BAYERISCHE AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN
MATHEMATISCH-NATURWISSENSCHAFTLICHE KLASSE

SITZUNGSBERICHTE

JAHRGANG
1965

MÜNCHEN 1966

VERLAG DER BAYERISCHEN AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN
In Kommission bei der C. H. Beck'schen Verlagsbuchhandlung München

Ein allgemeiner Entwicklungssatz für die Lösungen der Differentialgleichung $(1+\varepsilon z\bar{z})^2 w_{z\bar{z}} + \varepsilon n\,(n+1)w = 0$ in der Nähe isolierter Singularitäten

Von **Karl Wilhelm Bauer** und **Ernst Peschl** in Bonn

Vorgelegt von Herrn Robert Sauer am 8. Oktober 1965

Inhaltsübersicht

1. Einleitung

Die Differentialgleichung

$$(1) \quad (1+\varepsilon z\bar{z})^2 w_{z\bar{z}} + \varepsilon n(n+1)\, w = 0, \quad n \in \mathbf{N},^{1} \ \varepsilon = \pm 1,$$

steht in enger Beziehung zur Potentialgleichung und zur Wellengleichung für drei bzw. zwei Raumdimensionen. Man erhält sie durch Übergang zu räumlichen Polar- bzw. Hyperbelkoordinaten und anschließende Separation (vgl. [1] und [4]).

Nach einem in [1] entwickelten Verfahren lassen sich alle Lösungen der Differentialgleichung (1), die in einfach zusammenhängenden Gebieten[2] G der Riemannschen Zahlenkugel ($\varepsilon = +1$) bzw. des Einheitskreises ($\varepsilon = -1$) definiert sind, unter Verwendung von zwei in G holomorphen Funktionen und deren Ableitungen bis zur Ordnung n angeben. Der entsprechende Satz

---

[1] Mit $\mathbf{N}$ wird die Menge der natürlichen Zahlen bezeichnet.

[2] Im Falle $\varepsilon = +1$ bezeichnet G stets ein endliches Teilgebiet der Riemannschen Zahlenkugel E^*, wenn das Gegenteil nicht besonders betont wird.

lautet (vgl. [1], Satz 1 und 6), wenn man zur Vereinfachung der Schreibweise den folgenden linear homogenen Operator

$$\underset{z}{E}(g(z)) = (Eg)(z) = \sum_{\nu=0}^{n} A_\nu \bar{\tau}^{n-\nu} g^{(\nu)}(z), \; g(z) \text{ holomorph},$$

$$A_\nu = (-\varepsilon)^{n-\nu} \frac{(2n-\nu)!}{\nu!\,(n-\nu)!}, \qquad \tau = \frac{z}{1+\varepsilon z \bar{z}},$$

verwendet:

Satz I

a) Zu jeder in einem einfach zusammenhängenden Gebiet G definierten (komplexwertigen) Lösung der Differentialgleichung (1) gibt es in G holomorphe Funktionen $g(z)$ und $h(z)$, so daß

$$w = (Eg)(z) + \overline{(Eh)(z)}. \tag{2}$$

b) Andererseits stellt (2) für jedes Paar von in G holomorphen Funktionen $g(z)$ und $h(z)$ eine Lösung der Differentialgleichung (1) dar.

c) Bei vorgegebener Lösung $w = w(z, \bar{z})$ sind die Funktionen $g(z)$ und $h(z)$ bis auf ein Polynom $P(z)$ vom Grade $2n$ in z bestimmt. Das allgemeinste Paar $\tilde{g}(z)$ und $\tilde{h}(z)$ ergibt sich aus

$$\tilde{g}(z) = g(z) + P(z), \; \tilde{h}(z) = h(z) - (-\varepsilon)^n z^{2n} \overline{P\left(\frac{-\varepsilon}{\bar{z}}\right)}. \tag{3}$$

Benennt man die in [1], Satz 1 und 6, vorkommenden Funktionen $g(z)$, $h(\bar{z})$ in $g_1(z)$, $h_1(\bar{z})$ um, so besteht mit den hier verwendeten Funktionen der Zusammenhang

$$g(z) = g_1(z), \; h(z) = \overline{h_1(\bar{z})}.$$

Darüber hinaus wurde in [1] gezeigt, daß sich jede reellwertige Lösung von (1) mit Hilfe einer holomorphen Funktion $g(z)$ (und deren Ableitungen bis zur Ordnung n) allein darstellen läßt (vgl. [1], Satz 4 und 9). Hier gilt der

Satz II

a) Zu jeder in G definierten reellwertigen Lösung der Differentialgleichung (1) gibt es in G holomorphe Funktionen g(z), so daß

$$(4) \qquad w = (Eg)(z) + \overline{(Eg)(z)}\,.$$

b) Andererseits stellt (4) für jede in G holomorphe Funktion g(z) eine reellwertige Lösung der Differentialgleichung (1) dar.

Für die auf der ganzen Zahlenkugel ($\varepsilon = +1$) definierten reellwertigen Lösungen (vgl. [1], Satz 5) gilt außerdem der folgende

Satz III

Zu jeder auf der ganzen Riemannschen Zahlenkugel definierten reellwertigen Lösung der Differentialgleichung

$$(1 + z\bar{z})^2 w_{z\bar{z}} + n(n+1)\,w = 0, \quad n \in \mathbf{N},$$

gibt es $n+1$ komplexwertige[1] *Konstanten c_μ, $\mu = 0, 1, \ldots, n$, so daß*

$$(5) \qquad w = (Eg)(z) + \overline{(Eg)(z)} \quad \text{mit} \quad g(z) = \sum_{\mu=0}^{n} c_\mu z^\mu\,.$$

Andererseits stellt (5) bei beliebiger Wahl der Konstanten c_μ eine reellwertige Lösung der Differentialgleichung auf der ganzen Kugel dar.

Die in den Lösungen auftretenden Funktionen $g(z)$ und $h(z)$ werden als ein „Erzeugenden-Paar" oder als „Erzeugende" bezeichnet. Außerdem erweist es sich als zweckmäßig, die Lösungen der Differentialgleichung (1) in gewisse Klassen einzuteilen; und zwar verwenden wir die nachstehenden Bezeichnungen, wobei G jetzt nicht notwendig einfach zusammenhängend zu sein braucht:

1. $\mathfrak{F}^\varepsilon(G)$ sei die Menge aller in G definierten Lösungen w von (1),

---

[1] Der Operator E bewirkt, daß in die beliebige Lösung w $2n+1$ unabhängige reelle Parameter eingehen.

2. $\mathfrak{F}_h^\varepsilon(G)$ sei die Menge aller in G definierten Lösungen w von (1), die sich in der Umgebung jedes Punktes von G mit Hilfe einer einzigen dort holomorphen Funktion $g(z)$ erzeugen lassen:

$$w = (Eg)(z).$$[1]

3. $\mathfrak{F}_r^\varepsilon(G)$ sei die Menge aller reellwertigen Funktionen $w \in \mathfrak{F}^\varepsilon(G)$.

