski) einer Theorie der Kettenbrüche war jedoch Pietro Antonio Cataldi (1548–1626), wie Bombelli Professor der Mathematik und Astronomie an der Universität Bologna. Über Bombelli hinausgehend, entwickelte er erstmals einen Symbolismus für Kettenbrüche und gab einige ihrer Eigenschaften; seine Resultate erschienen in einem kleinen Büchlein "*Trattato del modo brevissimodi trovare la radice quadra delli numeri*", Bologna 1613. Kind seiner Zeit, gibt er noch keine konzisen formelmäßigen Beschreibungen und schildert wie Bombelli sein Verfahren durch suggestive Beispiele, etwa für

$\sqrt{18} = 4 + \frac{2}{|8} + \frac{2}{|8} + \frac{2}{|8} + \dots$; er setzt das Verfahren numerisch bis zum 15. Näherungsbruch

fort und beweist, daß die Näherungsbrüche abwechselnd größer und kleiner als $\sqrt{18}$ sind und diesem Wert (monoton) zustreben. Cataldi schreckt auch vor umfangreichen Rechnungen nicht zurück, er gibt für $\sqrt{78}-8$ den (gekürzten) 24. Näherungsbruch $\frac{307376382593588549068368 1}{369548983412298550212624 0}$ an.

Periodische regelmäßige Kettenbrüche. Die Frage mag sich oben gestellt haben: Wann ist ein regelmäßiger Kettenbruch

$$\frac{1\,|}{|\,b_1}+\frac{1\,|}{|\,b_2}+\frac{1\,|}{|\,b_3}+\frac{1\,|}{|\,b_4}+\frac{1\,|}{|\,b_5}+\frac{1\,|}{|\,b_6}+\frac{1\,|}{|\,b_7}+\frac{1\,|}{|\,b_8}+\frac{1\,|}{|\,b_9}+\ldots$$

periodisch? Sei U sein Wert, und ist der Kettenbruch periodisch mit einer Periode k, dann gilt

$$U=\frac{1\,|}{|\,b_1}+\frac{1\,|}{|\,b_2}+\frac{1\,|}{|\,b_3}+\frac{1\,|}{|\,b_4}+\frac{1\,|}{|\,b_5}+\frac{1\,|}{|\,b_6}+\ \ldots\ +\frac{1\,|}{|\,b_k}+\frac{1\,|}{|\,b_1}+\frac{1\,|}{|\,b_2}+\frac{1\,|}{|\,b_3}+\ldots \quad \text{oder}$$

$$U=\frac{1\,|}{|\,b_1}+\frac{1\,|}{|\,b_2}+\frac{1\,|}{|\,b_3}+\frac{1\,|}{|\,b_4}+\frac{1\,|}{|\,b_5}+\frac{1\,|}{|\,b_6}+\ \ldots\ +\frac{1\,|}{|\,b_k}+U\ ;$$

U genügt einer algebraischen Gleichung, ist also eine algebraische, im allgemeinen irrationale Zahl. Für die ersten drei der obigen Beispiele ergibt sich

$$U=\tfrac{1}{2+U}, \quad \text{also } U^2+2U=1 \quad \text{mit der positiven Lösung} \quad U=\sqrt{2}-1\ ,$$

$$U=\tfrac{1}{1+U}, \quad \text{also } U^2+U\ =1 \quad \text{mit der positiven Lösung} \quad U=\tfrac{\sqrt{5}-1}{2}\ ,$$

$$U=\tfrac{1}{1+\frac{1}{2+U}}, \quad \text{also } U^2+2U=2 \quad \text{mit der positiven Lösung} \quad U=\sqrt{3}-1\ .$$

Für die Fälle, daß die Periode 1 oder 2 ist, ergibt sich eine quadratische Gleichung, also ist U eine quadratische Irrationalität. Nach Lagrange (1770) gilt dies auch für beliebig lange Perioden[10].

Sei nun unwissentlich eine quadratische Irrationalität U abgerundet gegeben, etwa 9-stellig $\tilde{U}=0.414213562$. Die banale Kettenbruchentwicklung durch Wechselwegnahme zeigt Tafel 2.

414213562/1000000000	= 0 + 414213562/1000000000
1000000000/414213562	= 2 + 171572876/414213562
414213562/171572876	= 2 + 71067810/171572876
171572876/71067810	= 2 + 29437256/71067810
71067810/29437256	= 2 + 12193298/29437256
29437256/12193298	= 2 + 5050660/12193298
12193298/5050660	= 2 + 2091978/5050660
5050660/2091978	= 2 + 866704/2091978
2091978/866704	= 2 + 358570/866704
866704/358570	= 2 + 149564/358570
358570/149564	= 2 + 59442/149564
149564/59442	= 2 + 30680/59442
59442/30680	= 1 + 28762/30680
30680/28762	= 1 + 1918/28762
28762/1918	= 14 + 1910/1918
1918/1910	= 1 + 8/1910
1910/8	= 238 + 6/8
8/6	= 1 + 2/6
6/**2**	= 3 + 0

Tafel 2. Entwicklung eines banalen Kettenbruchs für 0.414213562

Die Kettenbruchentwicklung bestätigt in den ersten 11 von insgesamt 19 Schritten den naheliegenden Verdacht, daß $b_i=2$ für alle i und die wahre Periode 1 ist; wobei die sodann folgende Abweichung durch den Abbrechfehler nach der 9. Stelle hervorgerufen wird. Tatsächlich haben wir für U die quadratische Irrationalität $\sqrt{2}-1=0.41421\,35623\,73\ldots$ gewählt.

[10] J. L. Lagrange, *Addition au mémoire sur la résolution des équations numériques.* Mém. Acad. Sci. Berlin 24 (1770), S. 111-180.

Das Beispiel zeigt, wie empfindlich die Methode der banalen Entwicklung des Kettenbruchs gegen Abbrechfehler ist. Eine Faustregel besagt, daß nur etwa die erste Hälfte der Kettenbruchnenner (mit stochastischen Schwankungen) richtig bestimmt wird. Nicht nur führt die banale Kettenbruchentwicklung durch Wechselwegnahme für π zu keinem Bildungsgesetz und zu einer sprunghaften Fehlerkurve, sie scheint auch für Kettenbrüche mit Bildungsgesetz nichts zu taugen.

Obwohl übrigens (bisher) niemand den banalen Kettenbruch für π zur Gänze kennt, wird er oft gedankenlos als *der* Kettenbruch für π bezeichnet.

Darstellung der Näherungsbrüche in geschlossener Form. Was Cataldi noch nicht wußte — es taucht in der Literatur erst in der zweiten Hälfte des 19. Jahrhunderts bei Moret-Blanc auf[11] und wird unter anderem 1874 von Siegmund Günther benutzt[12] und etwas umständlich hergeleitet:

Für den periodischen Kettenbruch der Periodenlänge 1 mit positiven, nicht-verschwindenden a, b

$$\frac{a\rfloor}{\lceil b} + \frac{a\rfloor}{\lceil b} + \frac{a\rfloor}{\lceil b} + \frac{a\rfloor}{\lceil b} + \frac{a\rfloor}{\lceil b} + \frac{a\rfloor}{\lceil b} + \dots .$$

existiert eine geschlossene Form der ungekürzten Näherungsbrüche:

$$\frac{A_i}{B_i} = a \cdot \frac{\xi_1^i - \xi_2^i}{\xi_1^{i+1} - \xi_2^{i+1}} ,$$

$$\text{wo} \quad \xi_{1,2} = \frac{b \pm \sqrt{4a + b^2}}{2} \quad , \quad \text{also} \quad \xi_\mu^2 = b \cdot \xi_\mu + a \quad \text{und} \quad \xi_\mu^{i+2} = b \cdot \xi_\mu^{i+1} + a \cdot \xi_\mu \quad (\mu = 1, 2) .$$

Ein elementarer Beweis kann folgendermaßen geschehen:

$$\frac{A_1}{B_1} = a \cdot \frac{\xi_1 - \xi_2}{\xi_1^2 - \xi_2^2} = a \cdot \frac{1}{\xi_1 + \xi_2} = \frac{a}{b} \quad ;$$

$$a \;/\; (b + \frac{A_i}{B_i}) = a \;/\; (b + a \cdot \frac{\xi_1^i - \xi_2^i}{\xi_1^{i+1} - \xi_2^{i+1}}) = a \cdot \frac{\xi_1^{i+1} - \xi_2^{i+1}}{(b \cdot \xi_1^{i+1} + a \cdot \xi_1^i) - (b \cdot \xi_2^{i+1} + a \cdot \xi_2^i)}$$

$$= a \cdot \frac{\xi_1^{i+1} - \xi_2^{i+1}}{\xi_1^{i+2} - \xi_1^{i+2}} = \frac{A_{i+1}}{B_{i+1}} \quad .$$

Lineare Konvergenz der Cataldischen Kettenbrüche. Bombellis Kettenbruch für $\sqrt{13} - 3$ mit $r = 4$, $n = 3$ zeigt ein gutes, nämlich lineares Konvergenzverhalten: der Betrag des Fehlers $e_i = A_i/B_i - (\sqrt{13} - 3)$ nimmt schrittweise um einen Faktor ab, der im Limes gegen 1/10.90832691... geht:

i	A_i	B_i	A_i/B_i	A_i/B_i	$A_i/B_i - (\sqrt{13} - 3)$	Fehlerquotient
1	4	6	2/3	0.66666666...	0.0611153912026773...	
2	24	40	6/10	0.6	−0.0055512754639892...	1/11.00925213...
3	160	264	20/33	0.60606060...	0.0005093305966167...	1/10.89915960...
4	1056	1744	66/109	0.60550158...	−0.0000466883080259...	1/10.90916802...
5	6976	11529	218/360	0.60555555...	0.0000042800915662...	1/10.90824981...
6	46080	76096	720/1189	0.60555088...	−0.0000003923689514...	1/10.90833398...
7	304384	502656	2378/3927	0.60555127...	0.0000000359696750...	1/10.90832629...
8	2010624	3320320	3927/6485	0.60555127...	−0.0000000032974511...	1/10.90832697...
			$\sqrt{13} - 3$	0.605551275...	0	1/10.90832691...

Desgleichen für Cataldis Kettenbruch für $\sqrt{18} - 4$ mit $r = 2$, $n = 4$; der Betrag des Fehlers $A_i/B_i - (\sqrt{18} - 4)$ nimmt schrittweise um einen Faktor ab, der im Limes gegen 1/33.97056274... geht:

[11] Seltsamerweise führt Oskar Perron auch in der 3. Auflage seines Buches von 1913 dieses Ergebnis nicht auf.

[12] Siegmund Günther, *Vergleichung zweier Methoden zur näherungsweisen Bestimmung irrationaler Größen.* In: Sitzungsberichte der physikalisch-medizinischen Societät zu Erlangen, 6. Heft, Erlangen 1874.

i	A_i	B_i	A_i/B_i	A_i/B_i	$A_i/B_i-(\sqrt{18}-4)$	Fehlerquotient
1	2	8	1/4	0.25	0.00735931288071485...	
2	16	66	8/33	0.24242424...	−0.0002164446950427...	1/34.00089283...
3	132	544	33/136	0.24264705...	0.0000063717042442...	1/33.96967071...
4	1088	4484	272/1121	0.24264049...	−0.0000001875653154...	1/33.97058900...
5	8968	36960	1121/4620	0.24264069...	0.0000000055214074...	1/33.97056197...
6	73920	304648	9240/38081	0.24264068...	−0.0000000001625350...	1/33.97056277...
7	609296	2511104	38081/156944	0.24264068...	−0.0000000000047845...	1/33.97056274...
8	5022208	20698128	313888/1293633	0.24264068...	−0.0000000000001408...	1/33.97056274...
			$\sqrt{18}-4$	0.2426406871...	0	1/33.97056274...

Die Näherungsbrüche des Bombelli-Cataldischen Kettenbruchs

$$\sqrt{N}-n=\cfrac{r}{\lceil 2n\rfloor+\cfrac{r}{\lceil 2n\rfloor+\cfrac{r}{\lceil 2n\rfloor+\cfrac{r}{\lceil 2n\rfloor+\cfrac{r}{\lceil 2n\rfloor+\cfrac{r}{\lceil 2n\rfloor+\dots}}}}}}$$

lauten in geschlossener Form $\dfrac{A_i}{B_i}=r\cdot\dfrac{\xi_1^i-\xi_2^i}{\xi_1^{i+1}-\xi_2^{i+1}}$, wo $\xi_{1,2}=\dfrac{2n\pm\sqrt{4r+4n^2}}{2}=n\pm\sqrt{N}$.

Der Fehler im i-ten Näherungsbruch beträgt

$$e_i=\frac{A_i}{B_i}-(\sqrt{N}-n)=\frac{A_i(z)-(\sqrt{N}-n)\cdot B_i(z)}{B_i(z)}=r\cdot\frac{(\xi_1^i-\xi_2^i)-(1/\xi_1)\cdot(\xi_1^{i+1}-\xi_2^{i+1})}{\xi_1^{i+1}-\xi_2^{i+1}}$$
$$=r\cdot\frac{\xi_2-\xi_1}{\xi_1\xi_2}\cdot\frac{\xi_2^{i+1}}{\xi_1^{i+1}}\cdot\frac{1}{1-(\xi_2/\xi_1)^{i+1}}=r\cdot\left(\frac{\xi_2}{\xi_1}\right)^{i+1}\cdot\frac{1}{1-(\xi_2/\xi_1)^{i+1}}$$

Der Grenzwert η des Fehlerquotienten ergibt sich zu $\eta=\lim_{i\to\infty}\left|\dfrac{e_{i+1}(z)}{e_i(z)}\right|=\left|\dfrac{\xi_2}{\xi_1}\right|$.

Der Limes des reziproken Fehlerquotienten, also des Divisors $\left|\dfrac{\xi_1}{\xi_2}\right|$, der asymptotisch für die Abnahme des Fehlers verantwortlich ist, beträgt

$$q(n,r)=\left|\frac{\xi_1}{\xi_2}\right|=\frac{\sqrt{N}+n}{\sqrt{N}-n}=\frac{(\sqrt{N}+n)^2}{N-n^2}=\frac{(\sqrt{N}+n)^2}{r}=\frac{N+n^2+2n\sqrt{N}}{r}=\frac{2n^2+r+2n\sqrt{n^2+r}}{r}$$
$$=1+2\cdot\tfrac{n^2}{r}\cdot(1+\sqrt{1+\tfrac{r}{n^2}}),\ \text{er wächst monoton mit } \tfrac{n^2}{r} \text{ und geht asymptotisch wie } 2+4\tfrac{n^2}{r}.$$

Bombellis Kettenbruch für $\sqrt{13}-3$ mit r=4, n=3 zeigt $q(3,4)=(3+\sqrt{13})^2/4=10.90832691\dots$,
Cataldis Kettenbruch für $\sqrt{18}-4$ mit r=2, n=4 zeigt $q(4,2)=(4+\sqrt{18})^2/2=33.97056274\dots$.

Eulers Irreleitung und Perrons Versehen

Reihendarstellung reeller Zahlen und Konvergenzverbesserung. Die gemeinhin als Leibnizsche Reihe bezeichnete Zahlreihe $\frac{\pi}{4}=1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\frac{1}{9}-\frac{1}{11}\pm\dots$ war schon gegen Ende des 14. Jh. in Indien bekannt (Mādhava, 1340–1425), aber die Kenntnisse darüber, die 1836 nach Mitteleuropa kamen, wurden weitere 100 Jahre übersehen. Nach Leibniz (1674) hätte jedoch schon früher die Reihe nicht benannt werden sollen, denn sie ergibt sich für $y=1$ aus der 1671 von James Gregory (1638–1675) entdeckten Funktionsreihe des Arcus Tangens

$$\arctan y=y-\frac{y^3}{3}+\frac{y^5}{5}-\frac{y^7}{7}+\frac{y^9}{9}-\frac{y^{11}}{11}\pm\dots\ .$$

Die Konvergenz der Gregory-Leibniz-Reihe für $y=1$ ist miserabel. Zu Leibniz' Zeiten hatte man dafür noch keine Erklärung, aber da $\{y:|y|<1\}$ das Konvergenzgebiet der Reihe ist, muß man auf dessen Rand Schlimmes erwarten.

In Indien aber war man dem Phänomen schon längst auf der Spur. Nīlakaṇṭha (1444–1544) fand im 15. Jahrhundert, daß die Folge mit einer Korrektur des jeweils letzten Gliedes, etwa

$$\{1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\frac{1}{9}-\frac{1}{11}\pm\dots\mp(\frac{1}{2N-1}-\frac{1}{4N})\}$$

wesentlich besser konvergiert. Das ist aus folgender Rechnung ersichtlich ($\frac{\pi}{4} = 0.785398163397\ldots$)

N	Leibniz	Fehler	Fehlerbetrag	Nîlakaṇṭha	Fehler	Fehlerbetrag
1	1	+0.214601836...	1/4.6597...	3/4	−0.035398163...	1/28.25005...
2	2/3	−0.118731496...	1/8.4223...	19/24	0.006268503...	1/159.5277...
3	13/15	+0.081268503...	1/12.304...	47/60	−0.002064830...	1/484.3013...
4	76/105	−0.061588639...	1/16.236...	1321/1680	0.000911360...	1/1097.260...
5	263/315	+0.049522471...	1/20.192...	989/1260	−0.000477529...	1/2094.115...
6	2578/3465	−0.041386619...	1/24.162...	21779/27720	0.000280047...	1/3570.825...
1000	0.785148163...	−0.000249999...	$\approx 1/4{\cdot}10^3$	0.7853981634...	$6.2499...{\cdot}10^{-11}$	$\approx 1/16{\cdot}10^9$
10000	0.785373163...	−0.000025000...	$\approx 1/4{\cdot}10^4$	0.7853981633...	$6.2499...{\cdot}10^{-14}$	$\approx 1/16{\cdot}10^{12}$

Es ist vorteilhaft, die Folge durch Umklammern wieder in eine Reihe zu überführen:

$$(1-\tfrac{1}{4})+(\tfrac{1}{4}-\tfrac{1}{3}+\tfrac{1}{8})-(\tfrac{1}{8}-\tfrac{1}{5}+\tfrac{1}{12})+(\tfrac{1}{12}-\tfrac{1}{7}+\tfrac{1}{16})-(\tfrac{1}{16}-\tfrac{1}{9}+\tfrac{1}{20})+(\tfrac{1}{20}-\tfrac{1}{11}+\tfrac{1}{24})\ \ldots \\ \pm(\tfrac{1}{4N-4}-\tfrac{1}{2N-1}+\tfrac{1}{4N})\mp\ldots$$

Diese Reihe lautet mit ausgerechneten Klammern

$$\frac{3}{4}+\frac{1}{2\cdot3\cdot4}-\frac{1}{4\cdot5\cdot6}+\frac{1}{6\cdot7\cdot8}\ldots\pm\frac{1}{(N-2)\cdot(N-1)\cdot N}\mp\ldots$$

und findet sich ebenfalls bereits in der Karaṇapaddhati des Nîlakaṇṭha. Sie ist auch bei Knopp[13], ohne Hinweis auf die Herkunft, verzeichnet.

