BAYERISCHE AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN
MATHEMATISCH-NATURWISSENSCHAFTLICHE KLASSE

SITZUNGSBERICHTE

JAHRGANG
1977

MÜNCHEN 1978

VERLAG DER BAYERISCHEN AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN
In Kommission bei der C. H. Beck'schen Verlagsbuchhandlung München

Funktionenkegel und Integralungleichungen

Von Heinz Bauer in Erlangen

Herrn Otto Haupt zum 90. Geburtstag gewidmet

1. Einleitung

In dieser Note soll ein neuer Zugang zu dem folgenden Resultat von Choquet-Deny [4] mitgeteilt werden: Für einen Hausdorff-Raum X bezeichne $C(X)$ den Vektorraum aller stetigen reellen Funktionen auf X; er sei versehen mit der Topologie der gleichmäßigen Konvergenz auf kompakten Teilmengen. Man betrachte zwei (eventuell leere) Familien $\mathfrak{F}_1 = ((\sigma_i, x_i))_{i \in I}$ und $\mathfrak{F}_2 = (\tau_j)_{j \in J}$, wobei x_i Punkte aus X und σ_i, τ_j positive Radon-Maße auf X sind, welche sämtlich von kompakten Teilmengen von X getragen werden, und wobei ferner σ_i den Punkt x_i nicht mit Masse belegt, also

$$(1) \qquad \sigma_i(\{x_i\}) = 0 \qquad (i \in I)$$

gilt. Dann ist – selbst bei Aufgabe der Bedingung (1) – die Menge $K(\mathfrak{F}_1, \mathfrak{F}_2)$ aller den Ungleichungen

$$(2) \qquad \int u \, d\sigma_i \leq u(x_i) \qquad (i \in I)$$

und

$$(3) \qquad \int u \, d\tau_j \leq 0 \qquad (j \in J)$$

genügenden Funktionen $u \in C(X)$ ein abgeschlossener, inf-stabiler, konvexer Kegel in $C(X)$. Dabei wird $K \subset C(X)$ wie üblich ein Kegel in $C(X)$ genannt, wenn $\lambda K \subset K$ für alle reellen Zahlen $\lambda \geq 0$ gilt; K heißt inf-stabil, wenn mit je zwei Funktionen $u, v \in K$ stets auch deren untere Einhüllende $\inf(u, v)$, also die Funktion $x \mapsto \min((u(x), v(x))$ in K liegt. Man nennt $K(\mathfrak{F}_1, \mathfrak{F}_2)$ den Familien $\mathfrak{F}_1$, $\mathfrak{F}_2$ assoziiert.

Das erwähnte Resultat von Choquet-Deny besagt nun, daß auch die folgende Umkehrung gilt: *Jeder abgeschlossene, inf-stabile, konvexe Kegel $K \subset C(X)$ ist zwei Familien $\mathfrak{F}_1$ und $\mathfrak{F}_2$ mit den eben genannten Eigenschaften assoziiert.*

Beim Beweis dieses Satzes kann man sich sofort auf den Fall eines kompakten Raumes X zurückziehen. Der Satz besagt dann, daß es zu jeder Funktion $f \in C(X) \setminus K$ einen Punkt $x \in X$ und ein positives Radon-Maß σ auf X mit $\sigma(\{x\}) = 0$ und

$$(\mathrm{U}_1) \qquad \begin{aligned} &\int f\,d\sigma > f(x), \\ &\int u\,d\sigma \leq u(x) \qquad \text{für alle } u \in K \end{aligned}$$

oder aber ein positives Radon-Maß τ auf X mit

$$(\mathrm{U}_2) \qquad \begin{aligned} &\int f\,d\tau > 0, \\ &\int u\,d\tau \leq 0 \qquad \text{für alle } u \in K \end{aligned}$$

gibt. Für welche Funktionen $f \in C(X) \setminus K$ der Fall (U_1) bzw. (U_2) eintritt, bleibt durch den in [4] gegebenen Beweis offen.