Dann gilt

$$\left.\begin{matrix} \mathfrak{F}_h^\varepsilon(G) \\ \mathfrak{F}_r^\varepsilon(G) \end{matrix}\right\} \subset \mathfrak{F}^\varepsilon(G).$$

Wir weisen besonders darauf hin, daß damit auch jede Funktion w deren Erzeugende $h(z)$ lediglich ein Polynom vom Grade $k \leq 2n$ ist, als eine Funktion der Klasse $\mathfrak{F}_h^\varepsilon(G)$ betrachtet werden kann. Nach Satz I, c kann jede solche Lösung, wenn man zur Erzeugenden $g(z)$ ein geeignetes Polynom vom Grade $2n$ hinzufügt, auch ohne Verwendung der Erzeugenden $h(z)$ dargestellt werden.

Ist eine in einem einfach zusammenhängenden Gebiet G definierte Lösung w von (1) vorgegeben, so lassen sich die $(2n+1)$ten Ableitungen der Erzeugenden $g(z)$ und $h(z)$ mit Hilfe des Operators

$$D_\varepsilon = (1 + \varepsilon z \bar{z})^2 \frac{\partial}{\partial z} \tag{6}$$

eindeutig bestimmen. Liegt eine Lösung w der Klasse $\mathfrak{F}_h^\varepsilon(G)$ vor, so läßt sich die Erzeugende $g(z)$ unmittelbar mit Hilfe des Operators D_ε bestimmen (vgl. [1], Beweis zu Satz 1 und 6). Hier gilt der

---

[1] In [2] wurde eine der Differentialgleichung (1) zugeordnete Funktionentheorie entwickelt. Dabei zeigt es sich, daß die in der Klasse $\mathfrak{F}_h^\varepsilon(G)$ zusammengefaßten Lösungen von (1) ein Analogon zu den in G holomorphen Funktionen der klassischen Funktionentheorie darstellen.

Satz IV

Ist eine in einem einfach zusammenhängenden Gebiet G definierte Lösung $w \in \mathfrak{F}^{\varepsilon}(G)$ vorgegeben, so sind die $(2n+1)$ten Ableitungen der Erzeugenden $g(z)$ und $h(z)$ eindeutig bestimmt und es gilt:

$$g^{(2n+1)}(z) = \frac{D_{\varepsilon}^{n+1} w}{(1+\varepsilon z\bar{z})^{2n+2}}, \tag{7}$$

$$h^{(2n+1)}(z) = \frac{D_{\varepsilon}^{n+1} \overline{w}}{(1+\varepsilon z\bar{z})^{2n+2}}. \tag{8}$$

Für die Lösungen $w \in \mathfrak{F}_{h}^{\varepsilon}(G)$ gilt darüber hinaus:

$$g(z) = \frac{(-\varepsilon)^n}{(2n)!} \overline{(D_{\varepsilon}^{n} \overline{w})}^{1}. \tag{9}$$

Corollar

Wegen der Gleichungen (7) und (8) sind die $(2n+1)$ten Ableitungen der Erzeugenden für eine in einem beliebigen (eventuell auch nicht einfach zusammenhängenden) Gebiet G definierte eindeutige Lösung w von (1) in jedem Punkt von G eindeutig bestimmt und stellen daher in G (global) eindeutige holomorphe Funktionen dar.

2. Komplexwertige Lösungen

Wir betrachten zunächst eine in einem Kreisring $R: 0 \leq \varrho_1 < |z-z_0| < \varrho_2$ definierte und dort eindeutige Lösung w der Differentialgleichung (1). Dann sind die $(2n+1)$ten Ableitungen der Erzeugenden eindeutige holomorphe Funktionen in R und lassen sich um den Punkt z_0 in Laurentreihen

$$g^{(2n+1)}(z) = \sum_{-\infty}^{+\infty} \tilde{a}_{\lambda}(z-z_0)^{\lambda}, \quad h^{(2n+1)}(z) = \sum_{-\infty}^{+\infty} \tilde{b}_{\lambda}(z-z_0)^{\lambda}$$

[1] Hieraus ergibt sich, daß die Lösungen $w \in \mathfrak{F}_{h}^{\varepsilon}(G)$ durch die Gleichung $D_{\varepsilon}^{n+1}\overline{w} = 0$ charakterisiert werden.

entwickeln. Durch unbestimmte Integration erhält man sodann unter Verwendung von

$$\int (z-z_0)^m \log(z-z_0)\,dz = \frac{(z-z_0)^{m+1}}{m+1}\log(z-z_0) - \frac{(z-z_0)^{m+1}}{(m+1)^2},$$

$$m = 0 \text{ bzw. } m \in \mathbf{N},$$

(10)

$$g(z) = \sum_{-\infty}^{+\infty} a_\lambda (z-z_0)^\lambda + S_1(z)\cdot\log(z-z_0) \text{ mit } S_1(z) = \sum_{\mu=0}^{2n} c_\mu z^\mu$$

und

(11)

$$h(z) = \sum_{-\infty}^{+\infty} b_\lambda (z-z_0)^\lambda + S_2(z)\cdot\log(z-z_0) \text{ mit } S_2(z) = \sum_{\mu=0}^{2n} d_\mu z^\mu.$$

Wir untersuchen nun, welchen Bedingungen die Polynome $S_1(z)$ und $S_2(z)$ genügen müssen, damit die durch (10) und (11) erzeugten Lösungen $w \in \mathfrak{F}^\varepsilon(G)$ in R eindeutig sind. Aus

$$\underset{z}{E}(S_j(z)\cdot\log(z-z_0)) = \log(z-z_0)\cdot(E\,S_j)(z) + \sum\nolimits_{(j)}$$

mit

$$\sum\nolimits_{(j)} = \sum_{\nu=1}^{n} A_\nu \bar{\tau}^{n-\nu} \sum_{\mu=1}^{\nu} \binom{\nu}{\mu} S_j^{(\nu-\mu)}(z) \frac{(\mu-1)!\,(-1)^{\mu-1}}{(z-z_0)^\mu}, \quad j = 1, 2,$$

folgt, wenn man noch

$$\log(z-z_0) = \log r + i\varphi$$

setzt,

(12)

$$w = \underset{z}{E}\left(\sum_{-\infty}^{+\infty} a_\lambda (z-z_0)^\lambda\right) + \overline{\underset{z}{E}\left(\sum_{-\infty}^{+\infty} b_\lambda (z-z_0)^\lambda\right)} + \sum\nolimits_{(1)} + \overline{\sum\nolimits_{(2)}}$$