Den tieferen Grund für das Phänomen der Konvergenzverbesserung durch ein Korrekturglied haben J. M. Borwein, P. B. Borwein und K. Dilcher angegeben[14]: Für die Leibniz-Reihe stellten sie 1989 die asymptotische Entwicklung

$$\frac{\pi}{4}=(1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\frac{1}{9}-\frac{1}{11}\pm\ldots-\frac{1}{2N-1})+\frac{1}{4N}-\frac{1}{4N^3}+\frac{5}{4N^5}-\frac{61}{4N^7}\pm\ldots$$

auf, wobei die Zahlen in den Zählern Eulersche Zahlen sind. Das Resultat zeigt die überragende Bedeutung, die die Beherrschung der Asymptotik für die Konvergenzverbesserung von Reihen hat. Das Resultat von Borwein, Borwein und Dilcher wurde gebührend bewundert, ist aber heute in wenigen Sekunden etwa mit dem Computer-Algebra System MAPLE erzielbar.

Es wäre gut, eine asymptotische Entwicklung

$$\arctan z=(z-\frac{z^3}{3}+\frac{z^5}{5}-\frac{z^7}{7}+\frac{z^9}{9}-\frac{z^{11}}{11}\pm\ldots-\frac{z^{2N-1}}{2N-1})+\frac{e_1(z)}{4N}-\frac{e_3(z)}{4N^3}+\frac{e_5(z)}{4N^5}\mp\ldots$$

auch für die Gregory-Leibnizsche Funktionsreihe des Arcus Tangens zu kennen.

Die Euler-Transformation. Leonhard Euler hat 1739 eine sehr einfache Transformation zur Umwandlung einer Reihe in einen Kettenbruch gegeben[15]:

Die Reihe $c_0+c_1+c_2+c_3+\ldots+c_\nu+\ldots$ $\qquad (c_\nu\neq0\ \text{für}\ \nu\geq1)$

und der Kettenbruch

$$c_0+\frac{c_1}{|\,1}-\frac{c_2/c_1}{|\,1+c_2/c_1}-\frac{c_3/c_2}{|\,1+c_3/c_2}-\frac{c_4/c_3}{|\,1+c_4/c_3}-\ldots-\frac{c_\nu/c_{\nu-1}}{|\,1+c_\nu/c_{\nu-1}}-\ldots$$

sind äquivalent, d.h., sie haben gliedweise *übereinstimmende Näherungen.*

Kettenbrüche wurden auf diese Weise häufig aus Reihen hergestellt. Beispielsweise ergibt sich aus der Leibniz-Reihe

$$\frac{\pi}{4}=1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\frac{1}{9}-\frac{1}{11}\pm\ldots\mp\frac{1}{2N+1}\pm\ldots$$

---

[13] K. Knopp, *Theorie und Anwendungen der unendlichen Reihen.* 6. Aufl., Springer, Berlin-Heidelberg 1996, S. 278 Aufg. 109. c).

[14] J. M. Borwein, P. B. Borwein und K. Dilcher, *Euler Numbers, and Asymptotic Expansions.* Amer. Math. Monthly 96 (1989), S. 681–687.

[15] Für die etwas mühsame Umformung siehe Perron 1913, S. 205-207.

der Kettenbruch $$\frac{\pi}{4} = 1 + \frac{-1/3\,|}{|\ 1} - \frac{-3/5\ |}{|1-3/5} - \frac{-5/7\ |}{|1-5/7} - \frac{-7/9\ |}{|1-7/9} - \frac{-9/11\ |}{|1-9/11} - \ \ldots$$

oder $$\frac{\pi}{4} = 1 + \frac{-1/3\,|}{|\ 1} + \frac{3/5\,|}{|2/5} + \frac{5/7\,|}{|2/7} + \frac{7/9\,|}{|2/9} + \frac{9/11\,|}{|2/11} + \frac{11/13\,|}{|\ 2/13} + \ \ldots$$

oder $$\frac{\pi}{4} = 1 + \frac{-1\,|}{|\ 3} + \frac{3^2\,|}{|\ 2} + \frac{5^2\,|}{|\ 2} + \frac{7^2\,|}{|\ 2} + \frac{9^2\,|}{|\ 2} + \frac{11^2\,|}{|\ 2} + \ \ldots\ + \frac{(2N-1)^2\,|}{|\ \ 2} + \ldots,$$

schließlich $$\frac{\pi}{4} = \frac{1\,|}{|1} + \frac{1^2\,|}{|\ 2} + \frac{3^2\,|}{|\ 2} + \frac{5^2\,|}{|\ 2} + \frac{7^2\,|}{|\ 2} + \frac{9^2\,|}{|\ 2} + \frac{11^2\,|}{|\ 2} + \ \ldots\ + \frac{(2N-1)^2\,|}{|\ \ 2} + \ldots,$$

den William Brouncker (ca. 1620–1684) schon 1655 aus dem Wallisschen Produkt hergeleitet hatte.

Zu einer so schlecht konvergenten Reihe den ebenso schlecht konvergenten Kettenbruch aufzustellen, gibt wenig Sinn. Perron fährt jedoch a.a.O. mit der Feststellung fort: 'Besonders häufig wird unsere [Eulers] Transformation auf Potenzreihen angewandt'. Er gibt sie auch an:

Es sind äquivalent die Potenzreihe $c_0 + c_1 z + c_2 z^2 + c_3 z^3 + \ldots + c_\nu z^\nu + \ldots \quad (c_\nu \neq 0 \ \text{für}\ \nu \geq 1)$ *und der Funktionskettenbruch*

$$c_0 + \frac{c_1 z\,|}{|\ 1} - \frac{c_2 z/c_1\ |}{|1 + c_2 z/c_1} - \frac{c_3 z/c_2\ |}{|1 + c_3 z/c_2} - \frac{c_4 z/c_3\ |}{|1 + c_4 z/c_3} - \ \ldots\ - \frac{c_\nu z/c_{\nu-1}\ |}{|1 + c_\nu z/c_{\nu-1}} - \ \ldots\ .$$

Perron ist hier zu kurz gesprungen. Er hat zwar an anderer Stelle nicht übersehen, daß Potenzreihen nur in einem Kreisgebiet um den Nullpunkt konvergieren, das keine Singularitäten enthält, Funktionskettenbrüche jedoch nicht dieser engen Beschränkung unterliegen (Weierstraß 1880, Pringsheim 1910). Die schlechte Konvergenz der Leibniz-Reihe, das heißt, der Gregory-Leibniz-Reihe für $z = 1$, liegt darin begründet, daß wie schon erwähnt $z = 1$ auf dem Rand des Konvergenzgebiets liegt. Ein Kettenbruch für diese Funktion könnte weit besser konvergieren, man erhält aber durch die Euler-Transformation nur den ebenso schlecht konvergierenden von Brouncker. Abb. 4 zeigt in der logaritmischen Skala das dementsprechende Konvergenz- bzw. Divergenzverhalten des durch die Euler-Transformation erhaltenen ArcusTangens-Kettenbruchs

$$\arctan y = \frac{y\,|}{|1} + \frac{y^2\ |}{|3 - y^2} + \frac{9y^2\ |}{|5 - 3y^2} + \frac{25y^2\ |}{|7 - 5y^2} + \frac{49y^2\ |}{|9 - 7y^2} + \frac{81y^2\ |}{|11 - 9y^2} + \ \ldots$$

für $y = 1$ (Brouncker 1655) und für einige Werte von y in der Nähe von 1.

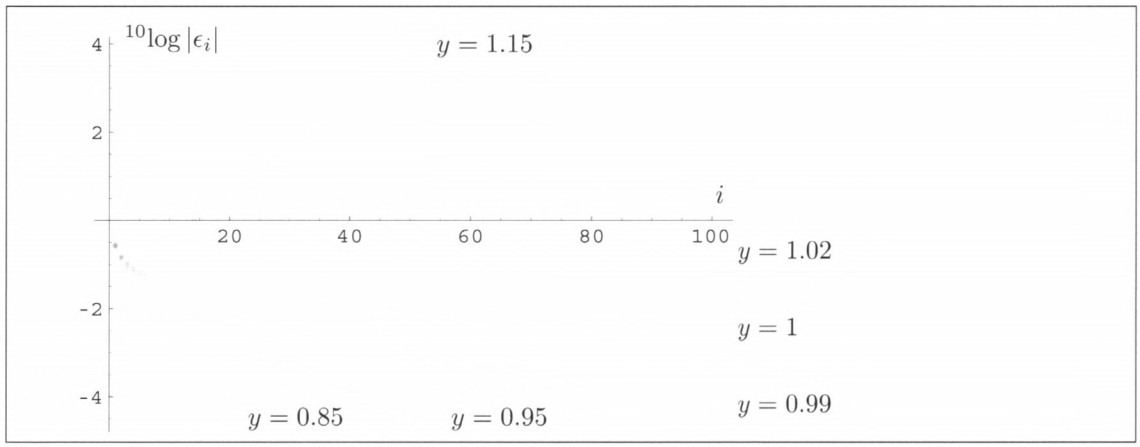


Abb. 4. Konvergenz- bzw. Divergenzverhalten des ArcusTangens-Kettenbruchs von William Brouncker (1655)

Abschreckende Beispiele: Logarithmische Konvergenz. Der Kettenbruch von Brouncker zeigt logarithmische Konvergenz, und einige andere Kettenbrüche für π von Euler (1739, 1783-1, 1783-2, 1770[16]) und Stern (1832) ebenfalls. Logarithmische Konvergenz bedeutet, daß die ersten zehn, die ersten hundert, die ersten tausend, die ersten zehntausend usw. Schritte jeweils die

[16] posthum gedruckt 1815.

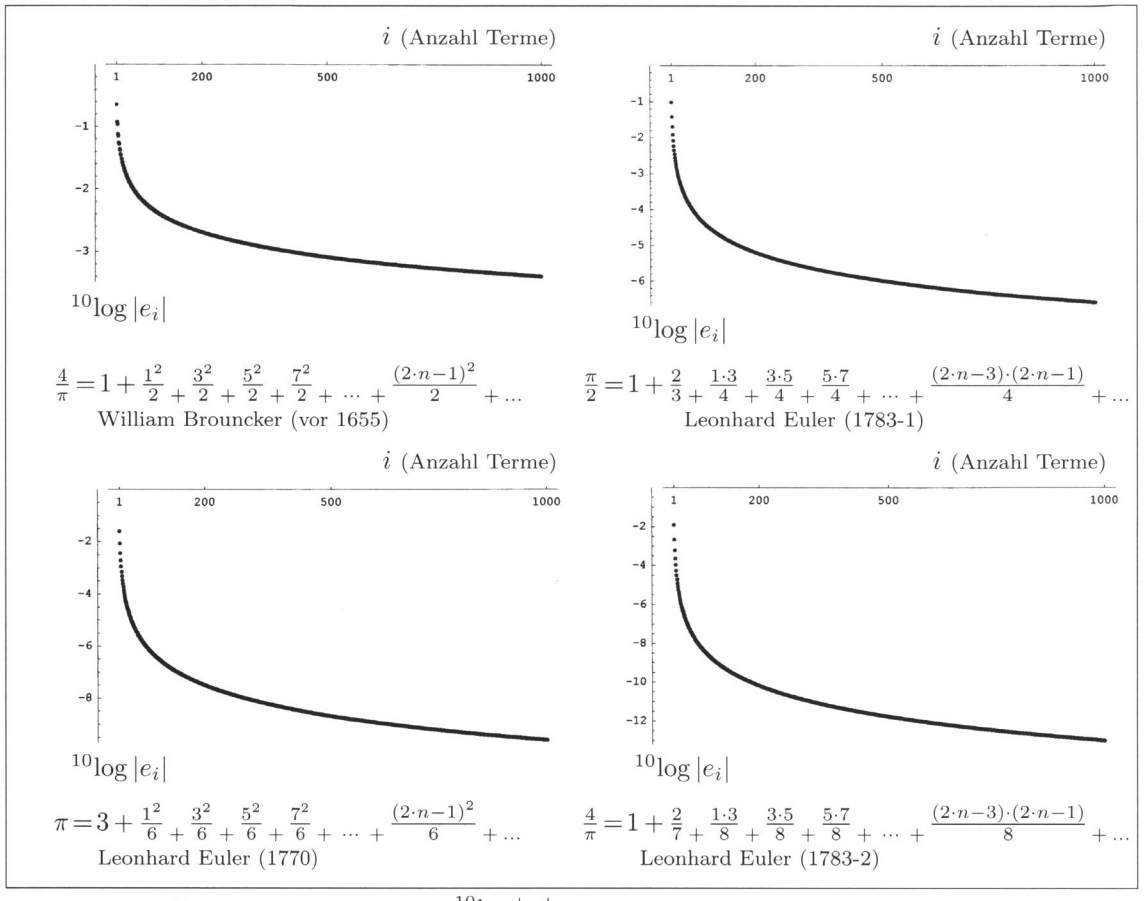


Abb. 5. Kettenbrüche, deren $^{10}\log|e_i|$*-Graph logarithmische Konvergenz anzeigt.*

Abnahme des Fehlers um den selben Faktor bewirken: die Konvergenz wird zunehmend schlechter, der Fehlerquotient geht gegen 1. Für einige Beispiele ist in Abb. 5 dieses Fehlerverhalten illustriert.

Für den Kettenbruch von Brouncker (bei Wallis, 1655[17]) ergeben sich folgende Werte der Fehler

$$\begin{aligned}
^{10}\log|e_{10}| &= -1.446885518\ldots, & |e_{10}| &= 1/27.98243598\ldots\\
^{10}\log|e_{100}| &= -2.397938299\ldots, & |e_{100}| &= 1/249.9990161\ldots\\
^{10}\log|e_{1000}| &= -3.392812020\ldots, & |e_{1000}| &= 1/2470.654515\ldots\\
^{10}\log|e_{10\,000}| &= -4.392297004\ldots, & |e_{10\,000}| &= 1/24677.26386\ldots\\
^{10}\log|e_{100\,000}| &= -5.392245479\ldots, & |e_{100\,000}| &= 1/246743.3628\ldots\\
^{10}\log|e_{1\,000\,000}| &= -6.392240326\ldots, & |e_{1\,000\,000}| &= 1/2467404.353\ldots\ .
\end{aligned}$$

Um eine Dezimalstelle zu gewinnen, muß die Länge des logarithmisch konvergenten Kettenbruchs (oder der Reihe) jeweils verzehnfacht werden. Experimentell ergibt sich $|e_i| \approx 1/(i{\cdot}2.4674011\ldots)$.

Für den Kettenbruch von Euler (1783-1) ergeben sich folgende Werte der Fehler

$$\begin{aligned}
|e_{10}| &= 1/442.973828\ldots\\
|e_{100}| &= 1/40402.9997031098\ldots\\
|e_{1000}| &= 1/4004002.99999700301122\ldots\\
|e_{10\,000}| &= 1/400040002.999999970003001124\ldots\\
|e_{100\,000}| &= 1/40000400002.99999999970000300011124\ldots\\
|e_{1\,000\,000}| &= 1/4000004000002.99999999999700000300001124\ldots\ .
\end{aligned}$$

Experimentell ergibt sich $|e_i| \approx 1/(i^2 \cdot 4)$, und es schimmert eine asymptotische Entwicklung durch: $|e_i| \asymp 1/(i^2 \cdot (4 + \frac{4}{i} + \frac{3}{i^2} - \frac{3}{i^4} + \frac{3}{i^5} + \frac{11}{i^6} + \ldots))$.

[17] John Wallis, *Arithmetica Infinitorum*, 1655.

Für den Kettenbruch von Euler (1770) mag es genügen, den Fehler für $i = 1\,000\,000$ anzugeben:

$$|e_{1\,000\,000}| = 1/4000012000017000008.9999100000900004724\ldots$$

mit einer zu vermutenden asymptotischen Entwicklung

$$|e_i| \asymp 1/(i^3 \cdot (4 + \tfrac{12}{i} + \tfrac{17}{i^2} + \tfrac{9}{i^3} - \tfrac{9}{i^4} + \tfrac{9}{i^5} + ...)) \ .$$

Für den Kettenbruch von Euler (1783-2) mit

$$|e_{1\,000\,000}| = 1/986952414033270443762951 4.35057830261660...$$

ist jedoch wieder keine asymptotische Entwicklung ersichtlich. Experimentell ergibt sich

$$|e_i| \approx 1/(i^4 \cdot 9.8695241\ldots) \ .$$

Es verbleibt noch ein weiterer Kettenbruch von Euler (1739), der sogar geringfügig schlechter konvergiert als der von Brouncker (1658),

$$\frac{\pi}{2} = 1 + \frac{1\,|}{|\,1} + \frac{1\cdot 2\,|}{|\,1} + \frac{2\cdot 3\,|}{|\,1} + \frac{3\cdot 4\,|}{|\,1} + \ \cdots\ + \frac{(n-1)\cdot(n)\,|}{|\quad 1} + \ldots$$

mit einem Fehler für $i = 1\,000\,000$ von

$$|e_{1\,000\,000}| = 1/1273241.13628483233728033323910 4\ldots \ .$$

Experimentell ergibt sich $\quad |e_i| \approx 1/(i \cdot 1.2732411\ldots) \quad (4/\pi = 1.2732395...\ !)$

Ein von Stern 1832 angegebener Kettenbruch hat jeden zweiten Näherungsbruch mit dem des Kettenbruchs von Euler (1739) gemeinsam, die übrigen sind jedoch weniger genaue Näherungen: Stern hätte besser getan, ihn zu vergessen.