Der im folgenden dargestellte Beweis verläuft dagegen von vornherein so, daß – wiederum für kompaktes X – zu K ein abgeschlossener, inf-stabiler, konvexer Kegel K^* mit $K \subset K^* \subset C(X)$ angegeben wird, der folgende Fallunterscheidung für Funktionen $f \in C(X) \setminus K$ gestattet:

Fall 1. f liegt in $K^* \setminus K$. Dann gibt es ein positives Radon-Maß σ auf X und einen Punkt $x \in X$, welcher durch σ nicht mit Masse belegt wird, so daß (U_1) erfüllt ist.

Fall 2. f liegt in $C(X) \setminus K^*$. Dann gibt es ein positives Radon-Maß τ auf X, so daß (U_2) erfüllt ist.

Auf diese Fallunterscheidung wies ich bereits früher in einem Vortrag im Séminaire Brelot-Choquet-Deny [2] hin. Allerdings stand dabei die spezielle Situation, in welcher K^* mit $C(X)$ zusammenfällt, im Vordergrund. Dieser Spezialfall liegt bei vielen Kegeln der Analysis vor, z. B. beim Kegel der stetigen, reellen, superharmonischen Funktionen, welche auf einem Gebiet im $\boldsymbol{R}^n$ definiert sind.

2. Der Kegel K^*

Sei also nunmehr X ein kompakter Raum und K ein abgeschlossener, inf-stabiler, konvexer Kegel in $C(X)$. Dabei trägt $C(X)$ die Topologie der gleichmäßigen Konvergenz. Wir bezeichnen mit K^m die Menge der *K-majorisierbaren* Funktionen aus $C(X)$, also die Menge aller $f \in C(X)$ mit

(4) $\qquad f \leq u$

für ein geeignetes $u \in K$. Dagegen bezeichne K^* die Menge der *fast K-majorisierbaren* Funktionen, d. h. aller $f \in C(X)$ mit

(5) $\qquad f - \varepsilon \in K^m$

für alle reellen Zahlen $\varepsilon > 0$. Offenbar gilt $K^m \subset K^*$.

Lemma 1. *K^m und K^* sind linksseitig erbliche*), konvexe Kegel in $C(X)$. K^* ist der Abschluß von K^m in $C(X)$.*

Beweis. Definitionsgemäß ist $K^m = K + C_-$, wenn hierbei C_- den konvexen Kegel aller $f \in C(X)$ mit $f \leq 0$ bezeichnet. Als Summe zweier konvexer Kegel ist daher auch K^m ein konvexer Kegel; wegen (4) ist K^m linksseitig erblich. Der Abschluß $\overline{K^m}$ von K^m in $C(X)$ ist in K^* enthalten, denn zu $f \in \overline{K^m}$ und $\varepsilon > 0$ existiert ein $g \in K^m$ mit $|f - g| \leq \varepsilon$, also mit $f - \varepsilon \leq g$. Hieraus folgt $f - \varepsilon \in K^m$, da K^m linksseitig erblich ist. Also liegt f in K^*. Ist umgekehrt $f \in K^*$, so liegt die Funktion $g := f - \varepsilon$ in K^m; wegen $|f - g| = \varepsilon$ folgt hieraus $f \in \overline{K^m}$. Damit ist $K^* = \overline{K^m}$ gezeigt. Als Abschluß eines konvexen Kegels ist aber auch K^* ein solcher Kegel. Die linksseitige Erblichkeit von K^* folgt aus der von K^m.

Ähnlich wie in der Theorie der Integraldarstellungen auf konvexen kompakten Mengen (vgl. [5]) ordnen wir jeder fast K-majorisierbaren Funktion f eine Funktion $\hat{f}$ auf X mit Werten in $]-\infty, +\infty]$ wie folgt zu:

(6) $$\hat{f} := \sup_{\varepsilon > 0} \Big(\inf_{\substack{f - \varepsilon \leq u \\ u \in K}} u \Big).$$

Es gilt offenbar

(7) $$f \leq \hat{f} \qquad (f \in K^*).$$

Lemma 2. *Eine Funktion $f \in K^*$ liegt genau dann in K, wenn $f = \hat{f}$ gilt.*

