BAYERISCHE AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN
MATHEMATISCH-NATURWISSENSCHAFTLICHE KLASSE

SITZUNGSBERICHTE

JAHRGANG
1970

MÜNCHEN 1971

VERLAG DER BAYERISCHEN AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN
In Kommission bei der C.H.Beck'schen Verlagsbuchhandlung München

Das Zentrum von Ringen mit Kettenbedingungen

Von Friedrich Kasch und Ulrich Oberst in München

Vorgelegt von Herrn Karl Stein am 23. Oktober 1970

1. Einleitung

Es ist eine naheliegende Frage, ob sich Eigenschaften eines Ringes auf dessen Zentrum übertragen. Bekanntlich ist z. B. das Zentrum eines halbeinfachen bzw. regulären bzw. lokalen Ringes wieder ein Ring vom gleichen Typ. Wie steht es in dieser Hinsicht mit der Eigenschaft Artinsch oder Noethersch?

Wir geben im folgenden einen beidseitig Artinschen (und daher auch Noetherschen) Ring an, dessen Zentrum nicht Noethersch (und daher auch nicht Artinsch) ist.

Andererseits zeigen wir, daß gewisse Minimalbedingungen beim Übergang zum Zentrum erhalten bleiben. Sei R ein Ring mit Einselelement und sei $Z = Z(R)$ das Zentrum von R. Wir nennen R einen (*)-Ring, wenn er der folgenden Bedingung genügt:

(*) Für jedes $z \in Z(R)$ wird die Folge

$$zR \supseteqq z^2R \supseteqq z^3R \supseteqq \dots$$

stationär, d. h. es gibt ein $n \in \mathbf{N}$ mit

$$z^n R = z^i R \text{ für } i \geq n.$$

Es folgt dann, daß semi-primäre Ringe und π-reguläre Ringe (*)-Ringe sind.

Dabei heißt ein Ring R π-regulär (im Sinne von N. H. McCoy [9]), wenn zu jedem $r \in R$ ein $n \in \mathbf{N}$ und ein $r' \in R$ mit

$$r^n r' r^n = r^n$$

existieren.

Für einen kommutativen Ring sind die Begriffe „(*)-Ring" und „π-regulärer Ring" äquivalent.

Unser erstes wesentliches Resultat besagt dann, daß ein Ring R genau dann (*)-Ring ist, wenn sein Zentrum (*)-Ring, d. h. π-regulär ist. Daraus folgt unter anderem, daß das Radikal $Ra(Z)$ des Zentrums Z eines (*)-Ringes R ein Nilideal ist und jedes Ideal $\neq$ O aus $Z/Ra(Z)$ ein Idempotent $\neq$ o enthält.

Um Halbeinfachheit von $Z/Ra(Z)$ zu erhalten, braucht man zusätzlich Kettenbedingungen für direkte Summanden.

Unser Hauptresultat hierzu besagt, daß ein Ring R genau dann ein (*)-Ring ist und der Minimalbedingung für zweiseitige direkte Summanden von R genügt, wenn sein Zentrum semi-primär ist.*

Speziell ergibt sich, daß das Zentrum eines semi-primären bzw. perfekten Ringes wieder semiprimär bzw. perfekt ist. Insbesondere ist das Zentrum eines Artinschen Ringes perfekt und besitzt ein nilpotentes Radikal.

Ferner betrachten wir die Inklusion $Ra(Z) \subseteq Ra(R)$ und zeigen, daß sie bei Noetherschen Ringen nicht notwendig erfüllt sein muß. Für ihre Gültigkeit wird eine hinreichende Bedingung angegeben.

Schließlich untersuchen wir das Zentrum von linear kompakten Ringen. Hier wird gezeigt, daß das Zentrum eines regulären, F-linear kompakten Ringes wieder ein solcher Ring ist. Mit anderen Worten: Ist R regulär und R_R injektiv, dann ist Z_Z injektiv.

2. Das Zentrum von (*)-Ringen

Wir stellen zunächst einige allgemeine Eigenschaften von (*)-Ringen und π-regulären Ringen zusammen.

2.1. Lemma: Ist R auf einer Seite perfekt, dann ist R (*)-Ring.

Beweis: Ist R auf einer Seite perfekt, dann genügt R der Minimalbedingung für Hauptideale auf der anderen Seite ([1]). Die Bedingung (*) ist wegen $z \in Z(R)$ von der Seite unabhängig.

2.2. Lemma: Ist U zweiseitiges Nilideal aus R und ist R/U (*)-Ring, dann ist R (*)-Ring.

---

* Ein Ring R heißt semi-primär, falls sein Radikal $Ra(R)$ ein Nilideal und $R/Ra(R)$ halbeinfach sind.