Der reziproke Kettenbruch zum Kettenbruch von Euler (1739)

$$\frac{2}{\pi} = \frac{1\,|}{|\,1} + \frac{1\,|}{|\,1} + \frac{1\cdot 2\,|}{|\,1} + \frac{2\cdot 3\,|}{|\,1} + \frac{3\cdot 4\,|}{|\,1} + \ \cdots\ + \frac{(n-1)\cdot(n)\,|}{|\quad 1} + \ldots$$

hat übrigens die hübsche Eigenschaft, daß alle seine gekürzten Näherungsbrüche abbrechende Binärbrüche sind: $\quad \frac{1}{1}, \frac{1}{2}, \frac{3}{4}, \quad \frac{9}{16}, \quad \frac{45}{64}, \frac{75}{128}, \frac{175}{256}, \quad \frac{1225}{2048}, \quad \frac{11025}{16384}, \frac{19845}{32768}, \frac{43659}{65536}, \ \cdots \ .$

Quadratisch konvergente Berechnung der Näherungsbrüche periodischer Kettenbrüche. Der periodische Kettenbruch $\frac{a\,|}{|\,b} + \frac{a\,|}{|\,b} + \frac{a\,|}{|\,b} + \ldots$ hat nach Cataldi den Wert $\sqrt{(\frac{b}{2})^2 + a} - \frac{b}{2}$. Seine Näherungsbrüche seien wieder mit $\frac{A_i}{B_i}$ bezeichnet, für die Teilzähler A_i und Teilnenner B_i hat man rekursiv

$$\frac{A_{i+1}}{B_{i+1}} = a/(b + \frac{A_i}{B_i}) = \frac{a \cdot B_i}{b \cdot B_i + A_i} \ .$$

Die ungekürzte Berechnung der Teilzähler und Teilnenner lautet also[18]

$$\begin{cases} A_{i+1} = a \cdot B_i \\ B_{i+1} = b \cdot B_i + A_i \end{cases} \quad \text{oder in Matrixschreibweise} \quad \begin{pmatrix} A_{i+1} \\ B_{i+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & a \\ 1 & b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_i \\ B_i \end{pmatrix}, \ \text{mit} \ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_0 \\ B_0 \end{pmatrix} \ .$$

Somit $\quad \begin{pmatrix} 0 & a \\ 1 & b \end{pmatrix}^{i+1} = \begin{pmatrix} A_i & A_{i+1} \\ B_i & B_{i+1} \end{pmatrix}$ und nach leichter Rechnung $\begin{pmatrix} A_i & A_{i+1} \\ B_i & B_{i+1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_i \\ B_i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_{2i+1} \\ B_{2i+1} \end{pmatrix} .$

Aus der Kenntnis des i-ten und des $(i+1)$-ten (ungekürzten) Näherungsbruchs lässt sich also der $(2i+1)$-te (ungekürzte) Näherungsbruch berechnen. Fortgesetzte Quadrierung führt also zu Folgen mit schrittweise verdoppeltem Index. Ausgeschrieben hat man

$$\begin{aligned} A_{2i+1} &= A_i^2 + A_{i+1} \cdot B_i \quad &&= A_i^2 + (a \cdot B_i) \cdot B_i \quad &&= A_i^2 + a \cdot B_i^2 \\ B_{2i+1} &= B_i \cdot A_i + B_{i+1} \cdot B_i = B_i \cdot A_i + (b \cdot B_i + A_i) \cdot B_i &&= 2\,A_i \cdot B_i + b \cdot B_i^2 \end{aligned}$$

und damit die quadratisch konvergente Iteration $\quad \dfrac{A_{2i+1}}{B_{2i+1}} = \dfrac{A_i^2 + a \cdot B_i^2}{2\,A_i \cdot B_i + b \cdot B_i^2} = \dfrac{\left(\frac{A_i}{B_i}\right)^2 + a}{2 \cdot \frac{A_i}{B_i} + b} \ .$

[18] woraus sofort die gängige dreigliedrige Rekursion $B_{i+1} = b \cdot B_i + a \cdot B_{i-1}$ folgt.

Mit $a=1, b=2$ ergeben sich für $\sqrt{2}-1$ die Näherungsbrüche

$$\mathbf{\frac{0}{1}}, \mathbf{\frac{1}{2}}, \frac{2}{5}, \mathbf{\frac{5}{12}}, \frac{12}{29}, \frac{29}{70}, \frac{70}{169}, \mathbf{\frac{169}{408}}, \frac{408}{985}, \frac{985}{2378}, \frac{2378}{5741}, \frac{5741}{13860}, \frac{13860}{33461}, \frac{33461}{80782}, \frac{80782}{195025}, \mathbf{\frac{195025}{470832}}, \frac{470832}{665857}, \ldots .$$

Beachte die Indexverdopplung: Es ist $\frac{(\frac{0}{1})^2+1}{2\cdot\frac{0}{1}+2} = \frac{1}{2}$, $\frac{(\frac{1}{2})^2+1}{2\cdot\frac{1}{2}+2} = \frac{5}{12}$, $\frac{(\frac{5}{12})^2+1}{2\cdot\frac{5}{12}+2} = \frac{169}{408}$, $\frac{(\frac{169}{408})^2+1}{2\cdot\frac{169}{408}+2} = \frac{195025}{470832}$.

Pietro Antonio Cataldi beschrieb jedoch im Umfeld seiner periodischen Kettenbrüche ein anderes quadratisch konvergentes Verfahren, nämlich mit dem Iterationsschritt f:

$$f(\frac{A_i}{B_i}) = \frac{1}{2}\cdot\Big[\Big(\frac{b}{2}+\frac{A_i}{B_i}\Big)+\frac{(\frac{b}{2})^2+a}{\frac{b}{2}+\frac{A_i}{B_i}}\Big]-\frac{b}{2}$$

Man sieht sofort, daß diese Iteration ein spezielles Newtonverfahren ist für die Berechnung von $\sqrt{(\frac{b}{2})^2+a}-\frac{b}{2}$. Aber Cataldi konnte das noch nicht wissen, Isaac Newton (1643–1727) war zu seinen Lebzeiten noch nicht geboren. Die erwähnte Iteration zur schrittweisen Verbesserung von Näherungswerten für $\sqrt{N}$ kam zwar schon in der babylonischen Mathematik vor[19] und war 1539 durch Geronimo Cardano (1501–1576) verbreitet worden. Cataldis hervorragende Leistung aber war es, zu finden, daß dieses Iterationsverfahren mit der durch fortgesetzte Indexverdopplung entstehenden Teilfolge der Näherungsbrüche seines Kettenbruchs übereinstimmte:

$$f(\frac{A_i}{B_i}) = \frac{A_{2i+1}}{B_{2i+1}}.$$

Siegmund Günther (1848–1923) gab 1876[20] einen etwas umständlichen, analytischen Beweis für diese Tatsache. Nachfolgend wird ein streng algebraischer Beweis gegeben:

$$f(\tfrac{A_i}{B_i}) = \frac{1}{2}\cdot\Big[\Big(\frac{b}{2}+\frac{A_i}{B_i}\Big)+\frac{(\frac{b}{2})^2+a}{\frac{b}{2}+\frac{A_i}{B_i}}\Big]-\frac{b}{2} = \frac{(\frac{b}{2}+\frac{A_i}{B_i})^2+(\frac{b}{2})^2+a}{2\cdot(\frac{b}{2}+\frac{A_i}{B_i})}-\frac{b}{2}$$

$$= \frac{(\frac{b}{2}+\frac{A_i}{B_i})^2+(\frac{b}{2})^2+a-\frac{b^2}{2}-b\cdot\frac{A_i}{B_i}}{2\cdot(\frac{b}{2}+\frac{A_i}{B_i})} = \frac{\big(\frac{A_i}{B_i}\big)^2+a}{2\cdot\frac{A_i}{B_i}+b} = \frac{A_{2i+1}}{B_{2i+1}} .$$

Unbestreitbar hat Cataldis 'Newton'-Verfahren gegenüber dem Matrix-Verfahren den Vorzug, daß es selbstkorrigierend ist: da nämlich die Ausgangsinformation stets wieder benutzt wird, können sich Rundungsfehler nicht auswirken. Dieser Vorteil ist besonders bei Gleitkommarechnung zu beachten. Bei streng ganzzahliger Rechnung ist jedoch das Verfahren der Matrix-Quadrierung ohnehin stabil.

Lambert und die Moderne

Die Lambert-Transformation einer Funktionsreihe in einen Funktionskettenbruch durch den Euklidschen Algorithmus im Polynomring. Johann Heinrich Lambert erhielt nun 1770 überraschenderweise einen wesentlich besser konvergierenden Kettenbruch aus der Gregory-Leibniz-Reihe, der insbesondere auch für $z=1$ brauchbar ist, auf einem ganz anderen, vorher von Geistesgrößen wie Descartes, Fermat und Pascal übersehenen Weg[21]. Die direkte Lösung des Rätsels, die sich bei Perron nicht niedergeschlagen hat, hat Lambert folgendermaßen erreicht: Er hat die Gregory-Leibniz-Reihe ebenfalls dem Euklidschen Algorithmus unterworfen, wobei er die Teilbarkeit im Sinne der Polynomringe benutzt, also ebenfalls die fortgesetzte Wechselwegnahme, aber gesteuert durch *Polynom*division. Die Lambert-Transformation, die keine termweise Transformation ist, sondern eine Konvergenzbeschleunigung erzielt, lautet:

[19] Otto Neugebauer, *Mathematische Keilschrifttexte*, Quellen und Studien Gesch. Math. 1, 282 (1935).

[20] Siegmund Günther, *Die Lehre von den aufsteigenden Kettenbrüchen in ihrer geschichtlichen Entwickelung.* In: Vermischte Untersuchungen zur Geschichte der mathematischen Wissenschaften, Teubner, Leipzig 1876, Kapitel II, S. 93–133 .

[21] Johann Heinrich Lambert, *Verwandlung der Brüche*, Beyträge zum Gebrauch der Mathematik und deren Anwendung, Zweyter Theil, 3. Abhandlung. Berlin 1770, 54–132.

Ausgehend von

$$\frac{1}{z-\frac{z^3}{3}+\frac{z^5}{5}-\frac{z^7}{7}+\frac{z^9}{9}+\dots} = \frac{1-\frac{z^2}{3}+\frac{z^4}{5}-\frac{z^6}{7}+\frac{z^8}{9}+\dots}{z-\frac{z^3}{3}+\frac{z^5}{5}-\frac{z^7}{7}+\frac{z^9}{9}+\dots} + \frac{\frac{z^2}{3}-\frac{z^4}{5}+\frac{z^4}{7}-\frac{z^8}{9}+\dots}{z-\frac{z^3}{3}+\frac{z^5}{5}-\frac{z^7}{7}+\frac{z^9}{9}+\dots}$$

gilt mit $v = \arctan z = z-\frac{z^3}{3}+\frac{z^5}{5}-\frac{z^7}{7}+\frac{z^9}{9}+\dots = r_0$ *und* $1 = r_{-1}$

$$\begin{aligned}
\tfrac{r_{-1}}{r_0} &= b_1 + \tfrac{r_1}{r_0}\,;\ \text{wo}\ b_1 = \tfrac{1}{z} && \text{und}\ r_1 = \tfrac{z^2}{3}-\tfrac{z^4}{5}+\tfrac{z^6}{7}-\tfrac{z^8}{9}+\tfrac{z^{10}}{11}-\tfrac{z^{12}}{13}+\tfrac{z^{14}}{15}-\tfrac{z^{16}}{17}+\dots\\
\tfrac{r_0}{r_1} &= b_2 + \tfrac{r_2}{r_1}\,;\ \text{wo}\ b_2 = \tfrac{3}{z} && \text{und}\ r_2 = \tfrac{4z^3}{15}-\tfrac{8z^5}{35}+\tfrac{4z^7}{21}-\tfrac{16z^9}{99}+\tfrac{20z^{11}}{143}-\tfrac{8z^{13}}{65}+\tfrac{28z^{15}}{255}-\dots\\
\tfrac{r_1}{r_2} &= b_3 + \tfrac{r_3}{r_2}\,;\ \text{wo}\ b_3 = \tfrac{5}{4z} && \text{und}\ r_3 = \tfrac{3z^4}{35}-\tfrac{2z^6}{21}+\tfrac{z^8}{11}-\tfrac{12z^{10}}{143}+\tfrac{z^{12}}{13}-\tfrac{6z^{14}}{85}+\dots\\
\tfrac{r_2}{r_3} &= b_4 + \tfrac{r_4}{r_3}\,;\ \text{wo}\ b_4 = \tfrac{28}{9z} && \text{und}\ r_4 = \tfrac{64z^5}{945}-\tfrac{64z^7}{693}+\tfrac{128z^9}{1287}-\tfrac{128z^{11}}{1287}+\tfrac{64z^{13}}{663}-\dots\\
\tfrac{r_3}{r_4} &= b_5 + \tfrac{r_5}{r_4}\,;\ \text{wo}\ b_5 = \tfrac{81}{64z} && \text{und}\ r_5 = \tfrac{5z^6}{231}-\tfrac{5z^8}{143}+\tfrac{6z^{10}}{143}-\tfrac{10z^{12}}{221}+\dots\\
\tfrac{r_4}{r_5} &= b_6 + \tfrac{r_6}{r_5}\,;\ \text{wo}\ b_6 = \tfrac{704}{225z} && \text{und}\ r_6 = \tfrac{256z^7}{15015}-\tfrac{1024z^9}{32175}+\tfrac{512z^{11}}{12155}-\dots\\
\tfrac{r_5}{r_6} &= b_7 + \tfrac{r_7}{r_6}\,;\ \text{wo}\ b_7 = \tfrac{325}{256z} && \text{und}\ r_7 = \tfrac{7z^8}{1287}-\tfrac{28z^{10}}{2431}+\dots\\
\tfrac{r_6}{r_7} &= b_8 + \tfrac{r_8}{r_7}\,;\ \text{wo}\ b_8 = \tfrac{768}{245z} && \text{und}\ r_8 = \tfrac{16384z^9}{3828825}-\dots\\
&\ \ \vdots && \ \ \vdots \qquad\qquad \vdots
\end{aligned}$$

Aus den b_i ergibt sich der *Originale Lambert-Kettenbruch* (Abb. 6)

$$\arctan z = \cfrac{1}{\frac{1}{z}} + \cfrac{1}{\frac{3}{z}} + \cfrac{1}{\frac{5}{4z}} + \cfrac{1}{\frac{28}{9z}} + \cfrac{1}{\frac{81}{64z}} + \cfrac{1}{\frac{704}{225z}} + \cfrac{1}{\frac{325}{256z}} + \cfrac{1}{\frac{768}{245z}} + \dots$$

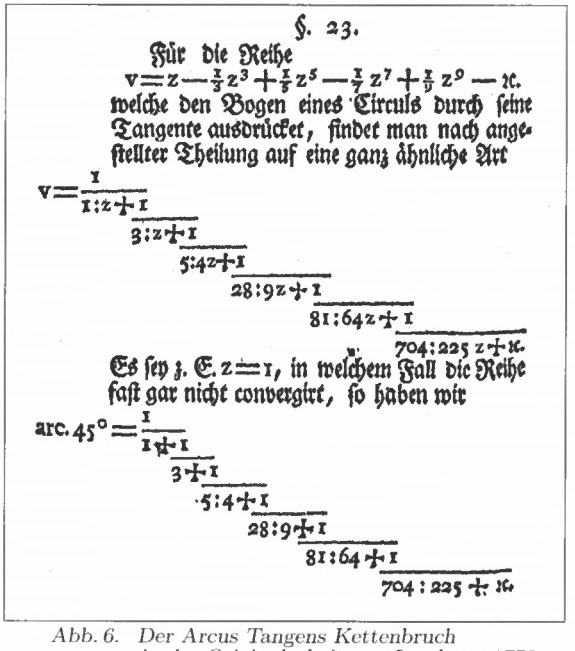
der nicht mehr unter die regelmäßigen Kettenbrüche fällt, da die Teilnenner nicht ganzzahlig sind. Das Bildungsgesetz der b_i ist durch den Euklidschen Algorithmus verdeckt worden, es lässt sich aber unschwer rekonstruieren (Abb. 7):

Für gerade Indizes:

$$b_2 = 3\cdot\tfrac{1}{z},\ b_4 = 7\cdot\tfrac{4}{9}\cdot\tfrac{1}{z},\ b_6 = 11\cdot\tfrac{4\cdot16}{9\cdot25}\cdot\tfrac{1}{z},\ b_8 = 15\cdot\tfrac{4\cdot16\cdot36}{9\cdot25\cdot49}\cdot\tfrac{1}{z},\ b_{10} = 19\cdot\tfrac{4\cdot16\cdot36\cdot64}{9\cdot25\cdot49\cdot81}\cdot\tfrac{1}{z},\ \dots\ ,$$

für ungerade Indizes:

$$b_3 = 5\cdot\tfrac{1}{4}\cdot\tfrac{1}{z},\ b_5 = 9\cdot\tfrac{9}{4\cdot16}\cdot\tfrac{1}{z},\ b_7 = 13\cdot\tfrac{9\cdot25}{4\cdot16\cdot36}\cdot\tfrac{1}{z},\ b_9 = 17\cdot\tfrac{9\cdot25\cdot49}{4\cdot16\cdot36\cdot64}\cdot\tfrac{1}{z},\ \dots\ .$$



§. 23.