Beweis. Für $f \in K$ ist

$$\inf \{u \in K : f - \varepsilon \leq u\} \leq f$$

*) Eine Menge $L \subset C(X)$ heißt *linksseitig erblich*, wenn aus $f \in L$, $g \in C(X)$ und $g \leqslant f$ stets $g \in L$ folgt.

für jedes $\varepsilon > 0$ und somit $\hat{f} \leq f$, also wegen (7) $f = \hat{f}$. Gilt umgekehrt $f = \hat{f}$ für ein $f \in K^*$, so existiert zu jedem $\varepsilon > 0$ und jedem $x \in X$ eine (von ε abhängige) Funktion $u_x \in K$ mit

$$f - \varepsilon \leq u_x \qquad \text{und} \qquad u_x(x) < f(x) + \varepsilon,$$

also mit $u_x(y) < f(y) + \varepsilon$ für die Punkte y einer offenen Umgebung U_x von x. Endlich viele dieser offenen Mengen genügen zur Überdeckung von X, etwa $U_{x_1}, \ldots, U_{x_n}$. Für die zugehörigen Funktionen $u_{x_1}, \ldots, u_{x_n} \in K$ liegt dann

$$u_\varepsilon := \inf(u_{x_1}, \ldots, u_{x_n})$$

nach Voraussetzung in K. Es gilt offenbar

$$f - \varepsilon \leq u_\varepsilon < f + \varepsilon,$$

also $|f - u_\varepsilon| \leq \varepsilon$. Somit liegt f in $\bar{K} = K$.

Zur Illustration fügen wir zwei einfache Beispiele an:

Beispiele. 1) Sei $X = [0,1]$ das Einheitsintervall und K der Kegel aller auf X affinen Funktionen $u \geq 0$ mit $u(0) = 0$. Man rechnet leicht nach, daß genau die folgenden Funktionen $f \in C(X)$ in K^m liegen: Es gilt entweder

$$f(0) < 0$$

oder

$$f(0) = 0 \qquad \text{und} \qquad \limsup_{x \to 0} \frac{f(x)}{x} < +\infty.$$

Dagegen gilt

$$K^* = \{f \in C(X) : f(0) \leq 0\}.$$

Dieses Beispiel lehrt, daß K^m nicht abgeschlossen zu sein braucht; beispielsweise liegt $x \mapsto \sqrt{x}$ in $K^* \setminus K^m$. Setzen wir für $f \in K^*$ noch

$$\alpha_f := \sup_{0 < x \leq 1} \frac{f^+(x)}{x},$$

so ist die Restriktion von $\hat{f}$ auf $]0,1]$ die konstante Funktion $+\infty$ für $\alpha_f = +\infty$ und die affine Funktion $x \mapsto \alpha_f x$ für $\alpha_f < +\infty$. Stets gilt $\hat{f}(0) = 0$.

2) Für einen beliebigen kompakten Raum X und einen Punkt $x \in X$ sei K der Kegel aller Funktionen $u \in C(X)$ mit $u \geq 0$ und $u(x) = 0$. Dann folgt

$$K^m = K^* = \{f \in C(X) : f(x) \leq 0\}.$$

Für jedes $f \in K^*$ ist $\hat{f}$ gleich dem Positivteil f^+ von f.

3. Beweis des Satzes von Choquet-Deny

Nun kommen wir zur angekündigten Fallunterscheidung und damit zum Beweis des Satzes von Choquet-Deny. Hierzu sei f eine Funktion aus $C(X) \setminus K$.

Im Fall 1, wo f in $K^* \setminus K$ liegt, gibt es gemäß Lemma 2 ein $x \in X$ mit $f(x) < \hat{f}(x)$. Wir behaupten:

Satz. *Liegt f in $K^* \setminus K$, so gibt es zu jedem $x \in X$ mit $f(x) < \hat{f}(x)$ ein positives Radon-Maß σ auf X mit $\sigma(\{x\}) = 0$ und den Eigenschaften* (U_1). *Liegt f in $C(X) \setminus K^*$, so gibt es ein positives Radon-Maß τ auf X mit den Eigenschaften* (U_2).