Beweis: Sei $z \in Z(R)$, dann folgt $\bar{z} := z + U \in Z(R/U)$, also existiert ein $n \in \mathbf{N}$ mit

$$\bar{z}^n \bar{R} = \bar{z}^i \bar{R} \text{ für } i \geq n,$$

wobei $\bar{R} := R/U$. Insbesondere (für $i = n + 1$) folgt, daß $r \in R$ und $u \in U$ mit

$$z^n = z^{n+1} r + u$$

existieren. Da U Nilideal ist, gibt es ein $k \in \mathbf{N}$ mit $u^k = \mathbf{0}$, also

$$(z^n - z^{n+1} r)^k = 0.$$

Die Binomialformel liefert

$$(z^n - z^{n+1} r)^k = z^{nk} - z^{nk+1} r' = 0$$

mit $r' \in R$, also

$$z^{nk} R = z^i R \text{ für } i \geq nk.$$

Bekanntlich heißt ein Ring R semi-primär, wenn sein Radikal ein Nilideal und $R/Ra(R)$ halbeinfach sind.

2.3. **Folgerung:** Jeder semi-primäre Ring ist (*)-Ring.

2.4. **Lemma:**

a) Jeder π-reguläre Ring ist (*)-Ring.

b) Für einen kommutativen Ring R sind die Begriffe „(*)-Ring“ und „π-regulär“ äquivalent.

Beweis:

a) Für $z \in Z(R)$ gibt es $n \in \mathbf{N}$ und $z' \in R$ mit

$$z^n = z^n z' z^n = z^{2n} z',$$

woraus (*) folgt.

b) Sei R kommutativ und (*)-Ring. Aus $z^n R = z^{2n} R$ folgt die Existenz von $z' \in R$ mit

$$z^n = z^{2n} z' = z^n z' z^n,$$

also ist R π-regulär.

2.5. **Satz:** Ein Ring R ist genau dann ein (*)-Ring, wenn sein Zentrum $Z(R)$ ein (*)-Ring, d. h. π-regulär ist.

Beweis: (Vergl. [9], Theorem 1). Daß die Bedingung hinreichend ist, ist klar. Sei nun $z \in Z(R)$ und $n \in \mathbf{N}$ mit

$$z^n R = z^i R \text{ für } i \geq n.$$

Insbesondere ist

$$z^{2n} r = z^n \in Z(R)$$

für ein $r \in R$. Für alle $k \in \mathbf{N}$ ist dann

$$z^{2n} r^k \in Z(R).$$

Sei nämlich $x \in R$. Dann ist

$$x(z^{2n} r^k) = x(z^{2n} r) r^{k-1} = (z^{2n} r) x r^{k-1} = r x (z^{2n} r^{k-1}) = \\ = r(z^{2n} r^{k-1}) x = (z^{2n} r^k) x$$

durch Induktion nach k, also $z^{2n} r^k \in Z(R)$. Daraus folgt:

$$z^n (z^{2n} r^3) z^n = z^{4n} r^2 r = (z^{2n} r)^2 r = (z^n)^2 r = z^{2n} r = z^n$$

mit $z^{2n} r^3 = Z(R)$ nach obiger Herleitung, also ist $Z(R)$ π-regulär, d. h. (*)-Ring.

Um aus diesem Satz Folgerungen zu ziehen, haben wir einige Eigenschaften von π-regulären Ringen zu benutzen ([7], [9]). Da die Beweise ganz kurz sind, geben wir sie hier an.

2.6. Lemma: Für einen π-regulären Ring T gelten:

a) Jedes Rechts- oder Linksideal, das nicht Nilideal ist, enthält ein Idempotent $\neq 0$.

b) $Ra(T)$ ist Nilideal.

c) Jedes Rechts- oder Linksideal $\neq 0$ von $T/Ra(T)$ enthält ein Idempotent $\neq 0$.

Beweis: Sei $t \in T$ nicht nilpotent und sei $t^n t' t^n = t^n$. Dann sind $t^n t'$ und $t' t^n$ von Null verschiedene Idempotente in $t\,T$ bzw. $T t$, also gilt a). Da $Ra(T)$ kein Idempotent $\neq 0$, aber alle Nilideale enthält, folgen b) und c).

2.7. Folgerung: Ist R ein (*)-Ring, so gelten a)–c) von Lemma 2.6. für $Z = Z(R)$.

2.8. Satz: Sei R (*)-Ring mit Zentrum Z. Dann ist

$$Ra(Z) \subseteq Ra(R)$$

Beweis: Nach 2.7 sind $Ra(Z)$ und damit $RRa(Z)$ Nilideale, also gilt

$$Ra(Z) \subseteq RRa(Z) \subseteq Ra(R)$$

2.9. Folgerung: Sei R ein (*)-Ring mit Zentrum Z. Dann gelten:

a) $Ra(Z) = Z \cap Ra(R)$.

b) Ist $Ra(R)$ rechts oder links t-nilpotent (im Sinne von H. Bass [1]) bzw. nilpotent, dann ist auch $Ra(Z)$ t-nilpotent bzw. nilpotent.

c) Die Injektion $Z \to R$ induziert die Injektion

$$Z/Ra(Z) \to Z(R/Ra(R)) \subseteq R/Ra(R)$$

Beweis: a) folgt aus 2.8 und der Relation $Ra(R) \cap Z \subseteq Ra(Z)$, welche bekanntlich für jeden Ring gilt. Die Behauptungen b) und c) folgen unmittelbar aus a).

