Sitzungsberichte

der

mathematisch-physikalischen Klasse

der

K. B. Akademie der Wissenschaften

zu München

1913. Heft III
November- und Dezembersitzung

München 1913
Verlag der Königlich Bayerischen Akademie der Wissenschaften
in Kommission des G. Franz'schen Verlags (J. Roth)

Über die Hölderschen und Cesàroschen Grenzwerte.

Von **Georg Faber** in Straßburg i. E.

Vorgelegt von A. Pringsheim in der Sitzung am 8. November 1913.

Man hat sich neuerdings vielfach mit den sogenannten Hölderschen und Cesàroschen Grenzwerten beschäftigt, dieselben lassen sich bekanntlich folgendermaßen einführen: Gegeben ist die für $|x| < 1$ konvergente Potenzreihe

$$\mathfrak{P}(x) = \sum_{1}^{\infty} {}_\nu a_\nu x^\nu \tag{1}$$

(daß hier in $\mathfrak{P}(x)$ das Absolutglied a_0 fehlt, ist unwesentlich, bewirkt aber eine kleine Vereinfachung)

und es existiere der Grenzwert

$$g = \lim_{x=1} \mathfrak{P}(x), \tag{2}$$

wobei man sich x etwa reelle Werte durchlaufend denke. Die Koeffizienten der Potenzreihe für $\mathfrak{P}(x) \cdot (1-x)^{-(n+1)}$, wo n eine positive ganze Zahl ist, seien $b_\nu^{(n)}$:

$$\mathfrak{P}(x)(1-x)^{-(n+1)} = \sum_{1}^{\infty} {}_\nu b_\nu^{(n)} x^\nu \tag{3}$$

und $n!\, b_\nu^{(n)} \cdot \nu^{-n}$ werde mit $S_\nu^{(n)}$ bezeichnet[1]). Der n^{te} Cesàrosche Grenzwert $S^{(n)}$ ist dann definiert durch

$$S^{(n)} = \lim_{\nu=\infty} S_\nu^{(n)}, \tag{4}$$

falls dieser Limes existiert; es ist dann immer $S^{(n)} = g$.

Die Hölderschen Grenzwerte $s^{(n)}$ sind in rekurrenter Weise definiert durch die Gleichungen:

[1]) Diese Bezeichnung weicht von der üblichen ab; sonst wird gewöhnlich unter $S_\nu^{(n)}$ die von mir mit $b_\nu^{(n)}$ bezeichnete Größe verstanden.

$$s_\nu^{(0)} = a_1 + \cdots + a_\nu \tag{5}$$

$$s_\nu^{(n)} = \frac{s_1^{(n-1)} + \cdots + s_\nu^{(n-1)}}{\nu} \quad \text{für} \quad n = 1, 2 \ldots, \tag{6}$$

$$s^{(n)} = \lim_{\nu=\infty} s_\nu^{(n)}, \tag{7}$$

immer vorausgesetzt, daß der Limes auf der rechten Seite von (7) existiert.

Nachdem Herr Knopp[1]) gezeigt hatte, daß die Existenz des n^{ten} Hölderschen Grenzwerts stets diejenige des n^{ten} Cesàroschen nach sich zieht, gelang Herrn Schnee[2]) auch die Umkehrung dieses Satzes. Ich bewundere diesen Beweis des Herrn Schnee als eine Kraftprobe analytischen Scharfsinns, finde ihn aber gleichzeitig so verwickelt, daß es mir einfacher erschien, die Sätze der Herren Knopp und Schnee auf ganz anderem Wege neu abzuleiten, als mich vollständig in die Beweisführung des Herrn Schnee einzuarbeiten[3]). Ich bin bei dieser Gelegenheit zu einem bedeutend allgemeineren Grenzwertsatze gelangt, dessen sehr einfachen Beweis ich hier auseinandersetzen will. Bei allem Verständnis für das Streben nach Reinheit der Methode erblicke ich in der Benutzung funktionentheoretischer Hilfsmittel bei dem vorliegenden Problem keinen Schönheitsfehler, ist doch die ganze Fragestellung auf funktionentheoretischem Boden erwachsen.

Um mich später leichter ausdrücken zu können, schicke ich die Erklärung einiger Bezeichnungen, sowie ein paar Hilfssätze voraus:

---

[1]) Grenzwerte von Reihen bei der Annäherung an die Konvergenzgrenze. Inauguraldissertation. Berlin 1907.

[2]) Math. Ann. 67 (1909), S. 110—125; daselbst auch weitere Literaturangaben.