Beweis. Sei $f \in K^* \setminus K$ und $f(x) < \hat{f}(x)$. Es gibt also eine Zahl $\varepsilon > 0$ mit

$$f(x) + \varepsilon < \inf\{u \in K : f - \varepsilon \leq u\}. \tag{8}$$

Dann aber ist die Menge $f + N_x + B_\varepsilon$ fremd zu K, wenn dabei N_x bzw. B_ε die Menge aller $t \in C(X)$ mit $t \geq 0$ und $t(x) = 0$ bzw. mit $|t(y)| < \varepsilon$ für alle $y \in X$ bezeichnet. Anderenfalls gäbe es nämlich Funktionen $n \in N_x$ und $b \in B_\varepsilon$ mit

$$u := f + n + b \in K,$$

also mit $u \in K$ und $u \geq f - \varepsilon$. Dies aber hätte wegen (8)

$$f(x) + \varepsilon < u(x) = f(x) + b(x),$$

also $b(x) > \varepsilon$ im Widerspruch zu $b \in B_\varepsilon$ zur Folge.

Nunmehr können wir ganz analog zu [4] weiterschließen: $f + N_x + B_\varepsilon$ ist eine offene konvexe Menge in $C(X)$. Nach einem bekannten Trennungssatz*) gibt es also eine stetige Linearform $\neq 0$ auf $C(X)$, d. h. ein Radon-Maß $\mu \neq 0$ auf X, und eine reelle Zahl γ mit

$$\mu(u) \geq \gamma \qquad \text{für alle } u \in K \tag{9}$$

und

---

*) Vgl. [3], p. 83, proposition 1 und remarque 1.

$$(10) \qquad \mu(f+n) < \gamma \qquad \text{für alle } n \in N_x.$$

Wegen $0 \in K$ ist einerseits $\gamma \leq 0$; andererseits folgt aus (9) $\mu(u) \geq 0$ für alle $u \in K$, da mit u auch λu für $\lambda > 0$ in K liegt. Somit kann sogar $\gamma = 0$ gewählt werden. Ersetzt man in (10) n durch λn mit $\lambda > 0$, so folgt analog

$$\mu(n) \leq 0 \qquad \text{für alle } n \in N_x.$$

Für den Positivteil μ^+ von μ hat dies

$$\begin{aligned}\mu^+(n) &= \sup\{\mu(g) : g \in C(X),\ 0 \leq g \leq n\}\\ &\leq \sup\{\mu(g) : g \in N_x\} \leq 0\end{aligned}$$

und damit $\mu^+(n) = 0$ für alle $n \in N_x$, also auch für alle $n \in C(X)$ mit $n(x) = 0$ zur Folge. Für beliebiges $t \in C(X)$ folgt hieraus

$$\mu^+(t) = \mu^+\bigl(t - t(x)\bigr) + \mu^+\bigl(t(x)\bigr) = t(x)\mu^+(1),$$

also

$$\mu^+ = \alpha\varepsilon_x$$

mit $\alpha := \mu^+(1)$ und $\varepsilon_x :=$ Einheitsmasse in x. Der Negativteil μ^- von μ wird von einer zu $\{x\}$ fremden Menge, also von $X \setminus \{x\}$ getragen, d. h. es ist $\mu^-(\{x\}) = 0$. Es muß $\alpha > 0$ sein, da sonst $\mu = -\mu^-$ ein negatives Maß wäre. Wegen (9) (mit $\gamma = 0$) hätte dies für jedes $\varepsilon > 0$ und alle $u \in K$ mit $u \geq f - \varepsilon$

$$\mu(f) \geq \mu(u) + \varepsilon\mu(1) \geq \varepsilon\mu(1),$$

also $\mu(f) \geq 0$ zur Folge. Dies aber widerspricht (10). Damit ist schließlich gezeigt, daß

$$\sigma := \frac{1}{\alpha}\mu^-$$

das Verlangte leistet.