Für die Reihe

$v = z - \frac{1}{3}z^3 + \frac{1}{5}z^5 - \frac{1}{7}z^7 + \frac{1}{9}z^9 - \&c.$

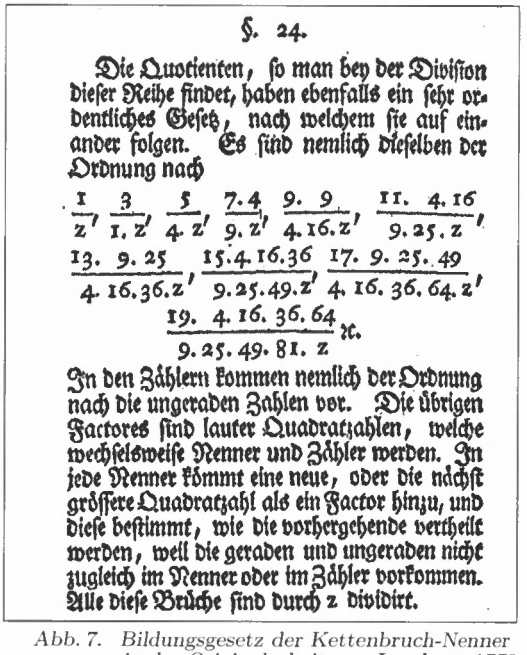
welche den Bogen eines Circuls durch seine Tangente ausdrücket, findet man nach angestellter Theilung auf eine ganz ähnliche Art

$$v = \cfrac{1}{1:z+1}$$
$$\cfrac{}{3:z+1}$$
$$\cfrac{}{5:4z+1}$$
$$\cfrac{}{28:9z+1}$$
$$\cfrac{}{81:64z+1}$$
$$\cfrac{}{704:225\,z+\&c.}$$

Es sey z. E. $z = 1$, in welchem Fall die Reihe fast gar nicht convergirt, so haben wir

$$\text{arc. } 45^\circ = \cfrac{1}{1+1}$$
$$\cfrac{}{3+1}$$
$$\cfrac{}{5:4+1}$$
$$\cfrac{}{28:9+1}$$
$$\cfrac{}{81:64+1}$$
$$\cfrac{}{704:225+\&c.}$$

Abb. 6. Der Arcus Tangens Kettenbruch in der Originalarbeit von Lambert, 1770



§. 24.

Die Quotienten, so man bey der Division dieser Reihe findet, haben ebenfalls ein sehr ordentliches Gesetz, nach welchem sie auf einander folgen. Es sind nemlich dieselben der Ordnung nach

$$\frac{1}{z},\ \frac{3}{1.z},\ \frac{5}{4.z},\ \frac{7.4}{9.z},\ \frac{9.9}{4.16.z},\ \frac{11.4.16}{9.25.z},$$
$$\frac{13.9.25}{4.16.36.z},\ \frac{15.4.16.36}{9.25.49.z},\ \frac{17.9.25.49}{4.16.36.64.z},$$
$$\frac{19.4.16.36.64}{9.25.49.81.z}\ \&c.$$

In den Zählern kommen nemlich der Ordnung nach die ungeraden Zahlen vor. Die übrigen Factores sind lauter Quadratzahlen, welche wechselsweise Nenner und Zähler werden. In jede Nenner kömmt eine neue, oder die nächst grössere Quadratzahl als ein Factor hinzu, und diese bestimmt, wie die vorhergehende vertheilt werden, weil die geraden und ungeraden nicht zugleich im Nenner oder im Zähler vorkommen. Alle diese Brüche sind durch z dividirt.

Abb. 7. Bildungsgesetz der Kettenbruch-Nenner in der Originalarbeit von Lambert, 1770

Der Lambertsche Funktionskettenbruch lautet damit ($z \neq 0$)

$$(*)\qquad \arctan z = \cfrac{1}{\frac{1}{z}} + \cfrac{1}{3\cdot\frac{1}{z}} + \cfrac{1}{5\cdot\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{z}} + \cfrac{1}{7\cdot\frac{4}{9}\cdot\frac{1}{z}} + \cfrac{1}{9\cdot\frac{9}{4\cdot16}\cdot\frac{1}{z}} + \cfrac{1}{11\cdot\frac{4\cdot16}{9\cdot25}\cdot\frac{1}{z}} + \cfrac{1}{13\cdot\frac{9\cdot25}{4\cdot16\cdot36}\cdot\frac{1}{z}} + \dots\ .$$

Für $z = 1$ ergibt sich

$$\frac{\pi}{4} = \frac{1}{|1} + \frac{1}{|3} + \frac{1}{|5\cdot\frac{1}{4}} + \frac{1}{|7\cdot\frac{4}{9}} + \frac{1}{|9\cdot\frac{9}{4\cdot16}} + \frac{1}{|11\cdot\frac{4\cdot16}{9\cdot25}} + \frac{1}{|13\cdot\frac{9\cdot25}{4\cdot16\cdot36}} + \dots \ .$$

Umformungen des Lambertschen Kettenbruchs. Der originale Lambertsche Kettenbruch kann umgeformt werden zu

$$(**)\quad \arctan z = \frac{z}{|1} + \frac{1^2\cdot z^2}{|3} + \frac{2^2\cdot z^2}{|5} + \frac{3^2\cdot z^2}{|7} + \frac{4^2\cdot z^2}{|9} + \frac{5^2\cdot z^2}{|11} + \frac{6^2\cdot z^2}{|13} + \frac{7^2\cdot z^2}{|15} + \dots \ .$$

Die Zählerpolynome $A_i(z)$ und Nennerpolynome $B_i(z)$ der (ungekürzten) Näherungsbrüche ergeben sich dann zu

i	$A_i(z)$	$B_i(z)$
1	z	1
2	$3z$	$3 + z^2$
3	$15z + 4z^3$	$15 + 9z^2$
4	$105z + 55z^3$	$105 + 90z^2 + 9z^4$
5	$945z + 735z^3 + 64z^5$	$945 + 1050z^2 + 225z^4$
6	$10395z + 10710z^3 + 2079z^5$	$10395 + 14175z^2 + 4725z^4 + 225z^6$
7	$135135z + 173250z^3 + 53487z^5 + 2304z^7$	$135135 + 218295z^2 + 99225z^4 + 11025z^6$

Eine weitere Umformung liefert, was Perron[22] in der 3. Aufl. einen C-Kettenbruch nennt

$$(***)\quad \arctan z = \frac{z}{|1} + \frac{\frac{1}{3}\cdot z^2}{|1} + \frac{\frac{4}{15}\cdot z^2}{|1} + \frac{\frac{9}{35}\cdot z^2}{|1} + \frac{\frac{16}{63}\cdot z^2}{|1} + \frac{\frac{25}{99}\cdot z^2}{|1} + \frac{\frac{36}{143}\cdot z^2}{|1} + \frac{\frac{49}{195}\cdot z^2}{|1} + \dots \ .$$

Um das Auftreten von Wurzeln möglichst zu vermeiden, verwenden wir nachfolgend die Variante

$$(\dagger\dagger\dagger)\quad \frac{\arctan z}{z} = \frac{1}{|1} + \frac{\frac{1}{3}\cdot z^2}{|1} + \frac{\frac{4}{15}\cdot z^2}{|1} + \frac{\frac{9}{35}\cdot z^2}{|1} + \frac{\frac{16}{63}\cdot z^2}{|1} + \frac{\frac{25}{99}\cdot z^2}{|1} + \frac{\frac{36}{143}\cdot z^2}{|1} + \frac{\frac{49}{195}\cdot z^2}{|1} + \dots \ .$$

Der Lambertsche Funktionskettenbruch konvergiert in der ganzen z-Ebene mit Ausnahme eines geradlinigen Schnitts von i nach $i\cdot\infty$ und von $-i\cdot\infty$ nach $-i$.

Die Lambert-Transformation einer Potenzreihe kann programmiert werden (Abb. 8).

```
(* Let f[z] the power series to be transformed in a  Lambert  continued fraction *)
f[z_]:=Hypergeometric2F1[a,1,c,z]; (* /.{a fi 1/2, c fi 3/2, z  fi-z^2}; gives ArcTan[z]/z *
pmax=6;
(* let r[0] the initial normalized power series expansion of f[z] about z=0 to z^pmax *)
r[0]=Series[f[z],{z,0,pmax}]//Normal;
(* Add a dummy r[-1]:=1 *)
r[-1]=cprev=1;
For[j=1,True,++j,
  (*find minimum power of z in r[j-1]*)
  p=Exponent[r[j-1],z,Min];
  If[ !NumberQ[p],Break[] ]; (*no more terms*)
  (*find b[j] by dividing the leftmost non-zero terms*)
  b[j]=cprev / (cprev=Coefficient[r[j-1],z,p]*z^p);
  (*compute the remainder polynom*)
  r[j]=r[j-2]-b[j]*r[j-1]//Together;
];
```

Abb. 8. MATHEMATICA-Programm für die Lambert-Transformation

Die Lambert-Transformation als 'vorausschauende teilweise Ausschöpfung'. Tafel 3 versucht zu erklären, wie die Lambert-Transformation eine Konvergenzbeschleunigung bewirkt.

[22] Oskar Perron, *Die Lehre von den Kettenbrüchen*, Teubner 1912, 3. Aufl. Band II 1957, posthum 1977, S. 107.

Gregory-Leibniz-Reihe: $z - \frac{z^3}{3} + \frac{z^5}{5} - \frac{z^7}{7} + \frac{z^9}{9} - \frac{z^{11}}{11} \pm \dots$

Näherungsbrüche nach Lambert-Transformation:

$$\frac{A_2(z)}{B_2(z)} = z - \frac{z^3}{3} + \frac{z^5}{9} - \frac{z^7}{27} + \frac{z^9}{81} - \frac{z^{11}}{243} + \frac{z^{13}}{729} \mp \dots$$

$$\frac{A_3(z)}{B_3(z)} = z - \frac{z^3}{3} + \frac{z^5}{5} - \frac{z^7}{\frac{25}{3}} + \frac{z^9}{\frac{125}{9}} - \frac{z^{11}}{\frac{625}{27}} + \frac{z^{13}}{\frac{3125}{81}} \mp \dots$$

$$\frac{A_4(z)}{B_4(z)} = z - \frac{z^3}{3} + \frac{z^5}{5} - \frac{z^7}{7} + \frac{z^9}{\frac{1225}{129}} - \frac{z^{11}}{\frac{8575}{669}} + \frac{z^{13}}{\frac{300125}{17361}} \mp \dots$$

$$\frac{A_5(z)}{B_5(z)} = z - \frac{z^3}{3} + \frac{z^5}{5} - \frac{z^7}{7} + \frac{z^9}{9} - \frac{z^{11}}{\frac{3969}{355}} + \frac{z^{13}}{\frac{35721}{2605}} \mp \dots$$

$$\frac{A_6(z)}{B_6(z)} = z - \frac{z^3}{3} + \frac{z^5}{5} - \frac{z^7}{7} + \frac{z^9}{9} - \frac{z^{11}}{11} + \frac{z^{13}}{\frac{53361}{4085}} \mp \dots$$

Tafel 3. Beispiel einer Vorausschauenden teilweisen Ausschöpfung

Die in Reihen entwickelten $A_i(z)/B_i(z)$ sind mit den jeweiligen Teilsummen $z - \frac{z^3}{3} \pm \dots \pm \frac{z^{2i+1}}{2i+1}$ der Gregory-Leibniz-Reihe zu vergleichen: sie schöpfen deren verbleibende Terme teilweise aus,[23] und zwar fortschreitend besser: Die Koeffizienten etwa von z^{13} lauten:

für $i = 2$: $1/729$
für $i = 3$: $1/38.58024691\dots$
für $i = 4$: $1/17.28731064\dots$
für $i = 5$: $1/13.71247601\dots$
für $i = 6$: $1/13.06266830\dots$
für $i \geq 7$: $1/13$.

Spezialfälle des Lambertschen Funktionskettenbruchs. Für spezielle Werte von z erhält man aus $\arctan z$ Multipla von π:

$\arctan\ 2+\sqrt{3}$	$= \frac{5}{12}\pi$	$= 75°$	$= \arctan\ 3.732050807\dots$	
$\arctan \sqrt{5+2\sqrt{5}}$	$= \frac{2}{5}\pi$	$= 72°$	$= \arctan\ 3.077683537\dots$	
$\arctan \sqrt{2}+1$	$= \frac{3}{8}\pi$	$= 67.5°$	$= \arctan\ 2.414213562\dots$	
$\arctan \sqrt{3}$	$= \frac{1}{3}\pi$	$= 60°$	$= \arctan\ 1.732050808\dots$	
$\arctan \sqrt{1+2/\sqrt{5}}$	$= \frac{3}{10}\pi$	$= 54°$	$= \arctan\ 1.376381920\dots$	
$\arctan\ 1$	$= \frac{1}{4}\pi$	$= 45°$	$= \arctan\ 1.000000000$	(Lambert)
$\arctan \sqrt{5-2\sqrt{5}}$	$= \frac{1}{5}\pi$	$= 36°$	$= \arctan\ 0.726542528\dots$	
$\arctan 1/\sqrt{3}$	$= \frac{1}{6}\pi$	$= 30°$	$= \arctan\ 0.577350269\dots$	(Jung)
$\arctan \sqrt{2}-1$	$= \frac{1}{8}\pi$	$= 22.5°$	$= \arctan\ 0.414213562\dots$	
$\arctan \sqrt{1-2/\sqrt{5}}$	$= \frac{1}{10}\pi$	$= 18°$	$= \arctan\ 0.324919696\dots$	
$\arctan\ 2-\sqrt{3}$	$= \frac{1}{12}\pi$	$= 15°$	$= \arctan\ 0.267949192\dots$	

Insbesondere erhält man so für $z = \sqrt{3}$ den Kettenbruch

$$\frac{\pi}{3\sqrt{3}} = \frac{1|}{|1} + \frac{3\cdot 1^2|}{|\ 3} + \frac{3\cdot 2^2|}{|\ 5} + \frac{3\cdot 3^2|}{|\ 7} + \frac{3\cdot 4^2|}{|\ 9} + \frac{3\cdot 5^2|}{|\ 11} + \frac{3\cdot 6^2|}{|\ 13} + \frac{3\cdot 7^2|}{|\ 15} + \dots,$$

[23] Schon Leonhard Euler (in '*De seriebus divergentibus*', gedruckt 1760) hat die Wechselwegnahme auf eine offensichtlich divergente Potenzreihe angewandt und damit einen konvergenten Kettenbruch erzielt. In diesem Zusammenhang spricht der Mathematikhistoriker Andreas Speiser (1885–1970) bereits 1935 von der „außerordentlichen konvergenzerzeugenden Kraft" der Euklidschen Wechselwegnahme. Dies für die Leibniz-Reihe sofort auszunützen, hat Euler aber übersehen und somit Lambert dafür die Priorität von 1770 überlassen.

für $z=1$ Lamberts Zahlkettenbruch (1770) in der üblichen Fassung

$$\frac{\pi}{4}=\frac{1|}{|1}+\frac{1^2|}{|3}+\frac{2^2|}{|5}+\frac{3^2|}{|7}+\frac{4^2|}{|9}+\frac{5^2|}{|11}+\frac{6^2|}{|13}+\frac{7^2|}{|15}+\ldots$$

und für $z=1/\sqrt{3}$ den sehr guten Kettenbruch von Vilém Jung (1880)[24]

$$\frac{\pi}{2\sqrt{3}}=\frac{1|}{|1}+\frac{1^2|}{|3\cdot 3}+\frac{2^2|}{|5}+\frac{3^2|}{|3\cdot 7}+\frac{4^2|}{|9}+\frac{5^2|}{|3\cdot 11}+\frac{6^2|}{|13}+\frac{7^2|}{|3\cdot 15}+\ldots\ .$$

Für die Teilzähler $\bar{A}_i(z)$ und Teilnenner $\bar{B}_i(z)$ der Variante (†††) des Lambertschen C-Kettenbruchs

$$(\dagger\dagger\dagger)\quad \frac{\arctan z}{z}=\frac{1|}{|1}+\frac{\bar{a}_1z^2|}{|1}+\frac{\bar{a}_2z^2|}{|1}+\frac{\bar{a}_3z^2|}{|1}+\frac{\bar{a}_4z^2|}{|1}+\frac{\bar{a}_5z^2|}{|1}+\frac{\bar{a}_6z^2|}{|1}+\frac{\bar{a}_7z^2|}{|1}+\ldots \text{ mit } \bar{a}_\nu=\tfrac{\nu^2}{4\nu^2-1}$$

gibt es die Berechnung mittels der Rekursionen

$$\bar{A}_i(z)=\bar{A}_{i-1}(z)+\bar{a}_{i-1}z^2\cdot\bar{A}_{i-2}(z)\ ,\quad \bar{B}_i(z)=\bar{B}_{i-1}(z)+\bar{a}_{i-1}z^2\cdot\bar{B}_{i-2}(z)$$

mit den Anfangsbedingungen $\bar{A}_1(z)=1$, $\bar{A}_2(z)=1$:

$$\begin{aligned}
\bar{A}_3(z)&=\bar{A}_2(z)+\bar{a}_2z^2\cdot\bar{A}_1(z)=1+\tfrac{4}{15}z^2\cdot 1= && 1+\tfrac{4}{15}z^2\\
\bar{A}_4(z)&=\bar{A}_3(z)+\bar{a}_3z^2\cdot\bar{A}_2(z)=(1+\tfrac{4}{15}z^2)+\tfrac{9}{35}z^2\cdot 1= && 1+\tfrac{11}{21}z^2\\
\bar{A}_5(z)&=\bar{A}_4(z)+\bar{a}_4z^2\cdot\bar{A}_3(z)=(1+\tfrac{11}{21}z^2)+\tfrac{16}{63}z^2\cdot(1+\tfrac{4}{15}z^2)= && 1+\tfrac{7}{9}z^2+\tfrac{64}{945}z^4\\
\bar{A}_6(z)&=\bar{A}_5(z)+\bar{a}_5z^2\cdot\bar{A}_4(z)=(1+\tfrac{7}{9}z^2+\tfrac{64}{945}z^4)+\tfrac{25}{99}z^2\cdot(1+\tfrac{11}{21}z^2)= && 1+\tfrac{34}{33}z^2+\tfrac{1}{5}z^4
\end{aligned}$$

sowie mit den Anfangsbedingungen $\bar{B}_1(z)=1$, $\bar{B}_2(z)=1+\frac{1}{3}z^2$:

$$\begin{aligned}
\bar{B}_3(z)&=\bar{B}_2(z)+\bar{a}_2z^2\cdot\bar{B}_1(z)=(1+\tfrac{1}{3}z^2)+\tfrac{4}{15}z^2\cdot 1= && 1+\tfrac{3}{5}z^2\\
\bar{B}_4(z)&=\bar{B}_3(z)+\bar{a}_3z^2\cdot\bar{B}_2(z)=(1+\tfrac{3}{5}z^2)+\tfrac{9}{35}z^2\cdot(1+\tfrac{1}{3}z^2)= && 1+\tfrac{6}{7}z^2+\tfrac{3}{35}z^4\\
\bar{B}_5(z)&=\bar{B}_4(z)+\bar{a}_4z^2\cdot\bar{B}_3(z)=(1+\tfrac{6}{7}z^2+\tfrac{3}{35}z^4)+\tfrac{16}{63}z^2\cdot(1+\tfrac{3}{5}z^2)= && 1+\tfrac{10}{9}z^2+\tfrac{5}{21}z^4\\
\bar{B}_6(z)&=\bar{B}_5(z)+\bar{a}_5z^2\cdot\bar{B}_4(z)=(1+\tfrac{10}{9}z^2+\tfrac{5}{21}z^4)+\tfrac{25}{99}z^2\cdot(1+\tfrac{6}{7}z^2+\tfrac{3}{35}z^4)= && 1+\tfrac{15}{11}z^2+\tfrac{5}{11}z^4+\tfrac{5}{231}z^6
\end{aligned}$$

Die Näherungsbrüche $A_i(z)/B_i(z)$ von (**) und (***) bzw. $\bar{A}_i(z)/\bar{B}_i(z)$ von (†††) unterscheiden sich nur um einen Faktor z.