[3]) Ein mir erst nachträglich bekannt gewordener Beweis von Ford (Am. Journ. of Math., Bd. 32 (1910), S. 315—326) ist ebenso kompliziert oder noch komplizierter. — Während der Drucklegung meines hier vorliegenden Beweises erschien ein anderer von I. Schur (Math. Ann., Bd. 74, S. 447); ebenfalls sehr einfach, jedoch ganz anders angelegt und ohne die von mir angegebene weitreichende Verallgemeinerung.

Ich sage, die Koeffizienten a_ν der Potenzreihe $\sum_0^\infty{}^\nu a_\nu x^\nu$ sind von geringerer Größenordnung als ν^k, in Zeichen $a_\nu \prec \nu^k$, wo k jede reelle Zahl sein kann, wenn $\lim\limits_{\nu=\infty} a_\nu \nu^{-k} = 0$ ist; dagegen heißen die a_ν von der Größenordnung $\gamma\nu^k$ in Zeichen $a_\nu \sim \gamma\nu^k$ wenn $\lim\limits_{\nu=\infty} a_\nu \nu^{-k}$ existiert und gleich der von Null verschiedenen Zahl γ ist.

I. Hilfssatz: Die Koeffizienten $(-1)^\nu \binom{-k}{\nu}$ der Potenzreihe für $(1-x)^{-k}$ sind, falls k weder eine negative ganze Zahl noch Null ist, von der Größenordnung $\dfrac{\nu^{k-1}}{\Gamma(k)}$. Dieser Satz bedarf keines Beweises; er ist nichts anderes als die Definition der Γ-Funktion.

Ich definiere ferner zwei auf Potenzreihen $\mathfrak{P}(x) = \sum_1^\infty{}^\nu a_\nu x^\nu$ anzuwendende Operationen: $\mathrm{Div}^a \mathfrak{P}(x)$ und $\mathrm{Int}^a \mathfrak{P}(x)$, wo der Index a jede reelle Zahl sein kann:

(8) $\mathrm{Div}^a \mathfrak{P}(x)$ ist die Potenzreihe $\sum_1^\infty{}^\nu b_\nu^{(a)} x^\nu$ für $\mathfrak{P}(x)\cdot(1-x)^{-a}$, so daß also

$$b_\nu^{(a)} = \sum_1^\nu{}^\mu a_\mu \cdot \binom{-a}{\nu-\mu} \cdot (-1)^{\nu-\mu} \text{ ist.} \tag{9}$$

$$\mathrm{Int}^a \mathfrak{P}(x) = \sum_1^\infty{}^\nu a_\nu \nu^{-a} x^\nu; \tag{10}$$

für $a = 1$ ist also

$$\mathrm{Int}^1 \mathfrak{P}(x) \text{ soviel wie } \int_0^x \frac{\mathfrak{P}(x)}{x}\,dx. \tag{10'}$$

Für positive a gilt noch die später zu benutzende Darstellung

$$\mathrm{Int}^a \mathfrak{P}(x) = \frac{1}{\Gamma(a)} \int_0^1 \left(\lg\frac{1}{t}\right)^{a-1} \mathfrak{P}(tx)\,\frac{dt}{t}. \tag{10''}$$

Die folgenden, ohne weiteres einleuchtenden Formeln bezeichne ich als den

II. Hilfssatz:

$$\mathrm{Div}^{\alpha+\beta}\mathfrak{P}(x) = \mathrm{Div}^{\beta}(\mathrm{Div}^{\alpha}\mathfrak{P}(x)) \tag{11}$$

$$\mathrm{Int}^{\alpha+\beta}\mathfrak{P}(x) = \mathrm{Int}^{\beta}(\mathrm{Int}^{\alpha}\mathfrak{P}(x)). \tag{12}$$

Weiter gilt der

III. Hilfssatz: Sind die Koeffizienten a_ν in $\mathfrak{P}(x) = \sum_1^\infty{}^\nu a_\nu x^\nu$ von geringerer Größenordnung als ν^k, so sind die Koeffizienten b_ν^α (9) der Potenzreihe $\mathrm{Div}^\alpha\mathfrak{P}(x)$ von geringerer Größenordnung als $\nu^{k+\alpha}$, vorausgesetzt, daß k und α beide >0 sind.

Nach Voraussetzung existiert zu jedem $\varepsilon>0$ eine ganze Zahl μ_ε der Art, daß für $\mu>\mu_\varepsilon$: $\frac{|a_\mu|}{\mu^k}<\varepsilon$ und erst recht

$$|a_\mu| < \varepsilon\cdot\nu^k \text{ wird, wenn } \nu>\mu>\mu_\varepsilon \text{ ist.} \tag{13}$$

Für alle μ dagegen gilt

$$|a_\mu| < G\,\mu^k, \tag{14}$$

wo die obere Schranke G von μ unabhängig ist.