Liegt f in $C(X) \setminus K^*$, so wird der Beweis durch das nachfolgende Lemma zu Ende geführt. Man hat nur zu beachten, daß K^* gemäß Lemma 1 ein abgeschlossener, konvexer Kegel ist, welcher wegen der linksseitigen Erblichkeit mit jedem $u \in K^*$ auch die Funktion $\inf(u, f)$ enthält.

Lemma 3. *Sei K_0 ein abgeschlossener konvexer Kegel in $C(X)$ und $f \in C(X) \setminus K_0$ derart, daß aus $u \in K_0$ stets* $\inf(u, f) \in K_0$ *folgt. Dann gibt es ein positives Radon-Maß τ auf X mit*

$$\tau(f) > 0 \qquad \textit{und} \qquad \tau(u) \leq 0 \qquad \textit{für alle } u \in K_0.\text{*)}$$

Beweis. Es gibt Zahlen $\varepsilon > 0$, für welche die Menge $f + C_+ + B_\varepsilon$ fremd zu K_0 ist, wenn dabei C_+ die Menge aller $f \in C(X)$ mit $f \geq 0$ bezeichnet und B_ε wie im vorausgehenden Beweis definiert wird. In der Tat: Es genügt $0 < \varepsilon < d(f, K_0)$ zu wählen, wobei $d(f, K_0)$ den Abstand von f und K_0 in der üblichen Supremumsnorm $\|\ldots\|$ auf $C(X)$ bezeichnet. Nach Voraussetzung gilt

$$\|f - \inf(u, f)\| > \varepsilon$$

für jedes $u \in K_0$. Dann aber kann u nicht in $f + C_+ + B_\varepsilon$ liegen, da sonst

$$0 \leq f - \inf(u, f) = \sup(f - u, 0) \leq \varepsilon,$$

also $\|f - \inf(u, f)\| \leq \varepsilon$ wäre.

Ziehen wir den oben erwähnten Trennungssatz erneut heran, so ergibt sich die Existenz eines Radon-Maßes $\tau \neq 0$ auf X und einer Zahl γ mit

$$\tau(u) \leq \gamma \qquad \text{für alle } u \in K_0 \tag{11}$$

und

$$\tau(f + p) > \gamma \qquad \text{für alle } p \in C_+. \tag{12}$$

Wie oben erkennt man, daß $\gamma = 0$ gewählt werden kann. Aus (12) folgt $\tau(p) \geq 0$ für alle $p \in C_+$, da C_+ ein Kegel ist. Somit ist τ ein positives Maß, welches das Verlangte leistet.

4. Schlußbemerkungen

1. Die Aussage des obigen Satzes läßt sich im Fall 1 noch verschärfen: *Zu $f \in K^* \setminus K$ gibt es kein positives Radon-Maß τ auf X mit den Eigenschaften* (U_2). Wegen $f \in K^*$ ist f fast K-majorisierbar, also gibt es zu jedem $\varepsilon > 0$ eine Funktion $u \in K$ mit $f \leq u + \varepsilon$. Aus (U_2) würde dann für das positive Maß τ folgen:

$$0 < \tau(f) \leq \tau(u) + \varepsilon\tau(1) \leq \varepsilon\tau(1).$$

Die Ungleichung $0 < \tau(f) \leq \varepsilon\tau(1)$ kann aber nicht für alle $\varepsilon > 0$ richtig sein.

---

*) Vgl. hierzu Guber [6], wo sich eine andere Anwendung dieses, dort nur für einen Spezialfall formulierten Lemmas findet.

Verzichtet man also im Satz auf die Fixierung des Punktes x, verlangt man vielmehr nur die Existenz eines $x \in X$ und eines positiven Maßes σ mit $\sigma(\{x\}) = 0$ und (U_1), so liefert die Existenz des Paares (σ, x) bereits der ursprüngliche Satz von Choquet-Deny bei Beachtung obiger Bemerkung.