2.10. Bemerkung: Die für unsere Betrachtungen wesentlichste Eigenschaft von (*)-Ringen ist die Beziehung $Ra(Z) \subseteq Ra(R)$. Sie gilt z. B. auch für beliebige lokale Ringe, dagegen nicht für beliebige Noethersche Ringe (siehe 5.1). Gibt es weitere natürliche Bedingungen für einen Ring R, welche ebenfalls die Inklusion $Ra(Z) \subseteq Ra(R)$ nach sich ziehen?

3. Halbeinfachheit von Z/Ra(Z)

Wir geben eine Bedingung an, die bei einem (*)-Ring dazu äquivalent ist, daß $Z/Ra(Z)$ halbeinfach ist. Für die hier vorgesehene Bedingung gibt es zwei äquivalente Formulierungen, die zunächst angegeben werden sollen.

3.1. Lemma:

a) Für einen Ring S sind äquivalent:

(1) S erfüllt die Minimalbedingung für Rechts- oder Linksideale, die direkte Summanden (von S_S bzw. ${}_SS$) sind.

(2) Es gibt keine unendliche Menge von orthogonalen Idempotenten aus S.

b) Für einen Ring S sind äquivalent:

(1) S erfüllt die Minimalbedingung für zweiseitige Ideale, die direkte Summanden (von ${}_S S_S$) sind.

(2) Es gibt keine unendliche Menge von orthogonalen Idempotenten aus dem Zentrum von S.

Beweis:

a) (1) $\Rightarrow$ (2): Sei $\{e_1, e_2, e_3, \ldots\}$ eine unendliche Menge von orthogonalen Idempotenten, dann folgt

$$(1 - e_1)R \underset{\neq}{\supset} (1 - e_1 - e_2)R \underset{\neq}{\supset} (1 - e_1 - e_2 - e_3)R \underset{\neq}{\supset} \ldots$$

(2) $\Rightarrow$ (1) nach [7]): Ist

$$e_1 R \underset{\neq}{\supset} e_2 R \underset{\neq}{\supset} e_3 R \underset{\neq}{\supset} \ldots$$

mit Idempotenten $e_1, e_2, e_3, \ldots$, dann ist

$$\{(1 - e_2)e_1,\ (1 - e_3)e_2 e_1,\ (1 - e_4)e_3 e_2 e_1, \ldots\}$$

eine unendliche Menge orthogonaler Idempotente.

b) Wie a) mit Idempotenten aus dem Zentrum von R.

Aus diesem Lemma gibt sich insbesondere, daß jeder Unterring (mit Einselement) eines Ringes mit Minimalbedingung für einseitige direkte Summanden wieder ein Ring mit dieser Eigenschaft ist.

Für Restklassenringe ergibt sich

3.2. Lemma: Sei U ein zweiseitiges Nilideal des Ringes S, dann gilt: Die Bedingungen von 3.1. a) sind genau dann für S erfüllt, wenn sie für S/U erfüllt sind.

Beweis: Nach [6], III. 8, Prop. 5 und Remark, entsprechen sich eineindeutig die Folgen von orthogonalen Idempotenten von S und S/U.

3. 3. Lemma: [7]: Sei T ein Ring mit folgenden Eigenschaften:

1) Jedes Rechtsideal $\neq 0$ von T enthalte ein Idempotent $\neq 0$;

2) T erfülle die Bedingungsn von 3.1. a). Dann ist T halbeinfach.

Beweis: (Etwas abweichend von dem Beweis in [7]). Induktiv wird bewiesen:

$$T = e_1 T \oplus \ldots \oplus e T \oplus e_k^* T$$

wobei $e_1, \ldots, e_k, e_k^*$ orthogonale Idempotente sind und $e_i T$, $i = 1, \ldots, k$ einfach ist. Ist in der vorstehenden Zerlegung $e_k^* T$ einfach, dann ist man fertig. Sonst sei $e'_{k+1} T$ minimal in der Menge der in $e_k^* T$ enthaltenen direkten Summanden $\neq 0$ von R_R; dabei sei e'_{k+1} ein Idempotent. Dann ist auch $e_{k+1} := e'_{k+1} e_k^*$ ein Idempotent $\neq 0$ und es gilt wegen der Minimalität $e'_{k+1} T = e_{k+1} T$ Man prüft sofort nach, daß

$$e_1, \ldots, e_{k+1}, e_{k+1}^* := e_k^* - e_{k+1}$$

eine Menge orthogonaler Idempotente ist. Da $e_{k+1} T$ minimal ist und da jedes Rechtsideal $\neq 0$ ein Idempotent $\neq 0$ enthält, ist $e_{k+1} T$ einfach.

Wegen

$$R \underset{\neq}{\supset} e_1^* R \underset{\neq}{\supset} e_2^* R \underset{\neq}{\supset} e_3^* R \underset{\neq}{\supset} \ldots$$

muß das Verfahren abbrechen.

3.4. **Folgerung:** Seien T ein π-regulärer Ring, $Ra(T) = 0$ und T erfülle die Bedingungen von 3.1.a). Dann ist T halbeinfach.