Andererseits ist nach dem I. Hifssatze

$$\left|\binom{-\alpha}{\mu}\right| < g\,\mu^{\alpha-1} \tag{15}$$

für alle positiven Zahlen μ; g hängt nur von α ab. Durch Einsetzen von (13), (14), (15) in (9) ergibt sich

$$\begin{aligned}
|b_\nu^\alpha| &< \varepsilon\,\nu^k \sum_0^{\nu-\mu_\varepsilon}{}^\mu g\cdot\mu^{\alpha-1} + G\,\nu^k\sum_{\nu-\mu_\varepsilon+1}^{\nu}{}^\mu g\,\mu^{\alpha-1}\\
&< \varepsilon\,\nu^k g\int_0^{\nu+1}\mu^{\alpha-1}\,d\mu + G\,\nu^k g\int_{\nu-\mu_\varepsilon}^{\nu+1}\mu^{\alpha-1}\,d\mu\\
&< \frac{\varepsilon\cdot g}{\alpha}(\nu+1)^{k+\alpha} + \frac{G\cdot g\left[1-\left(1-\frac{\mu_\varepsilon-1}{\nu+1}\right)^\alpha\right]}{\alpha}(\nu+1)^{k+\alpha}\\
&< \frac{2\,\varepsilon\,g}{\alpha}(\nu+1)^{k+\alpha} \text{ bei hinreichend großem } \nu;
\end{aligned} \tag{16}$$

dies heißt aber: $b_\nu^\alpha \prec \nu^{k+\alpha}$, w. z. b. w.

IV. **Hilfssatz**: Haben die Potenzreihen $\sum_0^\infty{}^\nu a_\nu x^\nu$ und $\sum_0^\infty{}^\nu b_\nu x^\nu$ Koeffizienten von den Größenordnungen $a \cdot \nu^\alpha$ und $b \cdot \nu^\beta$:

$$(17) \qquad a_\nu \sim a \cdot \nu^\alpha, \qquad b_\nu \sim b\,\nu^\beta,$$

und ist sowohl α als $\beta > 0$, so sind die Koeffizienten c_ν der Potenzreihe für

$$\sum_0^\infty{}^\nu a_\nu x^\nu \cdot \sum_0^\infty{}^\nu b_\nu x^\nu$$

von der Größenordnung $\dfrac{a\,b\,\Gamma(\alpha+1)\,\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\alpha+\beta+2)}\,\nu^{\alpha+\beta+1}$

$$(18) \quad c_\nu = a_0 b_\nu + a_1 b_{\nu-1} + \cdots + a_\nu b_0 \sim \frac{a\,b\,\Gamma(\alpha+1)\,\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\alpha+\beta+2}\,\nu^{\alpha+\beta+1}.$$

Nach dem ersten Hilfssatze kann man nämlich schreiben

$$(19) \quad \begin{aligned} a_\nu &= a \cdot \Gamma(\alpha+1)(-1)^\nu \binom{-\alpha-1}{\nu}(1+\varepsilon_\nu); \\ b_\nu &= b\,\Gamma(\beta+1)(-1)^\nu \binom{-\beta-1}{\nu}(1+\varepsilon_\nu') \end{aligned}$$

mit

$$(20) \qquad \lim_{\nu=\infty} \varepsilon_\nu = \lim_{\nu=\infty} \varepsilon_\nu' = 0.$$

Setzt man die Ausdrücke (19) in die rechte Seite von (21) ein, so folgt

$$(21) \quad \begin{aligned} &[a\,b\,\Gamma(\alpha+1)\,\Gamma(\beta+1)(-1)^\nu]^{-1}\,c_\nu \\ &= \sum_0^\nu{}^\mu \binom{-\alpha-1}{\mu}\binom{-\beta-1}{\nu-\mu} \\ &+ \sum_0^\nu{}^\mu \binom{-\alpha-1}{\mu}\left[\varepsilon_{\nu-\mu}'\binom{-\beta-1}{\nu-\mu}\right] \\ &+ \sum_0^\nu{}^\mu \binom{-\beta-1}{\mu}\left[\varepsilon_{\nu-\mu}\binom{-\alpha-1}{\nu-\mu}\right] \\ &+ \sum_0^\nu{}^\mu \varepsilon_\mu\,\varepsilon_{\nu-\mu}'\binom{-\alpha-1}{\mu}\binom{-\beta-1}{\nu-\mu}. \end{aligned}$$