2. Anders verhalten sich Funktionen $f \in C(X) \setminus K^*$. Für solche kann es neben einem positiven Maß τ mit der Eigenschaft (U_2) auch ein positives Maß σ und einen Punkt $x \in X$ mit $\sigma(\{x\}) = 0$ und der Eigenschaft (U_1) geben. Man wähle etwa im Beispiel 1 eine Funktion $f \in C(X)$ mit $f(1) < f(0)$ und $f(0) > 0$ (d.h. $f \in C(X) \setminus K^*$). Dann leisten $\sigma := \varepsilon_0$ und $x := 1$ das Verlangte.

3. Im Fall $K^* = C(X)$ kann K allein durch Ungleichungen vom Typ (2) beschrieben werden. Notwendig und hinreichend für $K^* = C(X)$ ist die Existenz einer strikt positiven Funktion in K. Aus $K^* = C(X)$ folgt nämlich, daß die konstante Funktion 2 in K^*, also die konstante Funktion $1 = 2 - 1$ in K^m liegt. Die Umkehrung ist evident, da bereits $K^m = C(X)$ gilt.

4. Kann K allein durch Ungleichungen vom Typ (2) beschrieben werden, so folgt nicht notwendig $K^* = C(X)$. Ein Beispiel hierfür ist das folgende: Sei X kompakt und nicht einpunktig. Es sei $I := \boldsymbol{N} \times (X \times X \setminus \Delta)$, wobei $\boldsymbol{N}$ die Menge der natürlichen Zahlen und Δ die Diagonale von $X \times X$ bezeichnet. Für jedes Tripel $i = (n, x, y) \in I$, wobei $n \in \boldsymbol{N}$ sowie x und y verschiedene Punkte aus X sind, sei $\sigma_i := n\varepsilon_x$ und $x_i := y$. Man erhält so den der Familie $(\sigma_i, x_i)_{i \in I}$ assoziierten Kegel K. Man sieht sofort, daß K der Kegel aller auf X konstanten Funktionen mit Werten ≤ 0 ist.

5. Im Fall $K^* = C(X)$ ist für jedes $x \in X$ die Abbildung $f \mapsto \hat{f}(x)$ eine auf $C(X)$ definierte Sublinearform. Nach dem Satz von Hahn-Banach gibt es zu $f_0 \in C(X) \setminus K$ und zu $x \in X$ mit $f_0(x) < \hat{f}_0(x)$ ein Radon-Maß σ auf $C(X)$ mit $\sigma(f) \leq \hat{f}(x)$ für alle $f \in C(X)$ und $\sigma(f_0) = \hat{f}_0(x)$.*) σ ist dann ein positives Radon-Maß auf X, welches $\sigma(\{x\}) = 0$ und (U_1) erfüllt. Es wäre interessant zu wissen, ob man im allgemeinen Fall, nämlich

---

*) Vgl. Choquet [5], chap. 6 sowie [2].

in der Situation unseres Satzes, ähnlich schließen kann, indem man einen der Fortsetzungssätze von Anger-Lembcke [1] heranzieht. Die Rolle der Sublinearform im Satz von Hahn-Banach müßte dann von der Hypolinearform $f \mapsto \hat{f}(x)$ übernommen werden, welche auf dem Kegel K^* definiert ist.

Literatur

[1] Anger, B., Lembcke, J.: Hahn-Banach type theorems for hypolinear functionals. Math. Ann. **209**, 127–151 (1974).

[2] Bauer, H.: Cônes convexes semi-réticulés de fonctions continues. Théorèmes de représentation et de stabilité. Seminaire de théorie du potentiel, 8e année, 1963/64, n0 5. Secrétariat math., Paris (1965).

[3] Bourbaki, N.: Espaces vectoriels topologiques, Chap. 1–2. Hermann, Paris (1966).

[4] Choquet, G., Deny, J.: Ensembles semi-réticulés et ensembles réticulés de fonctions continues. J. Math. pures et appl., 9e sér., **36**, 179–189 (1957).

[5] Choquet, G.: Lectures on analysis, vol. II, Representation theory. Benjamin, New York-Amsterdam (1969).

[6] Guber, S.: Maßtheoretische Kennzeichnung gewisser Funktionenkegel. Archiv der Math. **15**, 58–70 (1964).