Wir benötigen die Folgerung nur für den Spezialfall $T = Z/Ra(Z)$.

3.5. **Satz:** Für einen Ring R mit Zentrum $Z := Z(R)$ sind folgende Aussagen gleichwertig:

a) R ist ein (*)-Ring und genügt der Minimalbedingung für zweiseitige direkte Summanden.

b) Z ist ein (*)-Ring und genügt der Minimalbedingung für direkte Summanden.

c) Z ist semi-primär.

Beweis: a) $\Leftrightarrow$ b): Nach 2.5. ist R genau dann (*)-Ring, wenn Z (*)-Ring ist. Da die zentralen Idempotente von R genau die

Idempotente von Z sind, folgt die Äquivalenz von a) und b) aus Lemma 3.1. b).

b) $\Rightarrow$ c): Nach 2.7. ist $Ra(Z)$ Nilideal. Da Z kommutativer Ring ist, ist nach 2.4. Z π-regulär und folglich auch $Z/Ra(Z)$. Nach 3.2. und 3.4. ist daher $Z/Ra(Z)$ halbeinfach.

c) $\Rightarrow$ b): Folgt aus 2.3. und 3.2.

3.6. Folgerung:

a) Ist R semi-primär, dann ist Z semiprimär.

b) Ist R auf einer Seite perfekt, dann ist Z perfekt.

c) Ist R auf einer Seite Artinsch, dann ist Z perfekt und $Ra(Z)$ ist nilpotent.

Beweis:

a) Wegen 2.3. und 3.2. erfüllt ein semi-primärer Ring die Bedingungen von 3.5. a).

b) Ist R auf einer Seite perfekt, dann ist R semi-primär ([1]). Die Behauptung folgt dann aus a) und 2.8.

c) Folgt aus a) und 2.8.

4. Ein Beispiel

Wir konstruieren einen lokalen, beidseitig Artinschen Ring R, dessen Zentrum $Z = Z(R)$ nicht Artinsch ist. Da Z nach 3.6. c) perfekt ist, ist Letzteres damit gleichbedeutend, daß Z nicht Noethersch ist. Die Konstruktion verläuft in mehreren Schritten.

Seien K ein Körper, $d: K \to K$ eine Derivation von K und $K_0 := \{x \in K;\ dx = 0\}$ der Konstantenkörper von d. Wir setzen $[K : K_0] = \infty$ voraus. Z. B. seien $K = \mathbb{C}(X)$ der Körper der rationalen Funktionen über $\mathbb{C}$ und $d: \mathbb{C}(X) \to \mathbb{C}(X)$ die gewöhnliche Ableitung. In diesem Fall sind $K_0 = \mathbb{C}$ und offenbar $[\mathbb{C}(X) : \mathbb{C}] = \infty$.

Sei dann

$$L := K[X]/(X^2) = K \oplus K\bar{X}, \quad \bar{X} = X \bmod (X^2),$$

der Ring der dualen Zahlen über K. Die K-Algebra L ist zweidimensional und lokal. Ihr Radikal ist $Ra(L) = K\bar{X}$ und erfüllt $Ra(L)^2 = 0$.

Sei $s: L \to L$ definiert durch

$$s(a + b\bar{X}) = a + (da + b)\bar{X},\ a, b \in K.$$

Wie man leicht nachprüft, ist s ein Ringautomorphismus von L. Sei M der Fixring von s, also

$$M := \mathrm{Fix}(s) = \{l \in L; s(l) = l\}.$$

Eine leichte Rechnung zeigt

$$M = K_0 \oplus K\bar{X}.$$

Also ist M ein lokaler Unterring von L mit $Ra(M) = Ra(L) = K\bar{X}$. Im Gegensatz zu L ist M aber nicht Noethersch; denn die Ideale von M in $Ra(M) = K\bar{X}$ sind genau die K_0-Unterräume von $K\bar{X}$ und nach Voraussetzung ist

$$[K\bar{X} : K_0] = [K : K_0] = \infty.$$

Mit Hilfe von L und s definieren wir den Ring R ähnlich wie das bekannte Beispiel eines links, aber nicht rechts Artinschen Ringes. Sei

$$R := L \times L$$

mit komponentenweiser Addition und der Multiplikation

$$(x, y)(x', y') = (xx', xy' + ys(x')).$$

4. 1. **Lemma**: Der obige Ring R ist beidseitig Artinisch.

Beweis: Die Injektion

$$\mathrm{Inj}: L \to R \text{ mit } x \mapsto (x, 0)$$

ist offenbar ein Ringhomomorphismus. Damit wird R ein L-Bimodul. Die Folge

$$0 \to L \xrightarrow{\mathrm{Inj}} R \xrightarrow{\mathrm{Proj}} L \to 0$$

ist eine exakte Folge von L-Linksmoduln, wobei Proj die Projektion

$$\mathrm{Proj}: R \to L \text{ mit } (x, y) \mapsto y$$

ist. Da L Artinsch ist, sind auch ${}_LR$ und damit ${}_RR$ Artinsch. Der Ring R ist also links Artinsch.