$$+ \log r\left\{(E\,S_1)(z) + \overline{(E\,S_2)(z)}\right\} + i\varphi\left\{(E\,S_1)(z) - \overline{(E S_2)(z)}\right\}$$

und damit die Bedingung

$$(ES_1)(z) - \overline{(ES_2)(z)} = 0. \tag{13}$$

Die Funktion

$$\overline{w_1} = (ES_1)(z) - \overline{(ES_2)(z)} = (ES_1)(z) + \overline{(E(-S_2))(z)}$$

stellt jedoch eine Lösung der Klasse $\mathfrak{F}^\varepsilon(G)$ dar, die in der gesamten Kreisscheibe $K: |z-z_0| < \varrho_2$ definiert ist. Nach Satz I, c erhält man die gleiche Lösung, wenn man $S_1(z)$ durch

$$\tilde{S}_1(z) = S_1(z) + P(z)$$

und $-S_2(z)$ durch

$$\tilde{S}_2(z) = -S_2(z) - (-\varepsilon)^n z^{2n} \overline{P\left(\frac{-\varepsilon}{\bar{z}}\right)} \tag{14}$$

ersetzt. Wählt man nun

$$P(z) = -S_1(z), \tag{15}$$

so folgt

$$\tilde{S}_1(z) = 0 \text{ und } w_1 = (E\tilde{S}_2)(z) = 0.$$

Mit

$$w_1 = (E\tilde{S}_2)(z)$$

liegt aber eine Lösung der Klasse $\mathfrak{F}^\varepsilon_h(G)$ vor, deren Erzeugende nach Satz IV, Gleichung (9), eindeutig durch

$$\tilde{\tilde{S}}_2(z) = \frac{(-\varepsilon)^n}{(2n)!} \overline{(D^n_\varepsilon \overline{w_1})}$$

bestimmt ist. Also folgt

$$\tilde{S}_2(z) = 0$$

und unter Berücksichtigung von (14)

$$S_2(z) = (-\varepsilon)^n z^{2n} \overline{S_1\left(\frac{-\varepsilon}{\bar{z}}\right)}. \tag{16}$$

Setzt man nun $S_1(z) = S(z)$ und beachtet noch (12) und (13), so erhält man den folgenden

Satz 1

Jede im Kreisring $R: \varrho_1 < |z-z_0| < \varrho_2, \varrho_1 \geq 0$, *definierte und eindeutige Lösung der Differentialgleichung*

$$(1+\varepsilon z\bar{z})^2 w_{z\bar{z}} + \varepsilon n(n+1) w = 0, \; n \in \mathbf{N}, \; \varepsilon = \pm 1,$$

läßt sich in R *gemäß*

$$w = (Eg)(z) + \overline{(Eh)(z)}$$

mit den Erzeugenden

$$g(z) = g_1(z) + S(z) \cdot \log(z-z_0), \tag{17}$$

$$h(z) = h_1(z) + (-\varepsilon)^n z^{2n} \overline{S\left(\frac{-\varepsilon}{\bar{z}}\right)} \cdot \log(z-z_0) \tag{18}$$

darstellen, wobei $g_1(z)$ *und* $h_1(z)$ *in* R *holomorph und eindeutig sind und* $S(z)$ *ein beliebiges Polynom vom Grade* $2n$ *in* z *darstellt. Setzt man für* $g_1(z)$ *und* $h_1(z)$ *die entsprechenden Laurentreihen ein und beachtet den linear homogenen Charakter des Operators* E, *so ergibt sich hieraus eine allgemeine Darstellung der Form*

$$\begin{aligned} w = {} & \underset{z}{E}\left(\sum_{-\infty}^{+\infty} a_\lambda (z-z_0)^\lambda\right) + \overline{\underset{z}{E}\left(\sum_{-\infty}^{+\infty} b_\lambda (z-z_0)^\lambda\right)} \\ & + \sum_{\nu=1}^{n} A_\nu \bar{\tau}^{n-\nu} \sum_{\mu=1}^{\nu} \binom{\nu}{\mu} S^{(\nu-\mu)}(z) \frac{(\mu-1)!\,(-1)^{\mu-1}}{(z-z_0)^\mu} \\ & + \sum_{\nu=1}^{n} A_\nu \tau^{n-\nu} \sum_{\mu=1}^{\nu} \binom{\nu}{\mu} (-\varepsilon)^n \left(z^{2n} \overline{S\left(\frac{-\varepsilon}{\bar{z}}\right)}\right)^{(\nu-\mu)} \frac{(\mu-1)!\,(-1)^{\mu-1}}{(\bar{z}-\bar{z}_0)^\mu} \\ & + 2\log|z-z_0| \cdot (ES)(z). \end{aligned} \tag{19}$$

Dieser Satz enthält einige wichtige Spezialfälle. Mit

$$h^{(2n+1)}(z) \equiv 0$$

folgt sofort

$$S(z) \equiv 0.$$

Man erhält dieses Ergebnis auch unmittelbar, wenn man Satz IV, Gleichung (9), berücksichtigt. Damit gilt für die Lösungen der Differentialgleichung (1), die sich mit einer holomorphen Erzeugenden $g(z)$ allein darstellen lassen, der folgende

Satz 2

Jede im Kreisring $R: \varrho_1 < |z - z_0| < \varrho_2$, $\varrho_1 \geq 0$, *definierte und eindeutige Lösung* $w \in \mathfrak{F}_h^\varepsilon(R)$ *der Differentialgleichung*

$$(1 + \varepsilon z \bar{z})^2 w_{z\bar{z}} + \varepsilon n(n+1) w = 0, \quad n \in \mathbf{N}, \quad \varepsilon = \pm 1,$$

läßt sich mit einer in R holomorphen und eindeutigen Erzeugenden

$$g(z) = \sum_{-\infty}^{+\infty} a_\lambda (z - z_0)^\lambda$$

darstellen.

Insbesondere ergibt sich für den Fall, daß der Kreisring in eine punktierte Kreisscheibe entartet, der folgende wichtige Darstellungssatz:

Satz 3

Eine komplexwertige Lösung w von (1) habe in $z = z_0$ *eine isolierte Singularität, d. h. die komplexwertige Funktion w sei in einer punktierten Umgebung* $K: 0 < |z - z_0| < \varrho$ *als eindeutige Funktion definiert und dort Lösung der Differentialgleichung*

$$(1 + \varepsilon z \bar{z})^2 w_{z\bar{z}} + \varepsilon n(n+1) w = 0, \quad n \in \mathbf{N}, \quad \varepsilon = \pm 1.$$

Dann läßt sich w in K gemäß

$$w = (Eg)(z) + \overline{(Eh)(z)}$$

darstellen, wobei die Erzeugenden g(z) und h(z) den in Satz 1 genannten Bedingungen genügen.