Die erste Summe auf der rechten Seite ist gleich

$$\binom{-\alpha-\beta-2}{\nu},$$

also nach dem ersten Hilfssatze

$$\sim \frac{\nu^{\alpha+\beta+1}}{\Gamma(\alpha+\beta+2)},$$

die letzte Summe ist dem absoluten Betrage nach offenbar kleiner als die erste mal η_ν, wenn η_ν das größte der $\nu+1$ Produkte

$$|\varepsilon_\mu \, \varepsilon'_{\nu-\mu}| \; (\mu = 0, 1 \ldots \nu)$$

bedeutet; wegen (20) ist $\lim\limits_{\nu-\infty} \eta_\nu = 0$, die letzte Summe ist also von geringerer Größenordnung als die erste; die zweite Summe stellt den Koeffizienten von x^ν in der Potenzreihe für

$$(1-x)^{-\alpha-1} \cdot \sum_0^\infty{}_\nu \, \varepsilon'_\nu \binom{-\beta-1}{\nu} (-1)^\nu x^\nu$$

dar; er ist nach dem dritten Hilfssatze (für unendlich wachsendes ν) von geringerer Größenordnung als $\nu^{\alpha+\beta+1}$, da die mit $(1-x)^{-\alpha-1}$ multiplizierte Potenzreihe Koeffizienten $\prec \nu^\beta$ hat (wegen des ersten Hilfssatzes und wegen (20)); genau so ergibt sich, daß auch die dritte Summe auf der rechten Seite von (21) von geringerer Größenordnung als die erste ist; diese gibt daher den Ausschlag und es ergibt sich, wie behauptet,

$$c_\nu \sim \frac{a\, b\, \Gamma(\alpha+1)\, \Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\alpha+\beta+2)} \nu^{\alpha+\beta+1}.$$

Endlich beweise ich den folgenden

V. Hilfssatz: Hat $\Phi(x)$ die Form

$$(1-x)^l \sum_1^\infty{}_\nu \, a_\nu \, x^\nu,$$

wo $l > 0$, $a_\nu \prec \nu^k$ und $k \geqq l$ ist, so kann man $\operatorname{Int}^\alpha \Phi(x)$ auf die Form $(1-x)^l \, \mathfrak{P}_1(x)$ bringen, wo die Koeffizienten von $\mathfrak{P}_1(x) \prec \nu^{k-\alpha}$ sind; α darf jede reelle Zahl $\leqq k-l$ sein.

Es sei zunächst $\alpha = -1$; die Operation Int^{-1} besteht in Differentiation und nachträglicher Multiplikation mit x; es ist also

$$\begin{aligned}(22)\qquad &\mathrm{Int}^{-1}(1-x)^l \sum_1^\infty {}_\nu\, a_\nu x^\nu \\ &= -l\,x(1-x)^{l-1}\sum_1^\infty {}_\nu\, a_\nu x^\nu + (1-x)^l \sum_1^\infty {}_\nu\, \nu\, a_\nu x^\nu;\end{aligned}$$

der zweite Summand auf der rechten Seite von (22) hat die gewünschte Form, der erste aber läßt sich so schreiben:

$$(1-x)^l \frac{-l\,x\sum_1^\infty {}_\nu\, a_\nu x^\nu}{1-x};$$

entwickelt man aber

$$\frac{-l\,x\sum_1^\infty {}_\nu\, a_\nu x^\nu}{1-x}$$

nach Potenzen von x und wendet man auf die so erhaltene Reihe den dritten Hilfssatz an, so sieht man, daß auch der erste Summand und mithin die ganze rechte Seite von (22) Koeffizienten $\prec \nu^{k+1}$ besitzt.

Damit ist wegen der Funktionalgleichung (12) zugleich der Fall erledigt, daß α irgend eine negative ganze Zahl ist; es genügt noch der Fall $0 < \alpha \leqq 1$ zu beweisen, da dann wieder die Funktionalgleichung (12) den Beweis auf alle möglichen α erstreckt.