Andererseits sei L_s der L-Rechtsmodul, dessen unterliegende Gruppe L ist und dessen Skalarmultiplikation durch

$$L_s \times L \to L_s : (x, y) \mapsto x s(y)$$

gegeben ist. Dann ist $s : L \to L_s$ ein Isomorphismus von L-Moduln, also ist auch L_s Artinsch. Die Folge

$$0 \to L \xrightarrow{\text{Inj}} R \xrightarrow{\text{Proj}} L_s \to 0$$

ist dann eine exakte Folge von L-Rechtsmoduln. Wie oben folgt, daß R auch rechts Artinsch ist.

Ist $(x, y) \in R$, so ist (x, y) genau dann eine Einheit in R, wenn x Einheit in L ist. Da L ein lokaler Ring ist, impliziert dies, daß R ebenfalls lokal ist und sein Radikal die Gestalt

$$Ra(R) = Ra(L) \times L$$

hat. Wegen $Ra(L)^2 = 0$ und $(0 \times L)^2 = 0$ folgt daraus $Ra(R)^4 = 0$.

Eine letzte leichte Rechnung zeigt

$$Z(R) = M \times Ra(M).$$

Dabei benutzt man, daß wegen $K_0 \neq K$ die Beziehung

$$Ra(L) = Ra(M) = K\overline{X} =$$
$$= \{x \in L;\ \text{Für alle } y \in L \text{ ist } x(s(y) - y) = 0\}$$

gilt. Da M nach obigen Betrachtungen nicht Noethersch ist, existiert eine echt aufsteigende Folge

$$N_1 \subsetneqq N_2 \subsetneqq N_3 \subsetneqq \ldots$$

von Idealen von M. Dann ist

$$N_1 \times Ra(L) \subsetneqq N_2 \times Ra(L) \subsetneqq N_3 \times Ra(L) \subsetneqq \ldots$$

eine echt aufsteigende Folge von Idealen von $Z(R)$, also ist auch $Z(R)$ nicht Noethersch.

Fassen wir die obigen Betrachtungen zusammen, so erhalten wir das

4.2. Beispiel: Der oben konstruierte Ring R ist lokal und auf beiden Seiten Artinsch. Sein Radikal erfüllt $Ra(R)^4 = 0$. Das Zentrum von R ist nicht Noethersch.

4.3. Folgerung: Das Zentrum eines ein- oder beidseitig kohärenten Ringes ist nicht notwendig kohärent.

Beweis: Der obige Ring R ist beidseitig Artinsch, also beidseitig Noethersch und damit kohärent. Das Zentrum $Z(R)$ von R ist perfekt nach 3.6. Wäre $Z(R)$ kohärent, so wäre $Z(R)$ ein kommutativer, perfekter und kohärenter Ring, also Artinsch nach [4].

4.4. Bemerkung: In [5] zeigt D. Eisenbud, daß das Zentrum $Z(R)$ eines Noetherschen bzw. Artinschen Ringes wieder Noethersch bzw. Artinsch ist, falls R als $Z(R)$-Modul endlich erzeugt ist. Das Beispiel eines Schiefkörpers von unendlichem Rang über seinem Zentrum (z. B. [6], Kap. 7; 14, 1) zeigt dagegen, daß die Umkehrung dieses Satzes nicht gilt.

5. Über die Inklusion $Ra(Z(R)) \subseteqq Ra(R)$

Eine leichte Verallgemeinerung des in der Bemerkung 4.4. erwähnten Beispiels von N. Jacobson zeigt, daß für Noethersche Ringe R die Beziehung $Ra(Z(R)) \subseteqq Ra(R)$ im allgemeinen nicht gilt.

5.1. Beispiel: Es existiert ein beidseitig Noetherscher Integritätsbereich R mit $Ra(R) = 0$, dessen Zentrum $Z(R)$ ein diskreter Bewertungsring ist, also insbesondere Noethersch ist und ein von Null verschiedenes Radikal besitzt.

Konstruktion: Seien K_0 ein diskreter Bewertungsring der Charakteristik 0, $K := K_0[X]$ und s der K_0-Automorphismus von K, definiert durch

$$s : K_0[X] \to K_0[X] \text{ mit } X \mapsto X + 1.$$

Wegen $\mathrm{Char}(K_0) = 0$ ist $\mathrm{Fix}\,(s) = K_0$ (vergl. [6], Kap. 7; 14, 1). Sei dann R der mit Hilfe von s definierte nicht-kommutative -K-Polynomring, d. h. sei

$$R = \oplus_{n \geq 0} K Y^n$$

als additive Gruppe mit der Multiplikation

$$Ya = s(a)Y,\ a \in K.$$

Der verallgemeinerte Hilbertsche Basissatz zeigt, daß R beidseitig Noethersch ist. Offenbar ist R ein Integritätsbereich. Schließlich ist $Ra(R) = 0$. Wäre nämlich $0 \neq r \in Ra(R)$, so wäre $1 + rY$ in R invertierbar, was für ein Polynom vom Grad größer als 0 offenbar nicht möglich ist.