Im Falle der in der punktierten Umgebung $\dot{U}_\varrho(z_0) = \{z \mid |z - z_0| < \varrho\}$ von z_0 eindeutigen Lösung $w \in \mathfrak{F}_h^\varepsilon(\dot{U}_\varrho(z_0))$ ist damit die Möglichkeit einer Klassifizierung der isolierten Singularitäten wie in der klassischen Funktionentheorie gegeben (vgl. [2]).

Darüber hinaus lassen sich über die Gestalt der in einer Umgebung $\dot{U}_\varrho(z_0)$ definierten und eindeutigen Lösungen der Klasse $\mathfrak{F}^\varepsilon$, deren Erzeugende (17) und (18) logarithmische Glieder enthalten können, noch weitere Aussagen herleiten.

Jede in $\dot{U}_\varrho(z_0)$[1] definierte und eindeutige Lösung $w \in \mathfrak{F}^\varepsilon(\dot{U}_\varrho(z_0))$ bzw. $\mathfrak{F}_r^\varepsilon(\dot{U}_\varrho(z_0))$ läßt sich nach Satz 3 in der Form

$$w = \varphi_1(z, \bar{z}) \cdot \log|z - z_0| + \varphi_2(z, \bar{z}) \tag{20}$$

mit

$$\varphi_1(z, \bar{z}) = \sum_{-\infty}^{\infty} \sum_{-\infty}^{\infty} C^{(1)}_{\lambda_1 \lambda_2} (z - z_0)^{\lambda_1} (\bar{z} - \bar{z}_0)^{\lambda_2}, \tag{21}$$

$$\varphi_2(z, \bar{z}) = \sum_{-\infty}^{\infty} \sum_{-\infty}^{\infty} C^{(2)}_{\lambda_1 \lambda_2} (z - z_0)^{\lambda_1} (\bar{z} - \bar{z}_0)^{\lambda_2} \tag{22}$$

darstellen. Wir sagen im Hinblick auf diese Gestalt der Entwicklung (20), die in $0 < |z - z_0| < \varrho$ definierte und eindeutige Lösung w habe in $z = z_0$ eine isolierte Singularität *mit logarithmischem Hauptglied der asymptotischen Entwicklung*, wenn

(1) die Summen (21) und (22) nach links abbrechen, d. h. wenn in ihnen $\lambda_1, \lambda_2 \geq -m$ mit einer geeigneten natürlichen Zahl m gilt, und

(2) die Funktionen $\varphi_1(z, \bar{z})$ und $\varphi_2(z, \bar{z})$ in $\dot{U}_\varrho(z_0)$ beschränkt sind.

Die in dieser Weise definierten Funktionen fassen wir in der Klasse

$$\overset{*}{\mathfrak{F}}{}^\varepsilon(\dot{U}_\varrho(z_0)) \quad \text{bzw.} \quad \overset{*}{\mathfrak{F}}{}_r^\varepsilon\, \varepsilon(\dot{U}_\varrho(z_0))$$

zusammen und leiten zunächst einige Aussagen über die Koeffizienten der zugehörigen Entwicklungen (21) und (22) her.

Im Falle (22) gilt gemäß (19)

$$\varphi_1(z, \bar{z}) = 2(E\,S)(z),$$

[1] Mit z_0 wird im folgenden eine feste endliche Zahl bezeichnet. Der Fall, daß eine Singularität in $z = \infty$ ($\varepsilon = +1$) auftritt, kann durch Anwendung der Transformation $z = \zeta^{-1}$ stets auf den Fall $\zeta = 0$ zurückgeführt werden.

d. h. $\varphi_1(z, \bar{z})$ läßt sich in jedem Fall in eine Potenzreihe

$$\varphi_1(z, \bar{z}) = \sum_{\lambda_1, \lambda_2 \geq 0} C^{(1)}_{\lambda_1 \lambda_2} (z - z_0)^{\lambda_1} (\bar{z} - \bar{z}_0)^{\lambda_2}$$

entwickeln.

Wir nehmen nun an, es liege eine Lösung w der Klasse $\mathfrak{F}^{\varepsilon}(\dot{U}_{\varrho}(0))$ vor. Dann sind die Erzeugenden

$$g(z) = g_1(z) + S(z) \cdot \log z$$

$$h(z) = h_1(z) + (-\varepsilon)^n z^{2n} \overline{S\left(\frac{-\varepsilon}{\bar{z}}\right)} \cdot \log z$$

bis auf ein Polynom vom Grade $2n$ in z bestimmt. Bei vorgegebener Lösung w sind also die Hauptteile der Laurentreihen

$$g_1(z) = \sum_{-\infty}^{\infty} a_\lambda z^\lambda, \tag{23}$$

$$h_1(z) = \sum_{-\infty}^{\infty} b_\lambda z^\lambda \tag{24}$$

eindeutig bestimmt. Entwickelt man

$$\bar{\tau} = \frac{\bar{z}}{1 + \varepsilon z \bar{z}}$$

an der Stelle $z_0 = 0$, so erhält man

$$\bar{\tau} = \sum_{\lambda=0}^{\infty} \bar{z}(-\varepsilon z \bar{z})^\lambda. \tag{25}$$

Setzt man (25) in die Darstellung

$$w_1 = (E g_1)(z) \tag{26}$$

ein, so ergibt sich eine Entwicklung der Form

$$w_1 = \sum_{\substack{-\infty < \mu_1 < \infty \\ \mu_2 \geq 0}} \alpha_{\mu_1 \mu_2} z^{\mu_1} \bar{z}^{\mu_2}. \tag{27}$$

Da das von $\bar{\tau}$ freie Glied in (26) die Gestalt

$$g_1^{(n)}(z) = \sum_{-\infty}^{\infty} a_\lambda \lambda(\lambda - 1) \ldots (\lambda - n + 1) z^{\lambda - n}$$

hat, folgt für die Koeffizienten $\alpha_{\mu_1,0}$ in (27) nunmehr unter Berücksichtigung von (25)

$$(28) \qquad \alpha_{\mu_1,0} = a_{\mu_1+n}(\mu_1+n)(\mu_1+n-1)\ldots(\mu_1+1).$$

Entsprechend erhält man unter Verwendung von (24) für die Koeffizienten β_{0,μ_2} in

$$(29) \qquad w_2 = \overline{(E\,h_1)(z)} = \sum_{\substack{\mu_1 \geq 0 \\ -\infty < \mu_2 < \infty}} \beta_{\mu_1\mu_2}\, z^{\mu_1}\bar{z}^{\mu_2}$$

die Bedingung

$$(30) \qquad \beta_{0,\mu_2} = \overline{b_{\mu_2+n}}(\mu_2+n)(\mu_2+n-1)\ldots(\mu_2+1).$$

Betrachtet man nun die Darstellung

$$(31) \qquad w = (E\,g)(z) + \overline{(E\,h)(z)} = \sum_{-\infty}^{\infty}\sum_{-\infty}^{\infty} \gamma_{\mu_1\mu_2}\, z^{\mu_1}\bar{z}^{\mu_2} + \\ + (E\,S)(z)\cdot\log(z\bar{z}),$$

so gilt unter Verwendung von (28) und (30), falls $g_1(z)$ in $z_0 = 0$ wesentlich singulär,

$$\gamma_{\mu_1,0} \neq 0 \text{ für unendlich viele } \mu_1 < 0.$$

Hat $g_1(z)$ in $z_0 = 0$ eine Polstelle, so gilt $\gamma_{\mu_1,0} \neq 0$ nur für endlich viele $\mu_1 < 0$. Entsprechend gilt

$$\gamma_{0,\mu_2} \neq 0$$

für unendlich viele bzw. endlich viele $\mu_2 < 0$, falls $h_1(z)$ in $z_0 = 0$ wesentlich singulär ist bzw. eine Polstelle besitzt.