Eine Methode von Evelyn Frank. Evelyn Frank (ca. 1918–1982), Schülerin von Hubert S. Wall, fand in ähnlicher Weise eine Methode[25] zur divisionsfreien *Gewinnung* des Kettenbruchs aus der Potenzreihe. Sie zeigte induktiv: durch Multiplikation der n-ten Teilsumme der Potenzreihe mit $B_n(z)$ entsteht $A_n(z)+(-1)^n a_1\cdot a_2\cdot\ldots\cdot a_n\cdot z^{2n}+\ldots$. Damit lässt sich sukzessive a_n und mit der Rekursionsformel $B_{n+1}(z)$ gewinnen. Die ersten Schritte der Transformation zeigt folgendes Beispiel:

Gregory-Leibniz-Reihe für $\frac{\arctan z}{z}=1-\frac{1}{3}z^2+\frac{1}{5}z^4-\frac{1}{7}z^6\pm\ldots$;

Beginn der Transformation mit $\bar{B}_1(z)=1$, $\bar{A}_1(z)=1$, $\bar{B}_2(z)=1+\frac{1}{3}z^2$; $\bar{a}_0=1$, $\bar{a}_1=\frac{1}{3}$.

$n=2$: $(1-\frac{z^2}{3}+\frac{z^4}{5})\cdot\bar{B}_2(z)$

$$\begin{aligned}
&=(1-\tfrac{z^2}{3}+\tfrac{z^4}{5})\cdot(1+\tfrac{1}{3}z^2)=1+(\tfrac{1}{3}-\tfrac{1}{3})z^2+(\tfrac{1}{5}-\tfrac{1}{9})z^4+\ldots\\
&=\bar{A}_2(z)+0\quad+\quad\tfrac{4}{45}\cdot z^4+\ldots
\end{aligned}$$

Somit $\bar{A}_2(z)=1$; $(-1)^2\bar{a}_1\bar{a}_2=\frac{4}{45}$, $\bar{a}_2=\frac{4}{15}$.

$\bar{B}_3(z)=\bar{B}_2(z)+\bar{a}_2z^2\cdot\bar{B}_1(z)=(1+\frac{1}{3}z^2)+\frac{4}{15}z^2\cdot 1=1+\frac{3}{5}z^2$.

$n=3$: $(1-\frac{z^2}{3}+\frac{z^4}{5}-\frac{z^6}{7})\cdot\bar{B}_3(z)$

$$\begin{aligned}
&=(1-\tfrac{z^2}{3}+\tfrac{z^4}{5}-\tfrac{z^6}{7})\cdot(1+\tfrac{3}{5}z^2)=[1+(\tfrac{3}{5}-\tfrac{1}{3})z^2]+(\tfrac{3}{5}\cdot\tfrac{1}{3}-\tfrac{1}{5})z^4+(\tfrac{3}{5}\cdot\tfrac{1}{5}-\tfrac{1}{7})z^6+\ldots\\
&=\bar{A}_3(z)\quad+\quad 0\quad-\tfrac{4}{175}z^6+\ldots
\end{aligned}$$

Somit $\bar{A}_3(z)=1+\frac{4}{15}z^2$; $(-1)^3\bar{a}_1\bar{a}_2\bar{a}_3=-\frac{4}{175}$, $\bar{a}_3=\frac{9}{35}$.

$\bar{B}_4(z)=\bar{B}_3(z)+\bar{a}_3z^2\cdot\bar{B}_2(z)=(1+\frac{3}{5}z^2)+\frac{9}{35}z^2\cdot(1+\frac{1}{3}z^2)=1+\frac{6}{7}z^2+\frac{3}{35}z^4$.

---

[24] Vilém Jung, *Nový řetězecpro čislo π*. Časopis pro pestováni matematiky a fysiky 9, S. 157–159 (1880).

[25] Evelyn Frank, *Corresponding type continued fractions*. American Journal of Mathematics 68, S. 89–108 (1946).

$$
\begin{aligned}
n=4:\quad & (1-\tfrac{z^2}{3}+\tfrac{z^4}{5}-\tfrac{z^6}{7}+\tfrac{z^8}{9})\cdot \bar{B}_4(z)\\
&= (1-\tfrac{z^2}{3}+\tfrac{z^4}{5}-\tfrac{z^6}{7}+\tfrac{z^8}{9})\cdot(1+\tfrac{6}{7}z^2+\tfrac{3}{35}z^4)\\
&= [1+(\tfrac{6}{7}-\tfrac{1}{3})z^2]+(\tfrac{3}{35}-\tfrac{6}{7}\cdot\tfrac{1}{3}+\tfrac{1}{5})z^4+(-\tfrac{1}{3}\cdot\tfrac{3}{35}+\tfrac{1}{5}\cdot\tfrac{6}{7}-\tfrac{1}{7})z^6+(\tfrac{1}{9}-\tfrac{1}{7}\cdot\tfrac{6}{7}+\tfrac{1}{5}\cdot\tfrac{3}{35})z^8+\dots\\
&= \bar{A}_4(z) \qquad + \qquad 0 \qquad + \qquad 0 \qquad + \qquad \tfrac{64}{11025}z^8+\dots
\end{aligned}
$$

Somit $A_4(z)=1+\frac{11}{21}z^2$; $(-1)^4\bar{a}_1\bar{a}_2\bar{a}_3\bar{a}_4 = \frac{64}{11025}$, $\bar{a}_4=\frac{16}{63}$.

$\bar{B}_5(z)=\bar{B}_4(z)+\bar{a}_4z^2\cdot\bar{B}_3(z)=(1+\frac{6}{7}z^2+\frac{3}{35}z^4)+\frac{16}{63}z^2\cdot(1+\frac{3}{5}z^2)=1+\frac{10}{9}z^2+\frac{5}{21}z^4$.

usw.

Die explizite Berechnung sowohl der $\bar{A}_i$ als auch die des ganzen Produkts der n-ten Teilsumme der Potenzreihe mit $\bar{B}_n$ ist jedoch unnötig. Es genügt offensichtlich die Berechnung desjenigen Koeffizienten im Produkt, der Koeffizient von z^{2n} ist. Dadurch wird viel Rechenzeit gespart, weil ja die Produkte (n-te Teilsumme der Potenzreihe mal $\bar{B}_n$) quadratisch mit n länger werden.

Im Beispiel ergibt sich wieder die Variante des Lambertschen Kettenbruchs, der C-Kettenbruch

$$(\dagger\dagger\dagger)\qquad \frac{\arctan z}{z}=\cfrac{1}{1}+\cfrac{\frac{1}{3}\cdot z^2}{1}+\cfrac{\frac{4}{15}\cdot z^2}{1}+\cfrac{\frac{9}{35}\cdot z^2}{1}+\cfrac{\frac{16}{63}\cdot z^2}{1}+\cfrac{\frac{25}{99}\cdot z^2}{1}+\cfrac{\frac{36}{143}\cdot z^2}{1}+\cfrac{\frac{49}{195}\cdot z^2}{1}+\dots\ .$$

Die Glaisher-Wynn Modifikation der Auswertung des Lambertschen Kettenbruchs. Peter Wynn[26] wies 1959 auf ein Resultat von James Whitbread Lee Glaisher[27] hin: Wenn einem jeden approximierenden Segment des Kettenbruchs von Euler (1739) eine gewisse additive Modifikation hinzugefügt wird:

$$\frac{\pi}{2}=1+\cfrac{1}{1}+\cfrac{1\cdot 2}{1}+\cfrac{2\cdot 3}{1}+\cfrac{3\cdot 4}{1}+\cfrac{4\cdot 5}{1}+\cfrac{5\cdot 6}{1}+\dots+\cfrac{(n-3)\cdot(n-2)}{1}+\cfrac{(n-1)\cdot n}{1+n},$$

so wird die Konvergenz erheblich beschleunigt. Die Glaisher-Wynn Modifikation kann auch für den Zahl-Kettenbruch von Lambert versucht werden. Der Ansatz zur Bestimmung der bestmöglichen additiven Modifikation, etwa u_8 lautet

$$\frac{\pi}{4}=\cfrac{1}{1}+\cfrac{1}{3}+\cfrac{1}{5\cdot\frac{1}{4}}+\cfrac{1}{7\cdot\frac{4}{9}}+\cfrac{1}{9\cdot\frac{9}{4\cdot 16}}+\cfrac{1}{11\cdot\frac{4\cdot 16}{9\cdot 25}}+\cfrac{1}{13\cdot\frac{9\cdot 25}{4\cdot 16\cdot 36}}+\cfrac{1}{15\cdot\frac{4\cdot 16\cdot 36}{9\cdot 25\cdot 49}}+\cfrac{1}{17\cdot\frac{9\cdot 25\cdot 49}{4\cdot 16\cdot 36\cdot 64}+u_8}$$

und der zur Bestimmung von u_7

$$\frac{\pi}{4}=\cfrac{1}{1}+\cfrac{1}{3}+\cfrac{1}{5\cdot\frac{1}{4}}+\cfrac{1}{7\cdot\frac{4}{9}}+\cfrac{1}{9\cdot\frac{9}{4\cdot 16}}+\cfrac{1}{11\cdot\frac{4\cdot 16}{9\cdot 25}}+\cfrac{1}{13\cdot\frac{9\cdot 25}{4\cdot 16\cdot 36}}+\cfrac{1}{15\cdot\frac{4\cdot 16\cdot 36}{9\cdot 25\cdot 49}+u_7}$$

Somit ist u_8 aus u_7 bestimmbar, $u_7=1/(17\cdot\frac{9\cdot 25\cdot 49}{4\cdot 16\cdot 36\cdot 64}+u_8)$. Dies erlaubt eine bequeme rekurrente Berechnung der Werte von u_n:

$u_1=\frac{1}{(4/\pi)-1}-3$	$=0.6597923\dots$	$u_2=\frac{1}{0.6597923\dots}-5/4$	$=0.2656283\dots$
$u_3=\frac{1}{0.2656283\dots}-28/9$	$=0.6535476\dots$	$u_4=\frac{1}{0.6535476\dots}-81/64$	$=0.2644853\dots$
$u_5=\frac{1}{0.2644853\dots}-704/225$	$=0.6520385\dots$	$u_6=\frac{1}{0.6520385\dots}-2925/2304$	$=0.2641203\dots$
$u_7=\frac{1}{0.2641203\dots}-34560/11025$	$=0.6514584\dots$	$u_8=\frac{1}{0.6514584\dots}-187425/147456$	$=0.2639603\dots$
$u_{2m-1}\ \to\ \frac{\pi}{2}\cdot(\sqrt{2}-1)$	$=0.6506451\dots$	$u_{2m}\ \to\ \frac{2}{\pi}\cdot(\sqrt{2}-1)$	$=0.2636965\dots$

Die beschleunigte Berechnung des (linear konvergenten) Kettenbruchs ergibt jedoch nur noch anfänglich einen nennenswerten Gewinn; für $n=1000$ verbessert sich der relative Fehler ${}^{10}\log|\epsilon_n(z)|$ lediglich von $-765.332\dots$ auf $-772.455\dots$, ein Gewinn von 7 Stellen.

---

[26] P. Wynn, *Converging Factors for Continued Fractions.* Numerische Mathematik 1, S. 272–320 (1959).

[27] J. W. L. Glaisher, *On the transformation of continued products into continued fractions.* Proc. Lond. Math. Soc. 5, S. 85 (1873/1874).

Vergleich der Leibniz-Reihe mit den Kettenbrüchen von Lambert und von Jung. Das genaue Ergebnis nachfolgender Untersuchungen vorwegnehmend, zeigt ein Vergleich, daß für die Leibniz-Reihe der absolute Fehler nur mit dem Logarithmus der Anzahl der Schritte abnimmt, während er für den banal entwickelten, den Lambertschen und den Jungschen Zahlkettenbruch proportional der Anzahl der Schritte abnimmt, also für jeden Schritt eine feste Anzahl genauer (Nachkomma-)Stellen für π liefert:

Anzahl Schritte	absoluter Fehler Leibniz-Reihe	genaue Stellen Leibniz-Reihe	genaue Stellen banaler KB	genaue Stellen Lambert-KB	genaue Stellen Jung-KB
10	0.024938259	1	12	7	11
100	0.002499934	2	103	76	113
1000	0.000250004	3	1025	765	1143
10000	0.000025000	4	10245	7654	11438
100000	0.000002500	5	102850	76554	114388

Für die Fälle $z=1$ und $z=1/\sqrt{3}$ lauten die (ungekürzten) Zähler A_i und Nenner B_i der Näherungsbrüche, die gekürzten Näherungsbrüche und die Differenz aufeinanderfolgender Näherungsbrüche:

	i	A_i	B_i	$\gcd(A_i,B_i)$	A_i/B_i	$\frac{A_i}{B_i}-\frac{A_{i-1}}{B_{i-1}}$
	0	0	1		0	
	1	1	1	1	1	1
	2	3	4	1	3/4	−1/4
	3	19	24	1	19/24	1/24
$(z=1)$	4	160	204	4	40/51	−1/136
	5	1744	2220	4	436/555	4/3145
	6	23184	29520	144	161/205	−1/4551
	7	364176	463680	144	2529/3220	1/26404
	8	6598656	8401680	144	45824/58345	−1/153364

	i	A_i	B_i	$\gcd(A_i,B_i)$	A_i/B_i	$\frac{A_i}{B_i}-\frac{A_{i-1}}{B_{i-1}}$
	0	0	1		0	
	1	1	1	1	1	1
	2	9	10	1	9/10	−1/10
	3	49	54	1	49/54	1/135
$(z=\frac{1}{\sqrt{3}})$	4	370	408	2	185/204	−1/1836
	5	10774	11880	2	5387/5940	1/25245
	6	383292	422640	36	10647/11740	−1/348678
	7	5370660	5922000	180	29837/32900	1/4828075
	8	260461008	287199360	144	1808757/1994440	−1/66956200

Nicht nur steigen die Zähler und Nenner fortgesetzt stärker an, die Differenz $\frac{A_i}{B_i}-\frac{A_{i-1}}{B_{i-1}}$ aufeinanderfolgender Näherungsbrüche nimmt fortgesetzt annähernd um einen konstanten Faktor ab; für $i=8$ gegenüber $i=7$ im Falle $z=1$ um $26404/153364 = 287/1667 = 1/5.808362\ldots$, im Falle $z=1/\sqrt{3}$ um $4828075/66956200 = 4109/56984 = 1/13.868094\ldots$. Dies bedeutet, daß die durch die Lambert-Transformation sich ergebende transformierte Leibniz-Reihe

$$\frac{\pi}{4}=\frac{1}{1}-\frac{1}{4}+\frac{1}{24}-\frac{1}{136}+\frac{2^2}{3145}-\frac{1}{4551}+\frac{1}{26404}-\frac{1}{153364}+\frac{2^6}{57056409}-\frac{2^4}{82962445}\pm\ \cdots\ ,$$

wie auch die ebenso transformierte Reihe zum Jungschen Kettenbruch

$$\frac{\pi}{2\sqrt{3}}=\frac{1}{1}-\frac{1}{10}+\frac{1}{135}-\frac{1}{1836}+\frac{1}{25245}-\frac{1}{348678}+\frac{1}{4828075}-\frac{1}{66956200}+\frac{1}{929487393}-\frac{1}{12912084450}\pm\cdots$$

eine wesentliche Verbesserung der Konvergenz erfahren haben, wobei offensichtlich ein kleinerer Wert von z mehr erbringt. Da die Differenz $\frac{A_i}{B_i}-\frac{A_{i-1}}{B_{i-1}}$ eine Abschätzung für den Fehler ergibt, ist zu erwarten, daß auch der Fehler im Limes eine Abnahme um einen konstanten Faktor erfährt; daß

also durch die Lambert-Transformation die schlecht konvergente Gregory-Leibniz-Reihe zum Arcus Tangens lineare Konvergenz erhält. Das bedeutet im übrigen, daß die Lambert-Transformation mit anschließender Rückverwandlung ein Limitierungsverfahren für Potenzreihen ist.