Wie in [6], loc. cit., sieht man, daß

$$Z(R) = \mathrm{Fix}\,(s) = K_0$$

gilt. Damit ist das Beispiel mit den angeführten Eigenschaften konstruiert.

Die Relation $Ra(Z) \subseteqq Ra(R)$ gilt dagegen wieder, falls R als Z-Modul endlich erzeugt ist. Allgemein gilt

5.2. **Satz:** Seien R ein links Noetherscher Ring und Z ein zentraler Unterring von R derart, daß R als Z-Modul endlich erzeugt ist. Dann gilt $Ra(Z) \subseteqq Ra(R)$.

Beweis:

a) Nach [5] ist Z wieder Noethersch. Auf ${}_ZR$ können wir also die Theorie der endlich erzeugten Moduln über kommutativen Noetherschen Ringen (siehe z. B. N. Bourbaki ([3])) anwenden. Sei $z \in Ra(Z)$. Daß z in $Ra(R)$ liegt, bedeutet, daß z links quasi-regulär ist, d. h. daß für alle $r \in R$ das Element $1 - rz$ ein Linksinverses besitzt. Wir haben also zu zeigen, daß für alle $r \in R$ die Abbildung

$$f(R, rz) : R \to R \text{ mit } x \to x(1 - rz)$$

surjektiv ist.

b) Sei zunächst Z lokal und vollständig bzgl. der $\mathfrak{m}$-adischen Topologie, wobei $\mathfrak{m} := Ra(Z)$. Dann ist jeder endlich erzeugte Z-Modul, insbesondere R, vollständig bzgl. der $\mathfrak{m}$-adischen Topologie. Wegen

$$(rz)^k = r^k z^k \in Rz^k \subseteqq R\mathfrak{m}^k,\ k \geq 0,$$

konvergiert die Reihe $\sum (rz)^k$ in R, und zwar gilt

$$(1 - rz)^{-1} = \textstyle\sum_{k=0} (rz)^k.$$

Für alle $r \in R$ ist also $1 - rz$ invertierbar, insbesondere ist $f(R, rz)$ surjektiv.

c) Sei Z lokal mit $\mathfrak{m} := Ra(Z)$ und sei $\hat{Z}$ die Vervollständigung von Z bzgl. der $\mathfrak{m}$-adischen Topologie. Dann gelten

$$Z \subseteq \hat{Z} \text{ und } \mathfrak{m} \subseteq \hat{\mathfrak{m}} = Ra(\hat{Z}).$$

Wegen $z \in \mathfrak{m} \subseteq \hat{\mathfrak{m}}$ und nach b) ist die Abbilung

$$\hat{Z} \otimes f(R, rz) = f(\hat{R}, rz) : \hat{R} := \hat{Z} \otimes {}_Z R \to \hat{R}$$

surjektiv. Da $\hat{Z}$ eine treu-flache Z-Algebra ist, ist auch $f(R, rz)$ surjektiv.

d) Sei schließlich Z ein beliebiger Noetherscher Ring (nicht notwendig lokal). Für ein maximales Ideal $\mathfrak{m}$ von Z bedeute $Z_{\mathfrak{m}}$ die Lokalisierung nach $\mathfrak{m}$. Bekanntlich ist dann $f(R, rz)$ genau dann surjektiv, wenn für alle maximalen Ideale $\mathfrak{m}$ von Z die Abbildung

$$Z_{\mathfrak{m}} \otimes f(R, rz) = f\left(R_{\mathfrak{m}}, \frac{r}{1} \frac{z}{1}\right) : R_{\mathfrak{m}} := Z_{\mathfrak{m}} \otimes {}_Z R \to R_{\mathfrak{m}}$$

surjektiv ist. Dieses ist aber nach c) der Fall, da $z \in Ra(Z) \subseteq \mathfrak{m}$ und damit $\frac{z}{1} \in \mathfrak{m}_{\mathfrak{m}} = Ra(Z_{\mathfrak{m}})$ gelten.

6. Das Zentrum von linear kompakten Ringen

6.1. **Definition** [11]: Ein Ring R heißt links F-linear kompakt, falls für jede nach unten gefilterte Familie $(A_i; i \in I)$ von endlich erzeugten Linksidealen von R der Durchschnitt $\cap_I A_i$ wieder endlich erzeugt und die kanonische Abbildung

$$R \to \lim {}_I R/A_i$$

surjektiv sind.

Insbesondere ist jeder rechts perfekte Ring links F-linear kompakt, da er nach [2] die Minimalbedingung für endlich erzeugte Linksideale erfüllt.

Ein regulärer Ring R ist genau dann links F-linear kompakt, wenn R als R-Rechtsmodul injektiv ist ([11], 8.7.). Für diese Ringe beweisen wir

6.2. Satz: Das Zentrum $Z(R)$ eines regulären und links F-linear kompakten Ringes R ist wieder ein solcher Ring.

Zum Beweis des Satzes benötigen wir das folgende Lemma von v. Neumann, dessen Beweis wir der Vollständigkeit halber angeben.