Da die Hauptteile der Laurentreihen $g_1(z)$ und $h_1(z)$ jedoch bei Vorgabe von w eindeutig bestimmt sind, so gilt umgekehrt, daß $g_1(z)$ und $h_1(z)$ wesentlich singulär sind in $z_0 = 0$ oder dort eine Polstelle besitzen, falls in (31)

$$\gamma_{\mu_1,0} \neq 0$$

für unendlich viele oder endlich viele $\mu_1 < 0$ bzw.

$$\gamma_{0,\mu_2} \neq 0$$

für unendlich viele oder endlich viele $\mu_2 < 0$. Darüber hinaus gilt in (31), wenn man (27), (29) und (19) berücksichtigt, daß

$$\mu_1, \mu_2 \text{ nicht beide } < 0.$$

Wir bringen letzteres durch die Schreibweise

$$w = (E\,g)(z) + \overline{(E\,h)(z)} = \sum_{*} \gamma_{\mu_1\mu_2}\, z^{\mu_1} \bar{z}^{\mu_2} + (E\,S)(z) \cdot \log(z\bar{z})$$

zum Ausdruck. Darüber hinaus folgt, daß bei festem $\mu_2 (> 0)$

$$\gamma_{\mu_1\mu_2} \neq 0 \text{ nur für jeweils endlich viele } \mu_1 < 0$$

gilt, falls

$$\gamma_{\mu_1,0} \neq 0 \text{ nur für endlich viele } \mu_1 < 0 \text{ ist.}$$

Eine entsprechende Aussage gilt, falls $\mu_2 < 0$ und $\mu_1 (> 0)$ fest.

Wir untersuchen nun den Fall, daß die isolierte Singularität in einem beliebigen Punkte z_0 liegt. Berücksichtigt man hier, daß die Differentialgleichung (1) invariant ist gegenüber Kugeldrehungen $(\varepsilon = +1)$ bzw. Automorphismen des Einheitskreises $(\varepsilon = -1)$, so erhält man ausgehend von den Lösungen

$$\hat{w}(\zeta, \bar{\zeta}) = (E\hat{g})(\zeta) + \overline{(E\hat{h})(\zeta)} \in \mathfrak{F}^{\varepsilon}(\dot{U}_{\varrho}(0))$$

die Lösungen

$$w(z, \bar{z}) = (E\,g)(z) + \overline{(E\,h)(z)} \in \mathfrak{F}^{\varepsilon}(\dot{U}_{\varrho}(z_0))$$

gemäß

$$w(z, \bar{z}) = \left[\hat{w}(\zeta, \bar{\zeta})\right]_{\zeta = \frac{\eta(z - z_0)}{1 + \varepsilon \bar{z}_0 z}}, \quad |\eta| = 1\,.$$

Zur Bestimmung der neuen Erzeugenden $g(z)$ und $h(z)$ bei Vorgabe von $\hat{g}(\zeta)$ und $\hat{h}(\zeta)$ greifen wir zunächst den Fall

(32) $$\hat{w}_1(\zeta, \bar{\zeta}) = (E\hat{g})(\zeta),$$

(33) $$w_1(z, \bar{z}) = \left[\hat{w}_1(\zeta, \bar{\zeta})\right]_{\zeta = \frac{\eta(z - z_0)}{1 + \varepsilon \bar{z}_0 z}} = (Eg)(z)$$

heraus. Hier treten die Erzeugenden $\hat{g}(\zeta)$ bzw. $g(z)$ zusammen mit A_0 als Faktor von

$$\left(\frac{\bar{\zeta}}{1 + \varepsilon\zeta\bar{\zeta}}\right)^n \quad \text{bzw.} \quad \left(\frac{\bar{z}}{1 + \varepsilon z \bar{z}}\right)^n$$

auf. Berücksichtigt man noch

$$\left[\frac{\bar{\zeta}}{1 + \varepsilon\zeta\bar{\zeta}}\right]_{\zeta = \frac{\eta(z - z_0)}{1 + \varepsilon \bar{z}_0 z}} = \frac{\bar{\eta}(1 + \varepsilon \bar{z}_0 z)}{1 + \varepsilon z_0 \bar{z}_0} \left\{\frac{\bar{z}(1 + \varepsilon \bar{z}_0 z)}{1 + \varepsilon z \bar{z}} - \bar{z}_0\right\},$$

so folgt

(34) $$g(z) = [\hat{g}(\zeta)]_{\zeta = \frac{\eta(z - z_0)}{1 + \varepsilon \bar{z}_0 z}} \left(\frac{\bar{\eta}}{1 + \varepsilon z_0 \bar{z}_0}\right)^n (1 + \varepsilon \bar{z}_0 z)^{2n}.$$

Im Falle

(35) $$\hat{w}_2(\zeta, \bar{\zeta}) = \overline{(E\hat{h})(\zeta)},$$

(36) $$w_2(z, \bar{z}) = \left[\hat{w}_2(\zeta, \bar{\zeta})\right]_{\zeta = \frac{\eta(z - z_0)}{1 + \varepsilon \bar{z}_0 z}} = \overline{(Eh)(z)}$$

folgt entsprechend

(37) $$h(z) = \left[\hat{h}(\zeta)\right]_{\zeta = \frac{\eta(z - z_0)}{1 + \varepsilon \bar{z}_0 z}} \left(\frac{\bar{\eta}}{1 + \varepsilon z_0 \bar{z}_0}\right)^n (1 + \varepsilon \bar{z}_0 z)^{2n}.$$

Analoge Überlegungen gelten für den Fall, daß die Singularität im Punkte ∞ liegt. Unter Benutzung der Isometrie $\zeta = \frac{1}{z}$ führen sie zu den Transformationsformeln

(34a) $$g(z) = [\hat{g}(\zeta)]_{\zeta = \frac{1}{z}} (-1)^n z^{2n},$$

(37a) $$h(z) = \left[\hat{h}(\zeta)\right]_{\zeta = \frac{1}{z}} (-1)^n z^{2n}.$$