Es sei also z w e i t e n s $0 < \alpha \leqq 1$[1]); dann folgt aus (10''):

$$(23)\qquad \Gamma(\alpha)\,\mathrm{Int}^\alpha((1-x)^l\,\mathfrak{P}(x)) = \int_0^1 \left(\lg\frac{1}{t}\right)^{\alpha-1}(1-t\,x)^l\,\mathfrak{P}(t\,x)\,\frac{dt}{t}$$

und durch partielle Integration

---

[1]) Will man nur die Identität der Hölderschen und Cesàroschen Grenzwerte nachweisen, so genügt es hier $\alpha = 1$ anzunehmen; dann vereinfachen sich die folgenden Ausführungen ein wenig, da man statt Formel (10') die einfachere (10'') benutzen kann.

$$= (1-x)^l \int_0^1 \left(\lg\frac{1}{t}\right)^{\alpha-1} \mathfrak{P}(tx)\frac{dt}{t}$$

$$+ xl\int_0^1 (1-tx)^{l-1}\int_0^t \left(\lg\frac{1}{\tau}\right)^{\alpha-1} \mathfrak{P}(\tau x)\frac{d\tau}{\tau}\frac{dt}{t}.$$

Hier hat der erste Summand der rechten Seite, der ja $= (1-x)^l \Gamma(\alpha) \operatorname{Int}^\alpha \mathfrak{P}(x)$ ist, die gewünschte Form; im zweiten Summanden liefert die innere Integration nach τ eine Potenzreihe, die ich so schreibe:

$$\sum_1^\infty{}^\nu b_\nu \left(\lg\frac{1}{t}\right)^{\alpha-1}\frac{t^\nu}{\nu}x^\nu = \mathfrak{P}_t(x);$$

die Koeffizienten b_ν hängen zwar noch von t ab, doch ist unabhängig von t: $|b_\nu| < |a_\nu|$; denn

$$\int_0^t \left(\lg\frac{1}{\tau}\right)^{\alpha-1}\tau^\nu\frac{d\tau}{\tau} \leqq \left(\lg\frac{1}{t}\right)^{\alpha-1}\int_0^t \tau^{\nu-1}\,d\tau = \left(\lg\frac{1}{t}\right)^{\alpha-1}\frac{t^\nu}{\nu};$$

ist nun $l-1 \leqq 0$, so sind (die noch von t abhängenden Koeffizienten) c_ν in der Potenzreihe

$$\sum c_\nu \cdot \left(\lg\left(\frac{1}{t}\right)\right)^{\alpha-1} t^{\nu-1}x^\nu \qquad \text{für} \qquad \frac{1}{t}(1-tx)^{l-1}\cdot\mathfrak{P}_t(x)$$

offenbar $\prec \nu^{k-1+1-l}$ gleichmäßig für alle t zwischen Null und 1; integriert man nach t zwischen Null und 1, so hat die resultierende Potenzreihe Koeffizienten $\prec \nu^{k-l-\alpha}$ und wenn man mit $\frac{xl}{(1-x)^l}$ multipliziert, ergeben sich nach dem dritten Hilfssatze Koeffizienten $\prec \nu^{k-\alpha}$; also läßt sich auch der zweite Summand in der Form $(1-x)^l\mathfrak{Q}(x)$ darstellen, wo $\mathfrak{Q}(x)$ Koeffizienten $\prec \nu^{k-\alpha}$ hat.

Ist $l-1>0$, dagegen $l-2\leqq 0$, so wird der zweite Summand nochmals partieller Integration unterworfen, wodurch er sich folgendermaßen umformt:

$$\int_0^1 (1-tx)^{l-1} \int_0^t \left(\lg \frac{1}{\tau}\right)^{\alpha-1} \mathfrak{P}(\tau x) \frac{d\tau}{\tau} \frac{dt}{t}$$

$$(24) \qquad = (1-x)^{l-1} \int_0^1 \int_0^t \left(\lg\left(\frac{1}{\tau}\right)\right)^{\alpha-1} \mathfrak{P}(\tau x) \frac{d\tau}{\tau} \frac{dt}{t}$$

$$+ (l-1)x \int_0^1 (1-tx)^{l-2} \int_0^t \int_0^\tau \left(\lg \frac{1}{\sigma}\right)^{\alpha-1} \mathfrak{P}(\sigma x) \frac{d\sigma}{\sigma} \frac{d\tau}{\tau} \frac{dt}{t}$$

und man sieht genau, wie soeben geschehen, daß die beiden Summanden die gewünschte Form haben und zugleich auch, daß man durch fortgesetzte partielle Integration ganz allgemein zum Ziele kommt.