6.3. Lemma ([10], Lemma 18): Seien R ein regulärer Ring und A ein zweiseitiges Ideal von R, das als Linksideal endlich erzeugt ist. Dann existiert genau ein zentrales Idempotent e von R mit $A = Re$.

Beweis: Da A als Linksideal endlich erzeugt ist, existiert ein Idempotent e mit $A = Re$. Wir zeigen zunächst $A = eR$. Offenbar ist

$$eR \subseteqq A = Re,$$

da A zweiseitiges Ideal ist. Sei nun $a \in A$ beliebig. Dann ist $eR + aR$ endlich erzeugt, also von der Gestalt

$$eR + aR = fR$$

mit einem Idempotent f. Insbesondere ist

$$eR \subseteqq fR, \text{ d. h. } e = fe.$$

Andererseits ist

$$fR \subseteqq A = Re, \text{ also } f = fe.$$

Zusammen folgt $e = f$. Damit ist

$$a \in fR = eR, \text{ also } A \subseteqq eR$$

und

$$A = Re = eR.$$

Das Idempotent e ist zentral. Für alle $r \in R$ ist nämlich

$$er \in eR = Re, \text{ also } er = ere,$$

und ebenso

$$re \in Re, \text{ also } re = ere,$$

also $re = er$.

Die Eindeutigkeit von e ist klar.

Beweis des Satzes: Das Zentrum eines regulären Ringes ist bekanntlich wieder regulär. Es ist daher nur zu zeigen, daß $Z := Z(R)$ wieder F-linear kompakt ist. Sei also $(A_i;\ i \in I)$ eine nach unten gefilterte Familie von endlich erzeugten Idealen von Z. Da Z regulär ist, gilt $A_i = Ze_i$ mit Idempotenten $e_i \in Z$. Die Ideale

$$B_i := RA_i = Re_i$$

sind zweiseitig und endlich erzeugt. Der Durchschnitt

$$B := \cap B_i$$

ist wieder zweiseitig und als Linksideal endlich erzeugt, da R F-linear kompakt ist. Nach dem vorigen Lemma gilt also $B = Re$ mit einem zentralen Idempotent e. Für zentrale Idempotente f in einem beliebigen Ring gilt aber

$$Zf = Z \cap Rf.$$

Also ist

$$\begin{aligned} Ze = Z \cap Re = Z \cap (\cap_I Re_i) = \cap_I (Z \cap Re_i) = \\ = \cap_I Ze_i = \cap_I A_i. \end{aligned}$$

Der Durchschnitt $A := \cap_I A_i$ ist also wieder endlich erzeugt. Wir zeigen schließlich, daß die kanonische Abbildung

$$Z \to \lim{}_I Z/A_i$$

surjektiv ist. Da R F-linear kompakt ist, ist die kanonische Abbildung

$$R/B \to \lim{}_I R/B_i$$

ein Ringisomorphismus. Unter Verwendung der expliziten Gestalt des inversen Limes folgt daraus ein Ringisomorphismus

$$Z(R/B) \to \lim{}_I Z(R/B_i).$$

Da die kanonische Abbildung

$$R \to Re \times R(1-e)$$

ein Ringisomorphismus ist, ist auch

$$Z(R) \to Z(Re) \times Z(R(1-e))$$

ein Ringisomorphismus und daher

$$Z(R) \to Z(R/B) = Z(R/Re) \cong Z(R(1-e))$$

surjektiv. Wegen $A_i = Z \cap B_i$ erhält man andererseits Injektionen

$$Z/A_i \to Z(R/B_i).$$

Insgesamt erhalten wir das kommutative Diagramm

$$\begin{array}{ccc} Z & \xrightarrow{f} & \lim Z/A_i \\ \downarrow h & & \downarrow g \\ Z(R/B) & \xrightarrow{k} & \lim Z(R/B_i), \end{array}$$

in dem alle Abbildungen die natürlichen sind. Nach obigen Betrachtungen sind k und h und damit auch g surjektiv. Als Limes von Injektionen ist g auch injektiv, also bijektiv. Damit ist auch f surjektiv, was zu zeigen war.

6.4. **Folgerung:** Ist R regulär und ist R auf einer Seite selbstinjektiv, dann ist Z selbstinjektiv.

Der Beweis folgt unmittelbar aus 6.3. und [11], loc. cit.

In diesem Zusammenhang ist auch das folgende Resultat von Interesse.

6.5. **Satz:** Seien R ein Ring (mit Einselement) und Z ein regulärer Unterring (mit dem gleichen Einselement) von R. Dann ist jeder R-injektive R-Modul auch Z-injektiv.

Beweis: Sei E ein injektiver R-Modul (z. B. ein R-Rechtsmodul ohne Einschränkung der Allgemeinheit). Wir haben zu zeigen, daß für alle Rechtsideale $A \subseteq Z$ die Restriktion

$$f: \operatorname{Hom}_Z(Z, E) \to \operatorname{Hom}_Z(A, E)$$

surjektiv ist.