Wir gehen nun von dem in (31) gewonnenen Ergebnis aus, d. h. wir nehmen an, $w(\zeta, \bar{\zeta})$ habe eine isolierte Singularität in $\zeta = 0$, dann gilt

$$\hat{w}(\zeta,\bar{\zeta}) = (E\hat{g})(\zeta) + \overline{(E\hat{h})(\zeta)}$$
$$= \sum_{*} \gamma_{\mu_1\mu_2}\zeta^{\mu_1}\bar{\zeta}^{\mu_2} + (E\hat{S})(\zeta)\cdot\log(\zeta,\bar{\zeta})$$

mit

$$\hat{\bar{g}}(\zeta) = \hat{\bar{g}}_1(\zeta) + \hat{S}(\zeta)\cdot\log\zeta, \tag{38}$$

$$\hat{h}(\zeta) = \hat{h}_1(\zeta) + (-\varepsilon)^n\zeta^{2n}\,\overline{\hat{S}\left(\frac{-\varepsilon}{\bar{\zeta}}\right)}\log\zeta. \tag{39}$$

Wir transformieren nun die isolierte Singularität vermöge

$$\zeta = \frac{\eta(z-z_0)}{1+\varepsilon\bar{z}_0 z} \tag{40}$$

in den Punkt z_0. Dann erhält man die neuen Erzeugenden

$$g(z) = g_1(z) + S(z)\log(z-z_0)$$

$$h(z) = h_1(z) + (-\varepsilon)^n z^{2n}\,\overline{S\left(\frac{-\varepsilon}{\bar{z}}\right)}\log(z-z_0)$$

gemäß (34) und (37), und es gilt: Falls $\hat{g}_1(\zeta)$ bzw. $\hat{h}_1(\zeta)$ eine wesentliche Singularität oder eine Polstelle in $\zeta = 0$ besitzen, so ist dies auch für die neuen Laurentreihen $g_1(z)$ und $h_1(z)$ in $z = z_0$ der Fall und umgekehrt. Betrachtet man andererseits die Lösungen (32) und (33), so gilt wegen

$$\left[\frac{\bar{\zeta}}{1+\varepsilon\zeta\bar{\zeta}}\right]_{\zeta=\frac{\eta(z-z_0)}{1+\varepsilon\bar{z}_0 z}} = \frac{\bar{\eta}}{1+\varepsilon z_0\bar{z}_0}\,\frac{1+\varepsilon\bar{z}_0 z}{1+\varepsilon z\bar{z}}(\bar{z}-\bar{z}_0),$$

daß alle Summanden von (32), die einen Faktor

$$\left(\frac{\bar{\zeta}}{1+\varepsilon\zeta\bar{\zeta}}\right)^{n-\nu}, \quad n-\nu > 0,$$

aufweisen, nach der Transformation (40) einen Faktor

$$(\bar{z}-\bar{z}_0)^{\sigma}, \quad \sigma \in \mathbf{N},$$

besitzen. Lediglich die Größe

$$(41) \qquad A_n \hat{g}^{(n)}(\zeta)$$

geht durch (40) in einen von $(\bar{z}-\bar{z}_0)$ freien Summanden über. Entsprechend liefert im Falle der Lösungen (35) und (36) lediglich die Größe

$$(42) \qquad \overline{A_n \hat{h}^{(n)}(\zeta)}$$

einen von $(z-z_0)$ freien Summanden von (36).

Berücksichtigt man noch, daß mit $\hat{g}_1(\zeta)$ bzw. $\hat{h}_1(\zeta)$ (vgl. (38) und (39)) auch $\hat{g}_1^{(n)}(\zeta)$ bzw. $\hat{h}_1^{(n)}(\zeta)$ in $\zeta = 0$ wesentlich singulär sind, so liefern die Größen (41) und (42) nach Anwendung von (40) eine in $z = z_0$ wesentlich singuläre in $\dot{U}(z_0)$ holomorphe bzw. antiholomorphe Funktion. Damit gilt der folgende

Satz 4

Jede in $0 < |z-z_0| < \varrho$ *definierte und eindeutige Lösung* $w \in \mathfrak{F}^{\varepsilon}(\dot{U}_{\varrho}(z_0))$ *der Differentialgleichung*

$$(1+\varepsilon z\bar{z})^2 w_{z\bar{z}} + \varepsilon n(n+1) w = 0, \quad n \in \mathbf{N}, \quad \varepsilon = \pm 1,$$

hat die Form

$$(43) \quad w = (Eg)(z) + \overline{(Eh)(z)} = \sum_{*} \gamma_{\mu_1 \mu_2} (z-z_0)^{\mu_1} (\bar{z}-\bar{z}_0)^{\mu_2} + \\ + 2(ES)(z) \log|z-z_0|.$$

Dabei stellt $S(z)$ *ein Polynom vom Grade* $2n$ *in* z *dar.*

Falls $\gamma_{\mu_1, 0} \neq 0$ *für unendlich viele* $\mu_1 < 0$, *so ist die Laurentreihe* $g_1(z)$ *in*

$$(44) \qquad g(z) = g_1(z) + S(z) \cdot \log(z-z_0)$$

wesentlich singulär in $z = z_0$.

Falls $\gamma_{0, \mu_2} \neq 0$ *für unendlich viele* $\mu_2 < 0$, *so ist die Laurentreihe* $h_1(z)$ *in*

(45) $$h(z) = h_1(z) + (-\varepsilon)^n z^{2n} S\left(\overline{\frac{-\varepsilon}{\bar{z}}}\right) \cdot \log(z - z_0)$$

wesentlich singulär in $z = z_0$.

Falls

$$\sum \gamma_{\mu_1, 0} (z - z_0)^{\mu_1}$$

polartig in $z = z_0$, *so enthalten die Teilsummen*

$$p_{\mu_2} = \sum_{\mu_1 < 0} \gamma_{\mu_1 \mu_2} (z - z_0)^{\mu_1} (\bar{z} - \bar{z}_0)^{\mu_2}, \quad \mu_2 > 0 \text{ und fest,}$$

von (43) jeweils nur endlich viele Glieder.

Falls

$$\sum \gamma_{0, \mu_2} (\bar{z} - \bar{z}_0)^{\mu_2}$$

polartig in $z = z_0$, *so enthalten auch die Teilsummen*

$$q_{\mu_1} = \sum_{\mu_2 < 0} \gamma_{\mu_1 \mu_2} (z - z_0)^{\mu_1} (\bar{z} - \bar{z}_0)^{\mu_2}, \quad \mu_1 > 0 \text{ und fest,}$$

von (43) jeweils nur endlich viele Glieder.