Nach diesen Vorbereitungen denke man sich wieder die Potenzreihe

$$(1) \qquad \mathfrak{P}(x) = a_1 x + a_2 x^2 + \cdots$$

gegeben und unterwerfe sie der Operation:

$$\mathrm{Div}^{1+\alpha_1} \mathrm{Int}^{\beta_1} \mathrm{Div}^{\alpha_2} \mathrm{Int}^{\beta_2} \ldots \mathrm{Div}^{\alpha_n} \mathrm{Int}^{\beta_n},$$ [1])

die ich kurz Op_1 nennen will:

$$(25) \qquad \begin{aligned} Op_1 \mathfrak{P}(x) &= \mathrm{Div}^{1+\alpha_1} \mathrm{Int}^{\beta_1} \ldots \mathrm{Div}^{\alpha_n} \mathrm{Int}^{\beta_n} \mathfrak{P}(x) \\ &= \sum_1^\infty {}_\nu \, b_\nu^{(1)} x^\nu; \end{aligned}$$

ebenso unterwerfe man $\mathfrak{P}(x)$ der Operation Op_2, die soviel als

$$\mathrm{Div}^{1+\alpha_1'} \mathrm{Int}^{\beta_1'} \mathrm{Div}^{\alpha_2'} \mathrm{Int}^{\beta_2'} \ldots \mathrm{Div}^{\alpha_m'} \mathrm{Int}^{\beta_m'}$$

sei:

$$(26) \qquad \begin{aligned} Op_2 \mathfrak{P}(x) &= \mathrm{Div}^{1+\alpha_1'} \mathrm{Int}^{\beta_1'} \ldots \mathrm{Div}^{\alpha_m'} \mathrm{Int}^{\beta_m'} \mathfrak{P}(x) \\ &= \sum_1^\infty {}_\nu \, b_\nu^{(2)} x^\nu. \end{aligned}$$

[1]) Es soll zuerst $\mathrm{Div}^{1+\alpha_1}$, dann Int^{β_1} usw. ausgeführt werden.

α_ν, β_ν, α'_μ, β'_μ seien lauter positive Zahlen, die folgende Relationen befriedigen:

$$\begin{aligned}(27)\qquad &\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_n=\beta_1+\cdots+\beta_n\\ &=\alpha'_1+\cdots+\alpha'_m=\beta'_1+\cdots+\beta'_m=\sigma\end{aligned}$$

$$(28)\qquad \alpha_1+\alpha_2\cdots+\alpha_\nu>\beta_1+\beta_2+\cdots+\beta_\nu \quad \text{für} \quad \nu<n$$

$$(29)\qquad \alpha'_1+\alpha'_2\cdots+\alpha'_\mu\geqq\beta'_1+\beta'_2+\cdots+\beta'_\mu \quad \text{für} \quad \mu<m.$$

Dann besteht der folgende Satz, dessen Ableitung das Ziel der vorliegenden Note ist:

Existiert der Grenzwert

$$\begin{aligned}(30)\qquad S=&\frac{\Gamma(\alpha_1+1)}{\Gamma(\alpha_1-\beta_1+1)}\cdot\frac{\Gamma(\alpha_1-\beta_1+\alpha_2+1)}{\Gamma(\alpha_1-\beta_1+\alpha_2-\beta_2+1)}\cdots\\ &\frac{\Gamma(\alpha_1-\beta_1+\alpha_2-\beta_2\ldots-\beta_{n-1}+\alpha_n+1)}{\Gamma(\alpha_1-\beta_1+\alpha_2-\beta_2\cdots+\alpha_{n-1}-\beta_{n-1}+1)}\lim_{\nu=\infty}b_\nu^{(1)},\end{aligned}$$

so existiert auch der Grenzwert

$$\begin{aligned}(31)\qquad S'=&\frac{\Gamma(\alpha'_1+1)}{\Gamma(\alpha'_1-\beta'_1+1)}\cdot\frac{\Gamma(\alpha'_1-\beta'_1+\alpha'_2+1)}{\Gamma(\alpha'_1-\beta'_1+\alpha'_2-\beta'_2+1)}\cdots\\ &\frac{\Gamma(\alpha'_1-\beta'_1+\alpha'_2-\beta'_2\ldots-\beta'_{m-1}+\alpha'_m+1)}{\Gamma(\alpha'_1-\beta'_1+\alpha'_2-\beta'_2\cdots+\alpha'_{m-1}-\beta'_{m-1}+1)}\lim_{\nu=\infty}b_\nu^{(2)}\end{aligned}$$

und umgekehrt; und es ist stets

$$(31')\qquad S=S'.$$

Ein ganz spezieller Fall dieses Satzes liegt vor, wenn

$$32)\qquad \alpha_1=\alpha_2=\ldots=\alpha_n=\beta_1=\beta_2=\ldots\beta_n=1,\ \alpha'_1=\beta'_1=n$$

ist. Dann besagt der Satz offenbar nichts anderes als die Identität des Cesàroschen und des Hölderschen Grenzwerts n^{ter} Ordnung.