Wir zeigen zuerst, daß für alle diese A die kanonische Restriktion

$$\operatorname{Res}: \operatorname{Hom}_R(AR, E) \to \operatorname{Hom}_Z(A, E)$$

bijektiv ist. Sei A zunächst endlich erzeugt. Dann ist $A = eZ$ mit einem Idempotent $e \in Z$, also $AR = eR$. In diesem Fall gilt aber

$$\mathrm{Hom}_R(eR, E) \cong Ee \cong \mathrm{Hom}_Z(eZ, E),$$

also ist Res für endlich erzeugtes A ein Isomorphismus. Sei nun A ein beliebiges Rechtsideal von Z. Dann ist

$$A = \bigcup A' = \mathrm{colim}\, A',$$

wobei A' die endlich erzeugten Z-Rechtsideale in A durchläuft. Ebenso gilt

$$AR = \bigcup A'R = \mathrm{colim}\, A'R.$$

Es folgt die Kette der Isomorphismen

$$\begin{aligned}\mathrm{Hom}_R(AR, E) &= \mathrm{Hom}_R(\mathrm{colim}\, A'R, E) \cong \lim \mathrm{Hom}_R(A'R, E) \cong \\ &\cong \lim \mathrm{Hom}_Z(A', E) \cong \mathrm{Hom}_Z(\mathrm{colim}\, A', E) = \mathrm{Hom}_Z(A, E),\end{aligned}$$

d. h.

$$\mathrm{Res}: \mathrm{Hom}_R(AR, E) \to \mathrm{Hom}_Z(A, E)$$

ist für jedes Rechtsideal A ein Isomorphismus.

Für beliebiges A erhalten wir dann das kommutative Diagramm

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Hom}_R(R, E) & \xrightarrow{g} & \mathrm{Hom}_R(AR, E) \\ \downarrow \mathrm{Res} & & \downarrow \mathrm{Res} \\ \mathrm{Hom}_Z(Z, E) & \xrightarrow{f} & \mathrm{Hom}_Z(A, E), \end{array}$$

wobei alle Abbildungen die kanonischen Restriktionen sind. Die vertikalen Restriktionen sind nach obiger Herleitung bijektiv; g ist surjektiv, da E_R injektiv ist. Also ist auch f surjektiv.

6.6. **Folgerung**: Ist ein regulärer Ring auf einer Seite selbstinjektiv, so ist er auch injektiv als Modul über seinem Zentrum.

Die Ergebnisse 3.6. b) und 6.2. legen die Vermutung nahe, daß für jeden F-linear kompakten Ring R das Zentrum wieder ein Ring vom gleichen Typ ist oder daß wenigstens die Inklusion

$$Ra(Z) \subseteqq Ra(R)\ (Z := Z(R))$$

gilt. Letzteres ist richtig, falls R zusätzlich kohärent und als Z-Modul endlich erzeugt ist.

Für linear kompakte Ringe im Sinne von H. Leptin ([8]) trifft die obige Vermutung dagegen wie im Spezialfall der Artinschen Ringe nicht zu. Unser Beispiel in Abschnitt 4 liefert auch die

6.7. **Folgerung:** Das Zentrum eines linear kompakten Ringes (bzgl. der diskreten Topologie) ist nicht notwendig wieder linear kompakt.

Beweis: Wir verwenden die Bezeichnungen und Objekte von Beispiel 4.2. Der beidseitig Artinsche Ring ist auch beidseitig linear kompakt.

Wäre sein Zentrum

$$Z(R) = M \times Ra(M)$$

linear kompakt, so folgte das Gleiche für M und $Ra(M) = K\bar{X}$. Die M-Untermoduln von $K\bar{X}$ sind aber genau die K_0-Unterräume von $K\bar{X}$, òlso wäre der K_0-Vektorraum K linear kompakt in der diskreten Topologie. Daraus folgte nach [7], Satz 4, $[K : K_0] < \infty$ im Widerspruch zur Annahme $[K : K_0] = \infty$.

Literatur

[1] H. Bass: Finistic dimension and a homological generalisation of semiprimary rings, Trans. Am. Math. Soc. 95 (1960), 466–488.

[2] J.-E. Björk: Rings satisfying a minimum condition on principal ideals, J. R. A. Math. 236 (1969), 112–119.

[3] N. Bourbaki: Algèbre commutative, Ch. 3, Hermann, Paris 1961.

[4] S. U. Chase: Direct products of modules, Ann. Math. 97 (1960), 457–473.

[5] D. Eisenbud: Subrings of artinian and noetherian rings, Math. Ann. 185 (1970), 247–249.

[6] N. Jacobson: Structure of rings, Am. Math. Soc. Coll. Publ. 37 (1956).

[7] I. Kaplansky: Topological representation of algebras II, Trans. Am. Math. Soc. 68 (1950), 62–75.

[8] H. Leptin: Linear kompakte Moduln und Ringe, Math. Z. 62 (1955), 241–267.

[9] N. H. McCoy: Generalized regular rings, Bull. Am. Soc. 22 (1939), 175–178.

[10] J. v. Neumann: On regular rings, Nat. Acad. Sc. Proc. 22 (1936), 92–100.

[11] U. Oberst: Duality theory for Grothendieck categories and linearly compact rings, J. of Alg. 15 (1970) 473–542.