Unter Verwendung von Satz 4 folgt damit, daß alle Lösungen

$$w \in \overset{*}{\mathfrak{F}}{}^{\varepsilon}(\dot{U}_{\varrho}(z_0))$$

Erzeugende besitzen, bei denen die auftretenden Laurentreihen $g_1(z)$ und $h_1(z)$ in $z = z_0$ höchstens eine Polstelle aufweisen. Damit gilt zunächst (vergl. (7) und (8))

(46) $$g^{(2n+1)}(z) = \sum_{\lambda = -k_1}^{\infty} \tilde{a}_{\lambda} (z - z_0)^{\lambda},$$

(47) $$h^{(2n+1)}(z) = \sum_{\lambda = -k_2}^{\infty} \tilde{b}_{\lambda} (z - z_0)^{\lambda}$$

mit $k_1, k_2 \in \mathbf{N}$.

Falls $k_1 > 2n + 1$ bzw. $k_2 > 2n + 1$ ist, haben die Funktionen

$$g_1(z) = \sum_{\mu = -m_1}^{\infty} a_{\mu} (z - z_0)^{\mu}$$

bzw.

$$h_1(z) = \sum_{\mu=-m_2}^{\infty} b_\mu (z-z_0)^\mu$$

in $z = z_0$ einen Pol der Ordnung m_1 bzw. m_2, und es gilt

$$k_1 = m_1 + 2n + 1, \quad k_2 = m_2 + 2n + 1. \tag{48}$$

Im Falle $k_1 \leqq 2n + 1$ bzw. $k_2 \leqq 2n + 1$ sind $g_1(z)$ bzw. $h_1(z)$ holomorph in z_0. Wenn die Funktionen $g_1(z)$ bzw. $h_1(z)$ in $z = z_0$ Polstellen der Ordnung m_1 bzw. m_2 besitzen, so treten in

$$(E g_1)(z) \text{ bzw. } \overline{(E h_1)(z)}$$

Potenzen

$$(z - z_0)^{\delta_1} \text{ bzw. } (\bar{z} - \bar{z}_0)^{\delta_2}$$

mit

$$-(m_1 + n) \leqq \delta_1 < (-n) \text{ bzw. } -(m_2 + n) \leqq \delta_2 < (-n)$$

auf. Unter Berücksichtigung von (19) müßte also für eine Lösung $w \in \overset{*}{\mathfrak{F}}^s(\dot{U}_\varrho(z_0))$ im Falle $\max(k_1, k_2) > 2n + 1$

$$m_1 = m_2$$

gelten. Betrachtet man außerdem in

$$(E g_1)(z) + \overline{(E h_1)(z)}$$

die Glieder mit $(z - z_0)^{-m_1-n}$ und $(\bar{z} - \bar{z}_0)^{-m_1-n}$, so folgt aus der Forderung

$$\frac{a_{-m_1}}{(z - z_0)^{m_1+n}} + \frac{\overline{b_{-m_1}}}{(\bar{z} - \bar{z}_0)^{m_1+n}} = 0,$$

wenn man noch

$$z - z_0 = \varrho e^{i\vartheta}$$

verwendet,

$$a_{-m_1} e^{-i\vartheta(m_1+n)} + \overline{b_{-m_1}} e^{i\vartheta(m_1+n)} = 0$$

für alle $0 \leqq \vartheta \leqq 2\pi$ und deshalb

$$a_{-m_1} = b_{-m_1} = 0.$$

Damit reduzieren sich die Laurentreihen $g_1(z)$ und $h_1(z)$ auf Potenzreihen und für die Entwicklungen (46) und (47) gilt

$$(49)\quad g^{(2n+1)}(z) = \sum_{\lambda=-2n-1}^{\infty} \tilde{a}_\lambda (z-z_0)^\lambda = \underset{z_0}{T}\{g(z)\} + \sum_{\lambda=0}^{\infty} \tilde{a}_\lambda (z-z_0)^\lambda$$

und

$$(50)\quad h^{(2n+1)}(z) = \sum_{\lambda=-2n-1}^{\infty} \tilde{b}_\lambda (z-z_0)^\lambda = \underset{z_0}{T}\{h(z)\} + \sum_{\lambda=0}^{\infty} \tilde{b}_\lambda (z-z_0)^\lambda.$$

Soll nun eine Lösung der Klasse $\overset{*}{\mathfrak{F}}^\varepsilon(\dot{U}_\varrho(z_0))$ vorliegen, so dürfen die Spezialteile

$$(51)\qquad \underset{z_0}{T}\{g(z)\} = \sum_{\lambda=-2n-1}^{-1} \tilde{a}_\lambda (z-z_0)^\lambda$$

und

$$(52)\qquad \underset{z_0}{T}\{h(z)\} = \sum_{\lambda=-2n-1}^{-1} \tilde{b}_\lambda (z-z_0)^\lambda$$

nicht identisch verschwinden. Generell bestehen bei eindeutigen Lösungen $w \in \overset{*}{\mathfrak{F}}^\varepsilon(\dot{U}_\varrho(z_0))$ zwischen den Koeffizienten $\tilde{c}_\mu$ des Polynoms

$$S(z) = \sum_{\mu=0}^{2n} c_\mu z^\mu = \sum_{\mu=0}^{2n} \tilde{c}_\mu (z-z_0)^\mu$$

und den Koeffizienten $\tilde{a}_\lambda$ des Spezialteils $\underset{z_0}{T}\{g(z)\}$ notwendig die Beziehungen

$$(53)\qquad \overline{\tilde{c}}_\mu = \frac{(-1)^\mu \tilde{a}_{-(2n+1-\mu)}}{\mu!\,(2n-\mu)!},\quad 0 \leq \mu \leq 2n.$$

(Es gelten weitere Koeffizientenrelationen, die sich im Falle $z_0 = 0$ in der folgenden einfachen Form schreiben lassen:

$$(54)\qquad \tilde{b}_{-(\mu+1)} = (-\varepsilon)^{n+\mu}\, \overline{\tilde{a}_{-(2n+1-\mu)}},\quad 0 \leqq \mu \leqq 2n).$$

Für die Lösungen $w \in \overset{*}{\mathfrak{F}}{}^{\varepsilon}(\dot{U}_{\varrho}(z_0))$ folgen jedoch darüber hinaus aus der Forderung, daß das logarithmische Glied das Hauptglied der asymptotischen Entwicklung darstellen soll, weitere Bedingungen für die Koeffizienten $\tilde{a}_{\lambda}$, $\tilde{b}_{\lambda}$ der Spezialteile $\underset{z_0}{T}\{g(z)\}$ und $\underset{z_0}{T}\{h(z)\}$.