Tatsächlich ergibt sich auch für den relativen Fehler, wie nachfolgend aufgelistet, daß die Fehlerquotienten rasch zu einem Wert beträchtlich kleiner als 1 streben:

	i	A_i/B_i	A_i/B_i	$\lvert\epsilon_i\rvert=\lvert\frac{A_i}{B_i}-\frac{\pi}{4}\rvert/\frac{\pi}{4}$	Fehlerquotient	$^{10}\log\lvert\epsilon_i\rvert$
	1	1	1	0.2732395...		−0.5634565
	2	3/4	0.75	0.04507034...	1/6.06251	−1.3461092
$(z=1)$	3	19/24	0.7916666...	0.007981306...	1/5.64699	−2.0979261
	4	40/51	0.7843137...	0.001380749...	1/5.78042	−2.8598853
	5	436/555	0.7855855...	0.0002386333...	1/5.78607	−3.6222689
	6	161/205	0.7853658...	0.00004113803...	1/5.80080	−4.3857565
	7	2529/3220	0.7854037...	0.000007083427...	1/5.80765	−5.1497566
	8	45824/58345	0.7853972...	0.000001218648...	1/5.81253	−5.9141217
	Limes	$\frac{\pi}{4}$	0.7853981633...		1/5.8284271...	

	i	A_i/B_i	A_i/B_i	$\lvert\epsilon_i\rvert=\lvert\frac{A_i}{B_i}-\frac{\pi}{\sqrt{12}}\rvert/\frac{\pi}{\sqrt{12}}$	Fehlerquotient	$^{10}\log\lvert\epsilon_i\rvert$
	1	1	1	0.2732395...		−0.563456
	2	9/10	0.9	0.007607988...	1/35.9148	−2.118730
$(z=\frac{1}{\sqrt{3}})$	3	49/54	0.9074074074...	0.0005598472...	1/13.5894	−3.251931
	4	185/204	0.9068627450...	0.00004072889...	1/13.7457	−4.390097
	5	5387/5940	0.9069023569...	0.000002949372...	1/13.8093	−5.530271
	6	10647/11740	0.9068994899...	0.0000002130228...	1/13.8453	−6.671574
	7	29837/32900	0.9068996960...	0.00000001536170...	1/13.8671	−7.813561
	8	1808757/1994440	0.9068996811...	0.000000001106642...	1/13.8814	−8.955993
	Limes	$\frac{\pi}{\sqrt{12}}$	0.9068996821171...		1/13.928203...	

Dementsprechend (Abb. 9) streben die dezimalen Logarithmen des relativen Fehlers anscheinend asymptotisch nach einer Geraden. Die Graphen in Abb. 9 zeigen auch für einige weitere der oben angeführten Spezialfälle, daß $^{10}\log|\epsilon_i|$, der dezimale Logarithmus des (relativen) Fehlers nach i Schritten, einen im Rahmen der Zeichengenauigkeit linearen Verlauf hat; zu vermuten ist eine asymptotische Annäherung an strenge Linearität.

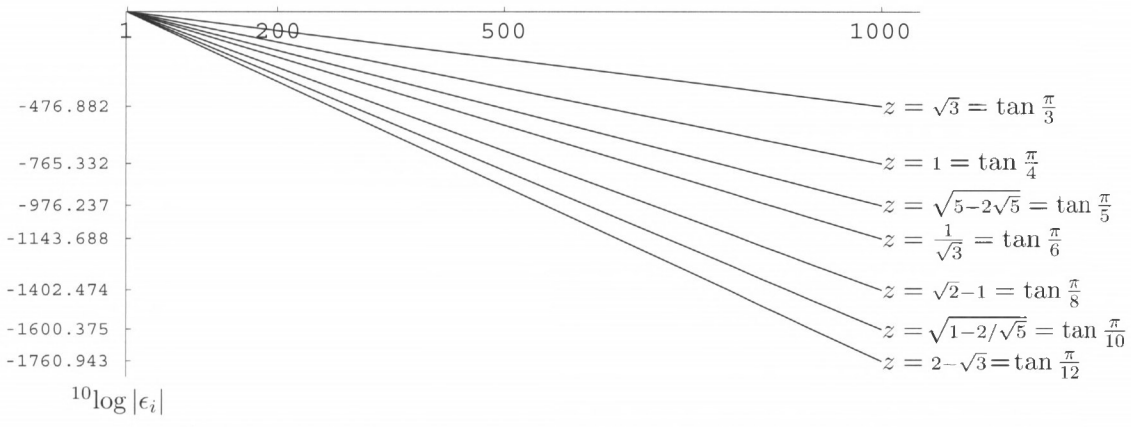


Abb. 9. ^{10}log*-Fehler-Graphen des Lambertschen* arctan z*-Kettenbruchs für einige Werte von* z

Dafür spricht insbesondere der Vergleich der $^{10}\log(|\epsilon_i|/\pi)$-Werte für $i = 10, 10^2, 10^3, 10^4, 10^5$:

	Lambert	Jung
$i = 10$	$-0.7443521210678\ldots \cdot 10^1$	$-1.1241688285334\ldots \cdot 10^1$
$i = 100$	$-0.7633661665061\ldots \cdot 10^2$	$-1.1418424138504\ldots \cdot 10^2$
$i = 1000$	$-0.7653321631044\ldots \cdot 10^3$	$-1.1436889853443\ldots \cdot 10^3$
$i = 10000$	$-0.7655294430128\ldots \cdot 10^4$	$-1.1438744756366\ldots \cdot 10^4$
$i = 100000$	$-0.7655491778403\ldots \cdot 10^5$	$-1.1438930330390\ldots \cdot 10^5$

Die Steigung der vermuteten asymptotischen Fehlergeraden wird im folgenden bestimmt werden.

Eine wichtige Identität von Leonhard Euler. Leonhard Euler (1707–1783) gab 1748 eine wichtige grundlegende Identität für C-Kettenbrüche allgemein, sie lautet im Spezialfalle des Lambertschen C-Kettenbruchs

$$\bar{A}_n(z)\bar{B}_{n-1}(z) - \bar{B}_n(z)\bar{A}_{n-1}(z) = (-1)^{n-1}a_1 \cdot a_2 \cdot \ldots \cdot a_{n-1} \cdot z^{2(n-1)} \quad .$$

Ihren Gebrauch im Limitierungsverfahren für die Gregory-Leibniz-Reihe zeigt folgendes Beispiel:

$n = 2:\quad \bar{A}_2(z)\bar{B}_1(z) - \bar{A}_1(z)\bar{B}_2(z) =$
$1 \cdot 1 - 1 \cdot (1 + \frac{1}{3}z^2) = -\frac{1}{3}z^2$
$\bar{a}_1 = \frac{1}{3}z^2 = \frac{1^2}{1\cdot 3}z^2$

$n = 3:\quad \bar{A}_3(z)\bar{B}_2(z) - \bar{A}_2(z)\bar{B}_3(z) =$
$(1 + \frac{4}{15}z^2) \cdot (1 + \frac{1}{3}z^2) - 1 \cdot (1 + \frac{3}{5}z^2) = \frac{4}{45}z^4 = \frac{1}{3}z^2 \cdot \frac{4}{15}z^2$
$\bar{a}_2 = \frac{4}{15}z^2 = \frac{2^2}{3\cdot 5}z^2$

$n = 4:\quad \bar{A}_4(z)\bar{B}_3(z) - \bar{A}_3(z)\bar{B}_4(z) =$
$(1 + \frac{11}{21}z^2) \cdot (1 + \frac{3}{5}z^2) - (1 + \frac{4}{15}z^2) \cdot (1 + \frac{6}{7}z^2 + \frac{3}{35}z^4) = -\frac{4}{175}z^6 = -\frac{4}{45}z^4 \cdot \frac{9}{35}z^2$
$\bar{a}_3 = \frac{9}{35}z^2 = \frac{3^2}{5\cdot 7}z^2$

$n = 5:\quad \bar{A}_5(z)\bar{B}_4(z) - \bar{A}_4(z)\bar{B}_5(z) =$
$(1+\frac{7}{9}z^2+\frac{64}{945}z^4) \cdot (1+\frac{6}{7}z^2+\frac{3}{35}z^4) - (1+\frac{11}{21}z^2) \cdot (1 + \frac{10}{9}z^2 + \frac{5}{21}z^4) = \frac{64}{11025}z^8 = \frac{4}{175}z^6 \cdot \frac{16}{63}z^2$
$\bar{a}_4 = \frac{16}{63}z^2 = \frac{4^2}{7\cdot 9}z^2$

Umformung: $$\frac{\bar{A}_n(z)}{\bar{B}_n(z)} - \frac{\bar{A}_{n-1}(z)}{\bar{B}_{n-1}(z)} = \frac{(-1)^{n-1}\bar{a}_1 \cdot \bar{a}_2 \cdot \ldots \cdot \bar{a}_{n-1} \cdot z^{2n-2}}{\bar{B}_n(z) \cdot \bar{B}_{n-1}(z)}$$

neue Reihe: $$1 + \frac{-a_1 \cdot z^2}{\bar{B}_2(z) \cdot \bar{B}_1(z)} + \frac{\bar{a}_1 \cdot \bar{a}_2 \cdot z^4}{\bar{B}_3(z) \cdot \bar{B}_2(z)} + \frac{-\bar{a}_1 \cdot \bar{a}_2 \cdot \bar{a}_3 \cdot z^6}{\bar{B}_4(z) \cdot \bar{B}_3(z)} + \frac{\bar{a}_1 \cdot \bar{a}_2 \cdot \bar{a}_3 \cdot \bar{a}_4 \cdot z^8}{\bar{B}_5(z) \cdot \bar{B}_4(z)} + \ldots \cdot$$

Asymptotik

Limitärperiodische Kettenbrüche. Edward Burr Van Vleck (1863–1943)[28] und Oskar Perron (1880–1975)[29] untersuchten Bedingungen für die Konvergenz 'limitärperiodischer' Kettenbrüche. Um einen solchen handelt es sich beim originalen Lambertschen Funktionskettenbruch

$$(*)\quad \arctan z = \frac{1}{\left|\frac{1}{z}\right.} + \frac{1}{\left|3\cdot\frac{1}{z}\right.} + \frac{1}{\left|5\cdot\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{z}\right.} + \frac{1}{\left|7\cdot\frac{4}{9}\cdot\frac{1}{z}\right.} + \frac{1}{\left|9\cdot\frac{9}{4\cdot 16}\cdot\frac{1}{z}\right.} + \frac{1}{\left|11\cdot\frac{4\cdot 16}{9\cdot 25}\cdot\frac{1}{z}\right.} + \frac{1}{\left|13\cdot\frac{9\cdot 25}{4\cdot 16\cdot 36}\cdot\frac{1}{z}\right.} + \ldots$$

bei dem die *Teilnenner*, was schon Lambert beobachtete, mit der Periode 2 abwechselnd gegen $\frac{4}{\pi z}$ und $\frac{\pi}{z}$ streben[30]. Der Lambertsche Funktionskettenbruch ist also limitärperiodisch.

Aber auch die Variante (***) bzw. (†††) ist, was häufig übersehen wurde, limitärperiodisch; die *Teilzähler* des C-Kettenbruch streben[31] sogar mit der Periode 1 gegen $\frac{z^2}{4}$.

---

[28] Edward Burr, *On the convergence of algebraic continued fractions whose coefficients have limiting values*, Trans. Am. Math. Soc. 5, S. 253–262 (1904).

[29] Oskar Perron, *Die Lehre von den Kettenbrüchen*, Teubner 1913, S. 280.

[30] Friedrich L. Bauer, *Lamberts Kettenbruch*. Informatik-Spektrum 28, Heft 4, S. 307 (2005).

[31] Oskar Perron, *Die Lehre von den Kettenbrüchen*, Teubner 1913, S. 347, 3. Aufl. Band II 1957, S. 150.

Grenzkettenbrüche. Der periodische Grenzkettenbruch zum Lambertschen Funktionskettenbruch (†††), der das infinitäre Verhalten beschreibt, hat die Periode 1 und lautet

$$\widetilde{V}(z) = \frac{z^2/4\,\big|}{\big|\ 1} + \frac{z^2/4\,\big|}{\big|\ 1} + \frac{z^2/4\,\big|}{\big|\ 1} + \frac{z^2/4\,\big|}{\big|\ 1} + \frac{z^2/4\,\big|}{\big|\ 1} + \frac{z^2/4\,\big|}{\big|\ 1} + \cdots\ ,$$

er hat nach der Formel von *Cataldi* den Wert $\widetilde{V}(z) = \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{z^2}{4}} - \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \cdot (\sqrt{1+z^2} - 1)$ und führt auf die Rekursion

$$\widetilde{V}(z) = \frac{z^2/4\ \ \big|}{\big|1 + \widetilde{V}(z)}\,.$$

Dies ergibt elementar eine quadratische Gleichung für $\widetilde{V}(z)$: $\big(\widetilde{V}(z)\big)^2 + \widetilde{V}(z) = z^2/4$, mit den Lösungen $V(z) = \frac{1}{2} \cdot (\pm\sqrt{1+z^2} - 1)$, also $\frac{1}{2} \cdot (+\sqrt{1+z^2} - 1)$ in Übereinstimmung mit Cataldi.

Für die Teilzähler $\widetilde{A}_i(z)$ und Teilnenner $\widetilde{B}_i(z)$ des Grenzkettenbruchs $V(z)$ erhält man die Rekursionen ($z \neq 0$)

$$\widetilde{A}_i(z) = \widetilde{A}_{i-1}(z) + \tfrac{z^2}{4} \cdot \widetilde{A}_{i-2}(z)\ , \qquad \widetilde{B}_i(z) = \widetilde{B}_{i-1}(z) + \tfrac{z^2}{4} \cdot \widetilde{B}_{i-2}(z)$$

mit den Anfangsbedingungen

$$\widetilde{A}_1(z) = \tfrac{z^2}{4}\,,\ \widetilde{A}_2(z) = \tfrac{z^2}{4}\ , \qquad \widetilde{B}_1(z) = 1\,,\ \widetilde{B}_2(z) = 1 + \tfrac{1}{4}z^2\ .$$

Die ersten Werte lauten (beachte, daß sich $\widetilde{A}_{i+1}(z) = \frac{z^2}{4} \cdot \widetilde{B}_i(z)$ ergibt)

i	$\widetilde{A}_i(z)$	$\widetilde{B}_i(z)$
1	$\frac{1}{4}z^2$	1
2	$\frac{1}{4}z^2$	$1 + \frac{1}{4}z^2$
3	$\frac{1}{4}z^2(1 + \frac{1}{4}z^2)$	$1 + \frac{2}{4}z^2$
4	$\frac{1}{4}z^2(1 + \frac{2}{4}z^2)$	$1 + \frac{12}{16}z^2 + \frac{1}{16}z^4$
5	$\frac{1}{4}z^2(1 + \frac{12}{16}z^2 + \frac{1}{16}z^4)$	$1 + \frac{16}{16}z^2 + \frac{3}{16}z^4$
6	$\frac{1}{4}z^2(1 + \frac{16}{16}z^2 + \frac{3}{16}z^4)$	$1 + \frac{80}{64}z^2 + \frac{24}{64}z^4 + \frac{1}{64}z^6$
7	$\frac{1}{4}z^2(1 + \frac{80}{64}z^2 + \frac{24}{64}z^4 + \frac{1}{64}z^6)$	$1 + \frac{96}{64}z^2 + \frac{40}{64}z^4 + \frac{4}{64}z^6$.

Die charakteristische Gleichung der dreigliedrigen Rekursionen mit konstanten Koeffizienten für $\widetilde{A}_i(z)$ und $\widetilde{B}_i(z)$ lautet $\xi^2 - \xi - \frac{z^2}{4} = 0$, mit den Wurzeln

$$\xi_1 = \tfrac{1}{2} \cdot (1 + \sqrt{1+z^2})$$
$$\xi_2 = \tfrac{1}{2} \cdot (1 - \sqrt{1+z^2})\ .$$

Beachte, daß $\xi_1 \cdot \xi_2 = -z^2/4$.

Die Asymptotik des logarithmischen Fehlers. Für $\widetilde{A}_i(z)$ und $\widetilde{B}_i(z)$) ergibt sich

$$\widetilde{A}_i(z) \quad = \tfrac{z^2}{4} \tfrac{1}{\sqrt{1+z^2}} \cdot (\xi_1^i - \xi_2^i)\ , \qquad \widetilde{B}_i(z) \quad = \tfrac{1}{\sqrt{1+z^2}} \cdot (\xi_1^{i+1} - \xi_2^{i+1})\ .$$

Für die i-te Näherung des Grenzkettenbruchs erhält man (siehe auch *Darstellung der Näherungsbrüche in geschlossener Form*)

$$\frac{\widetilde{A}_i(z)}{\widetilde{B}_i(z)} = \frac{z^2}{4} \frac{\xi_1^i - \xi_2^i}{\xi_1^{i+1} - \xi_2^{i+1}} = \frac{z^2}{4} \frac{\xi_1^i \cdot (1 - (\xi_2/\xi_1)^i)}{\xi_1^{i+1} \cdot (1 - (\xi_2/\xi_1)^{i+1})}\ ;\ \text{wegen } |\xi_2/\xi_1| < 1 \quad \text{für reelles } z \text{ gilt}$$

$$\lim_{i\to\infty} \Big|\frac{\widetilde{A}_i(z)}{\widetilde{B}_i(z)}\Big| = \frac{z^2}{4}\frac{1}{\xi_1} = -\xi_2 = \frac{1}{2} \cdot (\sqrt{1+z^2} - 1) = V(z) \quad \text{wie oben, und für den Fehler gilt}$$

$$\widetilde{e}_i(z) = \frac{\widetilde{A}_i(z)}{\widetilde{B}_i(z)} - \widetilde{V}(z) = \frac{\widetilde{A}_i(z) - V(z) \cdot \widetilde{B}_i(z)}{\widetilde{B}_i(z)} = \frac{z^2}{4} \frac{(\xi_1^i - \xi_2^i) - (1/\xi_1) \cdot (\xi_1^{i+1} - \xi_2^{i+1})}{\xi_1^{i+1} - \xi_2^{i+1}}$$
$$= \frac{z^2}{4} \frac{\xi_2 - \xi_1}{\xi_1 \xi_2} \cdot \frac{\xi_2^{i+1}}{\xi_1^{i+1}} \cdot \frac{1}{1 - (\xi_2/\xi_1)^{i+1}} = \sqrt{1+z^2} \cdot \Big(\frac{\xi_2}{\xi_1}\Big)^{i+1} \cdot \frac{1}{1 - (\xi_2/\xi_1)^{i+1}}\ .$$

Der Grenzwert $\eta(z)$ des Fehlerquotienten für den Grenzkettenbruch ergibt sich zu

$$\eta(z) = \lim_{i\to\infty}\left|\frac{\widetilde{e}_{i+1}(z)}{\widetilde{e}_i(z)}\right| = \left|\frac{\xi_2}{\xi_1}\right| = \frac{\sqrt{1+z^2}-1}{\sqrt{1+z^2}+1} = \left(\frac{\sqrt{1+z^2}-1}{z}\right)^2 .$$

Für $z=\sqrt{3}$ ist $\eta(z)=1/3$; für $z=1$ ist $\eta(z)=1/(3+\sqrt{8})=1/5.8284271\ldots$;
für $z=1/\sqrt{3}$ ist $\eta(z)=1/(7+\sqrt{48})=1/13.928203\ldots$.