Zunächst bemerke man, daß der Satz richtig ist, wenn die Potenzreihe $\mathfrak{P}(x)$ sich auf ein Glied $a_1 x$ reduziert, und daß dann $S=S'=a_1$ ist. Es ist nämlich

$$(33)\begin{cases} \qquad \mathrm{Div}^{1+\alpha_1}\,\mathrm{Int}^{\beta_1}(a_1 x) \\ \text{eine Potenzreihe mit Koeffizienten} \\ \qquad \sim a_1 \cdot \nu^{\alpha_1-\beta_1} \cdot \dfrac{1}{\Gamma(\alpha_1+1)} \text{ (I. Hilfssatz),} \\ \qquad \mathrm{Div}^{1+\alpha_1}\,\mathrm{Int}^{\beta_1}\,\mathrm{Div}^{\alpha_2}\,\mathrm{Int}^{\beta_2}(a_1 x) \\ \text{eine Potenzreihe mit Koeffizienten} \\ \sim a_1\,\nu^{\alpha_1-\beta_1+\alpha_2-\beta_2} \dfrac{\Gamma(\alpha_1-\beta_1+1)}{\Gamma(\alpha_1+1)(\Gamma\alpha_1+\beta_1+\alpha_2+1)} \text{ (I. u. IV. Hilfssatz),} \\ \text{usw.; schließlich} \\ \qquad Op_1\, a_1 x \\ \text{eine Potenzreihe mit Koeffizienten} \\ \sim a_1 \nu^0 \dfrac{\Gamma(\alpha_1-\beta_1+1)\ldots\Gamma(\alpha_1-\beta_1\cdots+\alpha_{n-1}-\beta_{n-1}+1)}{\Gamma(\alpha_1+1)\cdot\Gamma(\alpha_1-\beta_1+\alpha_2+1)\ldots\Gamma(\alpha_1-\beta_1\ldots-\beta_{n-1}+\alpha_n+1)}. \end{cases}$$

Auf Grund dieser Bemerkung genügt es, den obigen Satz in folgender, viel speziellerer Fassung zu beweisen:

Exisiert der Grenzwert S und ist er gleich Null, so existiert auch S' und ist ebenfalls gleich Null.

Wenn nämlich S existiert, aber von Null verschieden ist, so wird durch bloße Abänderung des Koeffizienten a_1 erreicht, daß der neue Grenzwert $\bar{S}$ zu Null wird; m. a. W.

$$Op_1(-S\cdot x + \mathfrak{P}(x)) = Op_1(-Sx) + Op_1\,\mathfrak{P}(x)$$

liefert einen Grenzwert $\bar{S} = 0$; ist aber bewiesen, daß dann auch der aus $Op_2(-Sx+\mathfrak{P}(x))$ resultierende Grenzwert $\bar{S}=0$ ist, so folgt aus dem distributiven Charakter der Funktionen Op_1 und Op_2, daß $Op_1(\mathfrak{P}(x))$ und $Op_2(\mathfrak{P}(x))$ den gleichen Grenzwert liefern müssen, wie $Op_1(Sx)$ und $Op_2(Sx)$, nämlich S.

Die spezielle Fassung unseres Satzes für $S = 0$, die einzig noch zu beweisen bleibt, ist eine unmittelbare Folge des folgenden Satzes:

Die Koeffizienten von x^ν in der Potenzreihe für

$$\mathrm{Div}^{1+\alpha_1}\,\mathrm{Int}^{\beta_1}\,\mathrm{Div}^{\alpha_2}\,\mathrm{Int}^{\beta_2}\ldots\mathrm{Div}^{\alpha_n}\,\mathrm{Int}^{\beta_n}\,\mathfrak{P}(x),$$

wo wieder

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_n = \beta_1 + \beta_2 + \cdots + \beta_n = \sigma$$

ist und (28) befriedigt ist, konvergieren dann und nur dann mit wachsendem ν gegen Null, wenn die Koeffizienten der Potenzreihe

$$\mathfrak{P}_1(x) = (1-x)^{-1-\sigma}\,\mathfrak{P}(x) \tag{34}$$

$\prec \nu^\sigma$ ausfallen.

Da nämlich in dieser Bedingung nur die Summe der α und β vorkommt, gilt sie gleichzeitig für Op_1 und Op_2.