Approximativ gilt, weil $(\xi_2/\xi_1)^{i+1}$ gegen 1 asymptotisch vernachlässigt werden kann,

$$|\widetilde{e}_i(z)| \approx \sqrt{1+z^2}\cdot\left|\frac{\xi_2}{\xi_1}\right|^{i+1} = \left[\sqrt{1+z^2}\cdot\left(\frac{\sqrt{1+z^2}-1}{z}\right)^2\right]\cdot\left|\frac{\xi_2}{\xi_1}\right|^{i}$$

und damit für den ^{10}log-Fehler des Grenzkettenbruchs

$$^{10}\log|\widetilde{e}_i(z)| \approx i\cdot{}^{10}\log\left(\tfrac{\sqrt{1+z^2}-1}{z}\right)^2 + {}^{10}\log\left[\sqrt{1+z^2}\cdot\left(\tfrac{\sqrt{1+z^2}-1}{z}\right)^2\right] .$$

Die Gleichung der Asymptote an die ^{10}log-Fehlerkurve des Grenzkettenbruchs lautet also

$$^{10}\log|\widetilde{e}_i(z)| = i\cdot{}^{10}\log\eta(z) + {}^{10}\log\left[\sqrt{1+z^2}\cdot\eta(z)\right] .$$

Für $z=\tan\pi/k$ ist $\eta(z)=\left(\frac{\sqrt{1+z^2}-1}{z}\right)^2=\frac{\sqrt{1+z^2}-1}{\sqrt{1+z^2}+1}=\frac{1-\cos\pi/k}{1+\cos\pi/k}$.

Die Steigung $^{10}\log\eta(z)=^{10}\log\left(\frac{\sqrt{1+z^2}-1}{z}\right)^2$ der Asymptote an die ^{10}log-Fehlerkurve des Grenzkettenbruchs beträgt

für $z=\sqrt{3}=\tan\frac{\pi}{3}, \cos\frac{\pi}{3}=\frac{1}{2}$: $^{10}\log\frac{2-1}{2+1} = {}^{10}\log(1/3) = -0.47712125471\ldots$,

für $z=1=\tan\frac{\pi}{4}$ (Lambert), $\cos\frac{\pi}{4}=\frac{\sqrt{2}}{2}$: $^{10}\log\frac{2-\sqrt{2}}{2+\sqrt{2}} = {}^{10}\log(3-\sqrt{8}) = -0.76555137067\ldots$,

für $z=\sqrt{5-2\cdot\sqrt{5}}=\tan\frac{\pi}{5}$, $\cos\frac{\pi}{5}=\frac{1+\sqrt{5}}{4}$: $^{10}\log\frac{4-(1+\sqrt{5})}{4+(1+\sqrt{5})} = {}^{10}\log(1-2/\sqrt{5}) = -0.97644792291\ldots$,

für $z=1/\sqrt{3}=\tan\frac{\pi}{6}$ (Jung), $\cos\frac{\pi}{6}=\frac{\sqrt{3}}{2}$: $^{10}\log\frac{2-\sqrt{3}}{2+\sqrt{3}} = {}^{10}\log(7-\sqrt{48}) = -1.14389509506\ldots$.

für $z=\sqrt{2}-1=\tan\frac{\pi}{8}$, $\cos\frac{\pi}{8}=\sqrt{2+\sqrt{2}}/2$: $^{10}\log\frac{2-\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}} = -1.40267642753\ldots$,

für $z=\sqrt{1-2/\sqrt{5}}=\tan\frac{\pi}{10}$, $\cos\frac{\pi}{10}=\sqrt{(5+\sqrt{5})/8}$: $^{10}\log\frac{\sqrt{8}-\sqrt{(5+\sqrt{5})}}{\sqrt{8}+\sqrt{(5+\sqrt{5})}} = -1.60057497141\ldots$,

für $z=2-\sqrt{3}=\tan\frac{\pi}{12}$, $\cos\frac{\pi}{12}=(1+\sqrt{3})/(\sqrt{8})$: $^{10}\log\frac{\sqrt{8}-(1+\sqrt{3})}{\sqrt{8}+(1+\sqrt{3})} = -1.76114179490\ldots$.

Der Faktor $\sqrt{1+z^2}\cdot\left(\frac{\sqrt{1+z^2}-1}{z}\right)^2$ errechnet sich

für $z=1$ (Lambert) zu $0.242640687\ldots$ $(^{10}\log 0.242640687\ldots = -0.615036374\ldots)$,
für $z=1/\sqrt{3}$ (Jung) zu $0.082903768\ldots$ $(^{10}\log 0.082903768\ldots = -1.081425730\ldots)$.

Die asymptotische Annäherung wird auch durch den Vergleich einiger ^{10}log-Werte des relativen Fehlers für den Lambert-Kettenbruch bzw. den Jung-Kettenbruch und den jeweils zugehörigen Grenzkettenbruch demonstriert:

i	Lambert-KB ($z=1$)	Grenz-KB	Differenz	Jung-KB ($z=\frac{1}{\sqrt{3}}$)	Grenz-KB	Differenz
10	− 7.4435212	−7.5867444	0.1432232	−11.2416883	−11.4088385	0.1671502
10^2	− 76.3366167	−76.4863678	0.1497511	−114.1842414	−114.3593971	0.1751557
10^3	− 765.3321631	−765.4826014	0.1504383	−1143.6889853	−1143.8649826	0.1759973
10^4	− 7655.2944301	−7655.4449375	0.1505074	−11438.7447564	−11438.9208382	0.1760818
10^5	− 76554.9177840	−76555.0682983	0.1505143	−114389.3033039	−114389.4793942	0.1760903

Experimentell ergibt sich, daß die Differenzen

für $z=1$ gegen $0.150514997\ldots = {}^{10}\log\sqrt{2}$,
für $z=\frac{1}{\sqrt{3}}$ gegen $0.176091259\ldots = {}^{10}\log 3/2$

streben. Es sind also die relativen Fehler des Lambertschen Kettenbruchs das $\sqrt{2}$-fache, die des Jungschen Kettenbruchs das $\frac{3}{2}$-fache der relativen Fehler des jeweiligen Grenzkettenbruchs.

Das Hauptergebnis dieses Abschnitts ist: Aus der Steigung der asymptotischen Fehlergeraden ergibt sich, daß nach i Schritten die Anzahl genauer Stellen asymptotisch beträgt

für $z=1$ (Lamberts Zahlkettenbruch) $\quad i \cdot {}^{10}\log(3+\sqrt{8}) \;=\; i \cdot 0.76555137067\ldots$,

für $z=\frac{1}{\sqrt{3}}$ (Jungs Zahlkettenbruch) $\quad i \cdot {}^{10}\log(7+\sqrt{48}) \;=\; i \cdot 1.14389509506\ldots$;

zu vergleichen mit dem banalen Kettenbruch für π, für den nach i Schritten die Anzahl genauer Stellen asymptotisch beträgt $\quad i \cdot \pi^2/(6 \cdot \ln 2 \cdot \ln 10) \;=\; i \cdot 1.0306408341007\ldots$ (Khintchine).

Lamberts Transformation für die Logarithmus-Reihe. Der Vollständigkeit halber behandeln wir noch die der Funktionsreihe des Arcus Tangens verwandte, von Nicolas Mercator (1620–1687) im Jahre 1668 publizierte Funktionsreihe des (natürlichen) Logarithmus:

$$\ln(1+z) = z - \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{3} - \frac{z^4}{4} + \frac{z^5}{5} - \frac{z^6}{6} \pm \ldots .$$

die für $|z| \le 1$, $z \neq -1$ konvergiert, für $z=1$ ebenfalls (allerdings miserabel), und zwar nach $\ln 2$. Sie heißt manchmal auch Mercator-Reihe und war auch schon 1665 Isaac Newton (1642–1727) bekannt. Die Lambert-Transformation gibt dazu

$$(*)\quad \ln(1+z) = \frac{1\,|}{|\,1/z} + \frac{1\,|}{|\,4/2} + \frac{1\,|}{|\,3/z} + \frac{1\,|}{|\,4/4} + \frac{1\,|}{|\,5/z} + \frac{1\,|}{|\,4/6} + \frac{1\,|}{|\,7/z} + \frac{1\,|}{|\,4/8} + \frac{1\,|}{|\,9/z} + \frac{1\,|}{|\,4/10} + \ldots$$

und in die gebräuchliche Form gebracht[32]

$$(**)\quad \ln(1+z) = \frac{z\,|}{|\,1} + \frac{1^2\cdot z\,|}{|\,2} + \frac{1^2\cdot z\,|}{|\,3} + \frac{2^2\cdot z\,|}{|\,4} + \frac{2^2\cdot z\,|}{|\,5} + \frac{3^2\cdot z\,|}{|\,6} + \frac{3^2\cdot z\,|}{|\,7} + \frac{4^2\cdot z\,|}{|\,8} + \frac{4^2\cdot z\,|}{|\,9} + \frac{5^2\cdot z\,|}{|\,10} + \ldots .$$

Schließlich erhält man mit Teilnennern 1 die Fassungen als C-Kettenbrüche

$$(***)\quad \ln(1+z) = \frac{z\,|}{|\,1} + \frac{\frac{z}{1\cdot 2}\,|}{|\,1} + \frac{\frac{z}{2\cdot 3}\,|}{|\,1} + \frac{\frac{4z}{3\cdot 4}\,|}{|\,1} + \frac{\frac{4z}{4\cdot 5}\,|}{|\,1} + \frac{\frac{9z}{5\cdot 6}\,|}{|\,1} + \frac{\frac{9z}{6\cdot 7}\,|}{|\,1} + \frac{\frac{16z}{7\cdot 8}\,|}{|\,1} + \frac{\frac{16z}{8\cdot 9}\,|}{|\,1} + \frac{\frac{25z}{9\cdot 10}\,|}{|\,1} + \ldots .$$

bzw.

$$(\dagger\dagger\dagger)\quad \frac{\ln(1+z)}{z} = \frac{1\,|}{|\,1} + \frac{\frac{z}{1\cdot 2}\,|}{|\,1} + \frac{\frac{z}{2\cdot 3}\,|}{|\,1} + \frac{\frac{4z}{3\cdot 4}\,|}{|\,1} + \frac{\frac{4z}{4\cdot 5}\,|}{|\,1} + \frac{\frac{9z}{5\cdot 6}\,|}{|\,1} + \frac{\frac{9z}{6\cdot 7}\,|}{|\,1} + \frac{\frac{16z}{7\cdot 8}\,|}{|\,1} + \frac{\frac{16z}{8\cdot 9}\,|}{|\,1} + \frac{\frac{25z}{9\cdot 10}\,|}{|\,1} + \ldots .$$

die beide wiederum limitärperiodisch sind; die Faktoren von z in denTeilzählern streben wie beim Arcus Tangens-Kettenbruch nach $\frac{1}{4}$; der Wert des Grenzkettenbruchs ist $(\sqrt{z+1}-1)/2$.

Der Kettenbruch konvergiert in der ganzen komplexen Ebene mit Ausnahme eines geradlinigen Schnitt von -1 nach $-\infty$. Schon Lambert hat 1770 festgestellt, daß er für $z=2$, also für $\ln 3$, konvergiert, obwohl die Reihe dort divergiert. Es herrscht wieder lineare Konvergenz. Abb. 10 zeigt die ${}^{10}\log$-Fehler-Graphen für verschiedene Werte von z, für die der Kettenbruch $(\dagger\dagger\dagger)$ $\frac{\ln 4}{3}$, $\ln 2$, $3\cdot\ln\frac{4}{3}$ ergibt.

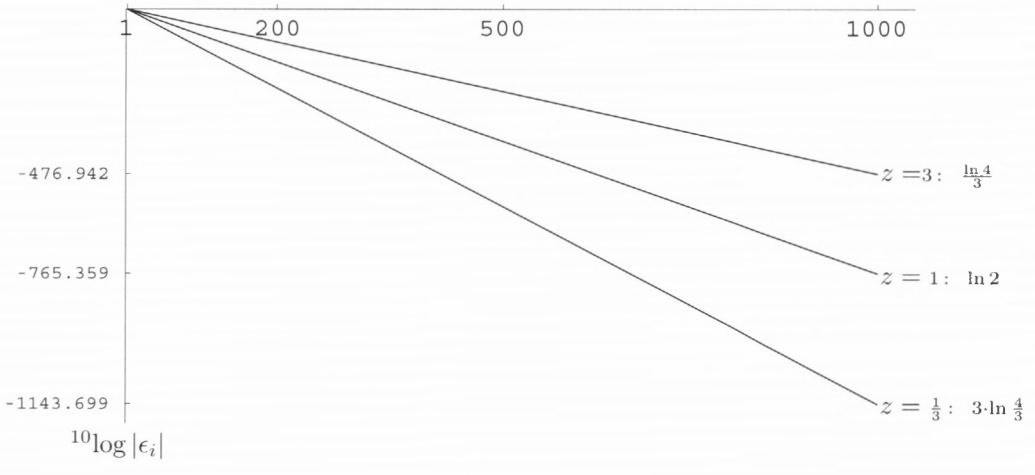


Abb. 10. ${}^{10}\log$*-Fehler-Graphen des Gaußschen Kettenbruchs* $\ln(1+z)/z = F(1,1;2;-z)$ *für einige Werte von* z

[32] Oskar Perron, a.a.O. S. 349, Gl. (7).

Subtrahiert man von der Mercator-Reihe die sich aus ihr sofort ergebende Reihe für $\ln(1-z)$, so erhält man die Reihe mit den Schnitten von $+1$ nach $+\infty$ und -1 nach $-\infty$

$$\ln\frac{1+z}{1-z} = 2\cdot\left[z+\frac{z^3}{3}+\frac{z^5}{5}+\frac{z^7}{7}+\frac{z^9}{9}+\frac{z^{11}}{11}+\frac{z^{13}}{13}+\ldots\right.$$

und aus ihr durch die Lambert-Transformation den Kettenbruch

$$\ln\frac{1+z}{1-z} = \frac{2\cdot z|}{|\,1} - \frac{1^2\cdot z^2|}{|\,3} - \frac{2^2\cdot z^2|}{|\,5} - \frac{3^2\cdot z^2|}{|\,7} - \frac{4^2\cdot z^2|}{|\,9} - \frac{5^2\cdot z^2|}{|\,11} - \frac{6^2\cdot z^2|}{|\,13} - \ldots\,,$$

dessen Verwandtschaft mit dem Lambertschen Kettenbruch in der Version (**) offensichtlich ist.

Lamberts Transformation für die hypergeometrische Reihe. Carl Friedrich Gauß führte 1813 die hypergeometrische Potenzreihe

$$F(a,b;c;z) = 1+\frac{a\cdot b}{1\cdot c}z+\frac{a(a+1)\cdot b(b+1)}{1\cdot 2\cdot c(c+1)}z^2+\frac{a(a+1)(a+2)\cdot b(b+1)(b+2)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot c(c+1)(c+2)}z^3+\ldots$$

ein, die für $|z|<1$ konvergiert, und bewies die Identität

$$\frac{F(a,b+1;c+1;z)}{F(a,b;c;z)} = \left(1-\frac{a(c-b)}{c(c+1)}\,z\,\frac{F(a+1,b+1;c+2;z)}{F(a,b+1;c+1;z)}\right)^{-1}\quad.$$

Beachte, daß hier $F(a,b+1;c+1;z)$ doppelt vorkommt, und daß die wiederholte Einsetzung der linken Seite in die rechte Seite auf die 'Wechselwegnahme' von Lambert hinausläuft; dabei Schritt für Schritt einen C-Kettenbruch aufbaut, nämlich (beginnend mit $b=0$ und c an Stelle von $c+1$)

$$F(a,1;c;z) = \frac{1|}{|1} + \frac{a_1\cdot z|}{|\,1} + \frac{a_2\cdot z|}{|\,1} + \frac{a_3\cdot z|}{|\,1} + \ldots\,,\quad \text{wo}\quad (\nu=0,1,2,\ldots)$$

$$a_{2\nu+1} = \frac{(a+\nu)\cdot(c-1+\nu)}{(c+2\nu-1)\cdot(c+2\nu)}\,,\qquad a_{2\nu+2} = -\frac{(1+\nu)\cdot(c-a+\nu)}{(c+2\nu)\cdot(c+2\nu+1)}\,.$$

Die Art, in der Gauß die Wechselwegnahme vornimmt, führt anders als bei Lambert nicht zu einem Kettenbruch der Form (*), sondern sogleich zu einem C-Kettenbruch der Form (***), ja sogar der Form (†††). Stellt man erst einmal mit Überraschung fest, daß $F(\frac{1}{2},1;\frac{3}{2};-z^2)$ mit $\frac{\arctan z}{z}$ und insbesondere $F(1,1;2;-z)$ mit $\frac{\ln(1+z)}{z}$ zusammenfällt, so wird man nicht nochmals überrascht sein, daß auch der Kettenbruch $F(a,1;c;-z)$ limitärperiodisch ist, daß nämlich offensichtlich die a_i mit $i\to\infty$ ebenfalls sämtlich gegen $\frac{1}{4}$ streben, also auch mit der Periode 1. Das bedeutet aber, daß alle diese Kettenbrüche (bei festem z) den selben Grenzkettenbruch haben, daß also die für den Fall des Lambertschen Kettenbruchs behandelte Asymptotik des ^{10}log-Fehler-Graphen auch für sie gilt. Insbesondere gibt Abb. 10 für $F(a,1;c;-z)$ wie Abb. 9 für $F(a,1;c;-z^2)$ den linearen Charakter der ^{10}log-Fehler-Graphen in Abhängigkeit von z wieder.