Die Bedingung (34) ist erstens hinreichend. Denn wenn $\mathfrak{P}(x)$ die verlangte Form

$$\mathfrak{P}(x) = (1-x)^{\sigma+1}\,\mathfrak{P}_1(x) \tag{34'}$$

hat, so findet man unter steter Benutzung des fünften Hilfssatzes;

$$(35)\left\{\begin{array}{l} \mathrm{Div}^{1+\alpha_1}\mathrm{Int}^{\beta_1}\,\mathfrak{P}(x) = (1-x)^{\sigma-\alpha_1}\,\mathfrak{P}_2(x), \\ \text{wo die Koeffizienten von } \mathfrak{P}_2(x) \prec \nu^{\sigma-\beta_1} \text{ sind;} \\ \mathrm{Div}^{1+\alpha_1}\,\mathrm{Int}^{\beta_1}\,\mathrm{Div}^{\alpha_2}\,\mathrm{Int}^{\beta_2}\,\mathfrak{P}(x) = (1-x)^{\sigma-\alpha_1-\alpha_2}\,\mathfrak{P}_3(x), \\ \text{wo die Koeffizienten von } \mathfrak{P}_3(x) \prec \nu^{\sigma-\beta_1-\beta_2} \text{ sind;} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \mathrm{Div}^{1+\alpha_1}\,\mathrm{Int}^{\beta_1}\,\mathrm{Div}^{\alpha_2}\,\mathrm{Int}^{\beta_2}\ldots\mathrm{Div}^{\alpha_n}\,\mathrm{Int}^{\beta_n}\,\mathfrak{P}(x) = \mathfrak{P}_{n+1}(x), \\ \text{wo die Koeffizienten von } \mathfrak{P}_{n+1}(x) \prec \nu^0 \text{ sind, w. z. b. w.} \end{array}\right.$$

Die Bedingung (34) ist zweitens notwendig. Geht man nämlich von irgend einer gegebenen Potenzreihe $\mathfrak{Q}_{n+1}(x)$ mit Koeffizienten $\prec \nu^0$ aus, so erhält man wieder auf Grund des fünften Hilfssatzes:

$$\mathrm{Int}^{-\beta_n}\,\mathrm{Div}^{-\alpha_n}\,\mathfrak{Q}_{n+1}(x) = (1-x)^{\alpha_n}\,\mathfrak{Q}_n(x),$$

wo die Koeffizienten von $\mathfrak{Q}_n(x) \prec \nu^{\beta_n}$ sind;

$$\mathrm{Int}^{-\beta_n}\,\mathrm{Div}^{-\alpha_n}\,\mathrm{Int}^{-\beta_{n-1}}\,\mathrm{Div}^{-\alpha_{n-1}}\,\mathfrak{Q}_{n+1}(x) = (1-x)^{\alpha_n+\alpha_{n-1}}\,\mathfrak{Q}_{n-1}(x),$$

wo die Koeffizienten von $\mathfrak{Q}_{n-1}(x) \prec \nu^{\beta_n+\beta_{n-1}}$ sind;

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\mathrm{Int}^{-\beta_n}\,\mathrm{Div}^{-\alpha_n}\ldots\mathrm{Int}^{-\beta_1}\,\mathrm{Div}^{-\alpha_1-1}\,\mathfrak{Q}_{n+1}(x) = (1-x)^{\sigma+1}\,\mathfrak{Q}_1(x),$$

wo die Koeffizienten von $\mathfrak{Q}_1(x) < \nu^\sigma$ sind.

Umgekehrt ist

$$Op_1\,(1-x)^{1+\sigma}\,\mathfrak{Q}_1(x) = \mathfrak{Q}_{n+1}(x);$$

jede Funktion, aus der durch die Operation Op_1 eine Potenzreihe mit Koeffizienten $\prec \nu^0$ wird, muß daher die Form

$$(1-x)^{1+\sigma}\,\mathfrak{Q}_1(x),$$

d. h. die durch (34) verlangte haben.

Ich wollte die vorstehenden Entwickelungen lieber möglichst einfach als möglichst allgemein gestalten; sonst hätte ich neben den Operationen Div und Int noch andere, z. B.

$$\mathrm{div}^\alpha\,\mathfrak{P}(x) = \mathfrak{P}(x)\,(\lg(1-x))^\alpha, \qquad \mathrm{int}^\alpha\,\mathfrak{P}(x) = \sum_1^\infty{}_\nu \frac{a_\nu}{(\lg\nu+1)^\alpha}\,x^\nu$$

sowie weitere mit iterierten Logarithmen einführen und damit viel allgemeinere Grenzwertsätze ableiten können.