Im übrigen kann das neuere Verfahren von Evelyn Frank unschwer auch auf beliebige C-Kettenbrüche ausgedehnt werden; dies findet sich in der dritten Auflage von 1957 des Buches von Perron ausgeführt[33]. Perrons Schülerin hat Gauß sowie ihren Lehrmeister Perron übertroffen, ihr Verfahren hebelt in der Praxis das Gaußsche Vorgehen des Euklidschen Algorithmus aus. Das mag Grund genug sein, sich dieser Frau zu erinnern.

Zahlreiche Funktionen, die durch die hypergeometrische Reihe ausgedrückt werden können, erfahren durch den jeweils zugehörigen C-Kettenbruch eine Berechnungsmöglichkeit mit linearer Konvergenz, die andere dafür gedachte Kettenbrüche mit logarithmischer Konvergenz — darunter die Kettenbrüche für π von Brouncker, Euler, Stern und eine Reihe späterer — aussticht.

Eulers Herleitung des Lambertschen Kettenbruchs aus einem Integral. Wenn schon das Gros der Mathematiker erst spät auf Lamberts Kettenbruch aufmerksam wurde — Vilém Jung erkannte den von ihm 1880 publizierten Zahl-Kettenbruch nicht als Spezialfall des Lambertschen Funktions-Kettenbruchs — so ging es selbst dem berühmteren Leonhard Euler kaum besser: daß

[33] Oskar Perron, *Die Lehre von den Kettenbrüchen*, 3. Auflage Band II. Teubner 1957, posthum 1977, S. 111.

er 1775 den Lambertschen Funktions-Kettenbruch von 1770 aus einem Integral herleitete, blieb noch länger unbeachtet und unerwähnt.

Es handelt sich um das Integral $\Psi_n(a,b,c) = \int \frac{x^n}{\sqrt{a^2 - 2b\cdot x + c\cdot x^2}}$

für das Euler die Rekursionsbeziehung $n\,a^2\,\Psi_{n-1} = (2n+1\,b)\,\Psi_n - (n+1)\,c\,\Psi_{n+1}$

fand. Daraus gewann er für $\Psi_0(a,b,c) = \int \frac{1}{\sqrt{a^2-2b\cdot x+c\cdot x^2}} = \frac{1}{\sqrt{c}} \ln \frac{c\cdot x - b + \sqrt{c\,(a^2-2b\cdot x+c\cdot x^2)}}{-b+a\sqrt{c}}$

den Kettenbruch

$$\Psi_0(a,b,c) = \frac{a}{|\,b} - \frac{1^2\cdot a^2\cdot c}{|\,3b} - \frac{2^2\cdot a^2\cdot c}{|\,5b} - \frac{3^2\cdot a^2\cdot c}{|\,7b} - \frac{4^2\cdot a^2\cdot c}{|\,9b} - \frac{5^2\cdot a^2\cdot c}{|\,11b} - \frac{6^2\cdot a^2\cdot c}{|\,13b} - \ldots\,,$$

Es ist $\Psi_0(a,b,-1) = \arctan\frac{a}{b}$ (zyklometrischer Fall), $\Psi_0(a,b,1) = \operatorname{arctanh}\frac{a}{b}$ (hyperbolischer Fall). Für den Fall $c=-1$ mit $b=1$ (und mit z für a) hat man den arc tan-Kettenbruch (**).

Mit $a=1$ ergibt sich sodann der Lambertsche Zahl-Kettenbruch

$$\frac{\pi}{4} = \frac{1}{|\,1} + \frac{1^2}{|\,3\cdot 3} + \frac{2^2}{|\,5} + \frac{3^2}{|\,7} + \frac{4^2}{|\,9} + \frac{5^2}{|\,11} + \frac{6^2}{|\,13} + \frac{7^2}{|\,15} + \ldots\,,$$

mit $b=3$, $a=\sqrt{3}$ (und $c=-1$) der Kettenbruch

$$\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{|\,1\cdot 3} + \frac{1^2\cdot 3}{|\,3\cdot 3} + \frac{2^2\cdot 3}{|\,5\cdot 3} + \frac{3^2\cdot 3}{|\,7\cdot 3} + \frac{4^2\cdot 3}{|\,9\cdot 3} + \frac{5^2\cdot 3}{|\,11\cdot 3} + \frac{6^2\cdot 3}{|\,13\cdot 3} + \frac{7^2\cdot 3}{|\,15\cdot 3} + \ldots\,,$$

der bis auf Faktoren äquivalent ist dem Kettenbruch von Vilém Jung wie auch dem bei Euler stehenden

$$\frac{\pi}{6\sqrt{3}} = \frac{1}{|\,1\cdot 3} + \frac{1^2}{|\,3} + \frac{2^2}{|\,5\cdot 3} + \frac{3^2}{|\,7} + \frac{4^2}{|\,9\cdot 3} + \frac{5^2}{|\,11} + \frac{6^2}{|\,13\cdot 3} + \frac{7^2}{|\,15} + \ldots\,.$$

Mit $b=2$ bzw. $b=3$, sowie $a=1$ (und $c=-1$), erhält man die Kettenbrüche

$$\arctan\frac{1}{2} = \frac{1}{|\,2} + \frac{1^2}{|\,6} + \frac{2^2}{|\,10} + \frac{3^2}{|\,14} + \frac{4^2}{|\,18} + \frac{5^2}{|\,22} + \frac{6^2}{|\,26} + \frac{7^2}{|\,30} + \ldots\,,$$

$$\arctan\frac{1}{3} = \frac{1}{|\,3} + \frac{1^2}{|\,9} + \frac{2^2}{|\,15} + \frac{3^2}{|\,21} + \frac{4^2}{|\,27} + \frac{5^2}{|\,33} + \frac{6^2}{|\,39} + \frac{7^2}{|\,45} + \ldots\,;\ \text{allgemein}$$

$$\arctan\frac{1}{b} = \frac{1}{|\,b} + \frac{1^2}{|\,3\cdot b} + \frac{2^2}{|\,5\cdot b} + \frac{3^2}{|\,7\cdot b} + \frac{4^2}{|\,9\cdot b} + \frac{5^2}{|\,11\cdot b} + \frac{6^2}{|\,13\cdot b} + \frac{7^2}{|\,15\cdot b} + \ldots\,.$$

Euler weist bereits darauf hin, daß $\arctan\frac{1}{2} + \arctan\frac{1}{3} = \frac{\pi}{4}$ ist. Im übrigen beobachtet er auch, daß der Lambertsche Zahl-Kettenbruch „viel besser konvergiert" als der Kettenbruch von Brouncker. Insbesondere gebe die Summe der obigen Kettenbrüche für $\arctan\frac{1}{2}$ und $\arctan\frac{1}{3}$ eine „noch schnellere" Berechnungsmethode für $\frac{\pi}{4}$.

Für den Fall $c=-1$ ergibt $\Psi_0(a,b,c)$ mit $a=1$ den hyperbolischen arc tanh-Kettenbruch

$$\ln\frac{b+1}{b-1} = \frac{2}{|\,b} - \frac{1^2}{|\,3\cdot b} - \frac{2^2}{|\,5\cdot b} - \frac{3^2}{|\,7\cdot b} - \frac{4^2}{|\,9\cdot b} - \frac{5^2}{|\,11\cdot b} - \frac{6^2}{|\,13\cdot b} - \frac{7^2}{|\,15\cdot b} - \ldots\,.$$

Lambert war Euler nur eine kurze Zeitspanne voraus: Lamberts Kettenbrucharbeit erschien 1770 in Berlin. Eulers Arbeit wurde am 4. September 1775 der Akademie von St. Petersburg vorgelegt und erschien unter dem Titel *Speculationes super formula integrali* $\int x^n/\sqrt{(a^2 - 2b\cdot x + c\cdot x^2)}$ in den *Acta Academiae Scientarum Imperialis Petropolitinae* 1782, Seite 62-84.

Fazit: Sowohl bei der Aufstellung und Umformung von Kettenbrüchen wie bei der Auswertung mit hoher Anzahl von Gliedern ist die Computer-Algebra hilfreich, wenn nicht sogar unumgänglich. Die vorliegende Abhandlung soll zeigen, daß und wie die Computer-Algebra auch umgekehrt zu neuen Einsichten führen kann.

Index

Abb. 1.[10] log-Fehler-Graph für den Kettenbruch zum Näherungswert 31415926535/10000000000, 6
Abb. 2. [10] log-Fehler-Graph für die ersten 14 Terme des banal entwickelten π-Kettenbruchs, 6
Abb. 3. [10] log-Fehler-Graph für die ersten 100 Terme des banal entwickelten π-Kettenbruchs, 7
Abb. 4. Konvergenz- bzw. Divergenz des ArcusTangens-Kettenbruchs von William Brouncker (1655), 14
Abb. 5. Kettenbrüche, deren $^{10}log(\epsilon_i)$-Graph logarithmische Konvergenz anzeigt., 16
Abb. 6. Der Arcus Tangens Kettenbruch in der Originalarbeit von Lambert, 1770, 19
Abb. 7. Bildungsgesetz der Kettenbruch-Nenner in der Originalarbeit von Lambert, 1770, 19
Abb. 8. MATHEMATICA-Programm für die Lambert-Transformation, 19
Abb. 9. [10] log-Fehler-Graphen des Lambertschen arctan z-Kettenbruchs für einige Werte von z, 24
Abb. 10. [10] log-Fehler-Graphen des Gaußschen Kettenbruchs $\ln(1+z)/z = F(1,1;2;-z)$ für einige Werte von z, 28
Abbrechfehler bei der Methode der banalen Entwicklung eines Kettenbruchs, 11
Al-Biruni, 5
Al-Qalasadi, 9
Antoniszoon, Adriaan, 5
Archimedes von Syrakus, 5, 8, 29
arctan z, Lambert-Transformation für, 19
Arndt, Jörg, 6
Asymptotik
– der Näherungsbrüche, 25, 29
– des log. Fehlers, 26
Ausschöpfung, 19, 20

Bakhsali, 8
Berechnung eines Kettenbruchs
– 'natürliche', 4
– mittels Rekursion, 17
– quadratisch konvergente, 16
Bernoulli, Daniel, 17
Bombelli, Rafael, 8, 9, 11
Borwein, Jonathan M., 13
Borwein, Peter B., 13
Brezinski, Claude, 9
Brouncker, William, 14, 16, 29
Burr, Edward, 25

C-Kettenbruch, 19, 21, 22, 25, 29
Cardano, Geronimo, 17
Cataldi, Pietro Antonio, 8–11, 17, 26
Cataldisches Iterationsverfahren, 17
Ceulen, Ludolph van, 5, 6
continued fraction, regular (or simple) (Begriff), 4

Dilcher, Karl, 13

Euklid von Alexandria, 4
Euklidscher Algorithmus, 4, 5, 17, 19
Euler, Leonhard, 7, 13, 14, 16, 17, 20, 22, 25, 29
Euler-Transformation von Reihen, 13, 14
Eulers Zahlkettenbruch
– für $\pi/4$, 30
– für $\pi/(6\sqrt{3})$, 30

Faktorzerlegung der Zähler und Nenner des Kettenbruchs von $\sqrt{3}$, 8
Faustregel für den Abbrechfehler, 11
Fehlergerade, Steigung, 28
Fibonacci, Leonardo, 9
Frank, Evelyn, 21, 29

Gauß, Carl Friedrich, 29
Gewinnung, divisionsfreie G. eines Kettenbruchs aus einer Potenzreihe (Evelyn Frank), 21
Glaisher, James Whitbread Lee, 22
Glaisher-Wynn Modifikation des Lambertschen Kettenbruchs, 22
Gosper, William R, 6
Gregory, James, 5, 12
Gregory-Leibniz-Reihe, 17, 20, 21, 23
– Definition, 12
– Historie, 12
– Kettenbrüche daraus, 14
– Konvergenz, 12, 14
– Konvergenzverbesserung durch Korrekturglieder, 13
Grenzkettenbruch, 26, 28
Grienberger, Christoph, 5
Günther, Siegmund, 11, 17

Haenel, Christoph, 6
Hermite, Charles, 7
Huygens, Christiaan, 4, 8
Hypergeometrische Reihe, 29

Jung, Vilém, 21, 29
Jungs Zahlkettenbruch für $\pi/(2\sqrt{3})$, 23, 28

K (Grenzwert von Khintchine), 8
Kanada, Yasumasa, 6
Kettenbruch
– für $(\phi - 1)$, 7
– für $(\pi^e - 22)$, 7
– für $(\sqrt{2} - 1)$, 7
– für $(\sqrt{3} - 1)$, 7
– für $(\sqrt[3]{2} - 1)$, 7
– für $(\sqrt{\pi} - 1)$, 7
– für $(\sqrt{e} - 1)$, 7
– für $(e - 2)$, 7
– für $(e^2 - 7)$, 7
– für $2/\pi$ (Näherungsbrüche sind abbrechende Binärbrüche), 16
– für $4/\pi$ (Brouncker, 1655), 16
– für $4/\pi$ (Euler, 1783-2), 16
– für arctan $1/2$ (Euler, 1775), 30
– für arctan $1/3$ (Euler, 1775), 30
– für arctan $1/b$ (Euler, 1775), 30
– für arctan y, 14
– für $\ln(b+1)/(b-1)$ (Euler, 1775), 30
– für π (abbrechend), 5
– für π (banal entwickelt), 5–7

– für π (Euler, 1770), 16
– für $\pi/2$ (Euler, 1739), 16, 22
– für $\pi/2$ (Euler, 1783-1), 16
– für $\pi/4$ (Euler, 1775), 30
– für $\pi/4$ (Lambert, 1770), 21–23, 28
– für $\pi/(2\sqrt{3})$, 28
– für $\pi/(3\sqrt{3})$, 20
– für $\pi/(6\sqrt{3})$, 30
– für $\sqrt{2}$ (Näherungsbrüche), 17
– für $\sqrt{3}$, 8
– für $\sqrt{13}$, 9
– für $\sqrt{27}$, 8
– für $\sqrt{78}$ (24. Näherungsbruch), 10
– für $\sqrt{N}$, 9
– limitärperiodisch, 25, 28, 29
– periodisch, 10
– periodisch (geschlossene Form des Näherungsbruchs), 11
– regelmäßig (Begriff), 4
Kettenbruch, Berechnung, 4
Khintchine, Alexander, 7, 8
Khintchinsche Konstante K, 8
Knopp, Konrad, 13
Knuth, Donald E., 6
Konvergenz, lineare, 28
Konvergenz, logarithmische, 14–16
Konvergenzbeschleunigung, 17, 19
Konvergenzverbesserung, 12, 13, 23
Konvergenzverhalten der Cataldischen Kettenbrüche, 11

Lagrange, Joseph de, 7, 10
Lambert, Johann Heinrich, 5, 17, 28, 30
Lambert-Transformation, 17–20, 28
Lamberts Transformation der Logarithmus-Reihe, 28
Lamberts Transformation für die hypergeometrische Reihe, 29
Lamberts Zahlkettenbruch für $\pi/4$, 21–23, 28, 30
Lambertscher C-Kettenbruch für $\arctan z$, 21
Lambertscher Funktionskettenbruch
– für $\arctan z$, Var. $(*)$ (Original), 19, 25
– für $\arctan z$, Var. $(**)$, 19, 30
– für $\arctan z$, Var. $(\dagger\dagger\dagger)$, 19, 21, 22
– für $\ln(1+z)$, 28
Lehmer, Derrick Henry, 8
Leibniz, Gottfried Wilhelm, 12
Leibniz-Reihe, *siehe* Gregory-Leibniz-Reihe
Limitärperiodische Kettenbrüche, 25, 28, 29
Limitierungsverfahren, 24–25

Madhava, 12
Mercator, Nicolas, 28
Modifikationen an einem Kettenbruch, 22
Modifikationen an Kettenbruchsegmenten, additive, 23
Moret-Blanc, 11

Näherungsbruch (Begriff), 5
Näherungsbrüche des Cataldischen Kettenbruchs, 12
Näherungsbrüche von periodischen Kettenbrüchen, 11
Neugebauer, Otto, 17
Newton, Isaac, 17
Nilakantha, 12

Otho, Valenthin, 5

Paciolo, Luca, 9
Peano, Guiseppe, 4
periodische Kettenbrüche, 10
Perron, Oskar, 1, 4, 6, 7, 11, 13, 14, 25, 28, 29
Polynomdivision, 17
Polynomring, 17
Pringsheim, Alfred, 4, 14
Ptolemaios, 5

Quadratische Irrationalität, 10

Rekorde bei π-Berechnungen, 6
Ribenboim, Paolo, 6
Roomen, Adriaen van, 5

Schwenter, Daniel, 4, 5
Speiser, Andreas, 20
Spezialfälle des Lambertschen Funktionskettenbruchs, 20
Steigung der Fehlergeraden, 28
Stern, Moritz Abraham, 4, 14, 16
Stieltjes, Thomas Joannes, 7
Stochastische Aussagen für banal entwickelte Kettenbrüche, 8
Stone, Edmund, 5
Storms, Jan, 5
Sundman, Karl Frithiof, 7

Tafel 1. Entwicklung eines banalen Kettenbruchs für eine Näherung von π, 6
Tafel 2. Entwicklung eines banalen Kettenbruchs für 0.414213562, 10
Tafel 3. Beispiel einer vorausschauenden teilweisen Ausschöpfung, 20
Teilnenner (Begriff), 4
Teilzähler (Begriff), 4
Theon von Smirna, 9
TsuChung-Chih, 5
Turnbull, Herbert Westren, 8

Umformungen des Lambertschen Kettenbruchs, 19

Vergleich der Näherungsbrüche der Kettenbrüche von $\sqrt{3}$ und $\sqrt{27}$, 8

Wall, S. Hubert, 21
Wallis, John, 4, 5, 16
Wallisches Produkt, 14
Wechselwegnahme, 4, 11, 17, 20, 29
Weierstraß, Karl, 14
Wynn, Peter, 22

Zimmermann, Ottomar, 5