Dazu betrachten wir zunächst wiederum eine Lösung $\hat{w}(\zeta, \bar{\zeta})$ mit einer isolierten Singularität in $\zeta = 0$ und verwenden

$$S(\zeta) = \sum_{\lambda=0}^{2n} c_{\lambda} \zeta^{\mu}, \quad \tau = \frac{\zeta}{1 + \varepsilon \zeta \bar{\zeta}}.$$

In diesem Fall dürfen in den Summanden

$$(55) \qquad \sum\nolimits_{(1)} = \sum_{\nu=1}^{n} A_{\nu} \bar{\tau}^{n-\nu} \sum_{\mu=1}^{\nu} \binom{\nu}{\mu} S^{(\nu-\mu)}(\zeta) \frac{(\mu-1)!\,(-1)^{\mu-1}}{\zeta^{\mu}}$$

und

$$(56) \qquad \overline{\sum\nolimits_{(2)}} = \sum_{\nu=1}^{n} A_{\nu} \tau^{n-\nu} \sum_{\mu=1}^{\nu} \binom{\nu}{\mu} (-\varepsilon)^{n} \overline{\left(\zeta^{2n}\, \overline{S\left(\frac{-\varepsilon}{\bar{\zeta}}\right)}\right)^{(\nu-\mu)}} \frac{(\mu-1)!\,(-1)^{\mu-1}}{\bar{\zeta}^{\mu}}$$

der Darstellung (19) keine Potenzen von ζ bzw. $\bar{\zeta}$ mit negativem Exponenten auftreten. Diese Forderung liefert im Falle $\sum_{(1)}$

$$c_{\lambda} = 0 \quad \text{für} \quad 0 \leq \lambda < n$$

und im Falle $\overline{\sum_{(2)}}$

$$c_{\lambda} = 0 \quad \text{für} \quad n < \lambda \leq 2n.$$

Damit reduziert sich das Polynom $S(\zeta)$ auf

$$S(\zeta) = c_n \zeta^n, \quad c_n \text{ bel. } (\neq 0).$$

Um eine entsprechende Aussage für eine isolierte Singularität in z_0 (bel.) zu gewinnen, unterwerfen wir die Lösung

$$\hat{w}(\zeta, \bar{\zeta}) = (E\hat{g})(\zeta) + \overline{(E\hat{h})(\zeta)}$$

mit

$$\hat{g}(\zeta) = \hat{g}_1(\zeta) + c_n \zeta^n \log \zeta,$$

$$\hat{h}(\zeta) = \hat{h}_1(\zeta) + \bar{c}_n \zeta^n \log \zeta$$

(wobei $\hat{g}_1(\zeta)$ und $\hat{h}_1(\zeta)$ Potenzreihen darstellen) der Transformation (40) und erhalten

$$w(z, \bar{z}) = (Eg)(z) + \overline{(Eh)(z)}$$

mit den Erzeugenden

$$g(z) = g_1(z) + S_1(z) \cdot \log(z - z_0),$$

$$h(z) = h_1(z) + (-\varepsilon)^n z^{2n} \overline{S_1\left(\frac{-\varepsilon}{\bar{z}}\right)} \cdot \log(z - z_0).$$

Hier stellen $g_1(z)$ und $h_1(z)$ wiederum Potenzreihen dar, während das Polynom $S_1(z)$ die Gestalt

$$(57)\quad \begin{aligned} S_1(z) &= c_n \left(\frac{(z-z_0)(1+\varepsilon \bar{z}_0 z)}{1+\varepsilon z_0 \bar{z}_0}\right)^n \\ &= c_n \sum_{\varrho=0}^{n} \binom{n}{\varrho} \left(\frac{\varepsilon \bar{z}_0}{1+\varepsilon z_0 \bar{z}_0}\right)^{\varrho} (z-z_0)^{n+\varrho}, \quad c_n \text{ bel. } (\neq 0), \end{aligned}$$

hat. Liegt die Singularität im Punkte ∞, so setzt man zunächst im obigen Ergebnis $z_0 = 0$ und transformiere dann mittels $z = \frac{1}{\zeta}$. Die neuen Erzeugenden erhält man unter Verwendung der Formeln (34a) und (37a). Damit gilt der folgende

Satz 5

Jede in $0 < |z - z_0| < \varrho$ definierte und eindeutige Lösung $w \in \overset{*}{\mathfrak{F}}{}^{\varepsilon}(\dot{U}_{\varrho}(z_0))$ der Differentialgleichung

$$(1 + \varepsilon z \bar{z})^2 w_{z\bar{z}} + \varepsilon n(n+1) w = 0, \quad n \in \mathbf{N}, \quad \varepsilon = \pm 1,$$

läßt sich in $\dot{U}_{\varrho}(z_0)$ gemäß

$$w = (Eg)(z) + \overline{(Eh)(z)}$$

mit den Erzeugenden

$$g(z) = g_1(z) + S(z) \cdot \log(z - z_0),$$

$$h(z) = h_1(z) + (-\varepsilon)^n z^{2n} \overline{S\left(\frac{-\varepsilon}{\bar{z}}\right)} \cdot \log(z - z_0)$$

darstellen. Dabei gilt

$$S(z) = C \sum_{\varrho=0}^{n} \binom{n}{\varrho} \left(\frac{\varepsilon \bar{z}_0}{1+\varepsilon z_0 \bar{z}_0}\right)^{\varrho} (z-z_0)^{n+\varrho}, \quad C \text{ komplex } (\neq 0),$$

während es sich bei $g_1(z)$ und $h_1(z)$ um in $z = z_0$ holomorphe Funktionen handelt.

Liegt eine Lösung $w \in \overset{*}{\mathfrak{F}}{}^{+1}(\dot{U}_{\varrho}(\infty))$ vor, so haben die Erzeugenden die Gestalt

$$g(z) = \sum_{-\infty}^{2n} a_{\mu} z^{\mu} + C z^{n} \log z,$$

$$h(z) = \sum_{-\infty}^{2n} b_{\mu} z^{\mu} + \bar{C} z^{n} \log z, \quad C \text{ komplex } (\neq 0).$$

Für eine Lösung $w \in \overset{*}{\mathfrak{F}}{}^{\varepsilon}(\dot{U}_{\varrho}(z_0))$ gilt außerdem für die Koeffizienten $\tilde{a}_{\lambda}$ des Spezialteils (51) unter Berücksichtigung von (53)

(58) $$\tilde{a}_{\lambda} = 0 \text{ für } -(n+1) > \lambda \geq -(2n+1),$$

(59)
$$\tilde{a}_{\lambda} = C \binom{n}{n+1+\lambda} (2n+1+\lambda)!\,(-\lambda-1)!\,(-1)^{\lambda+1} \left(\frac{\varepsilon \bar{z}_0}{1+\varepsilon z_0 \bar{z}_0}\right)^{n+1+\lambda},$$
$$C \text{ bel. } (\neq 0), \text{ für } -1 \geq \lambda \geq -(n+1).$$

Für die Koeffizienten $\tilde{b}_{\lambda}$ von (52) gilt wegen

$$(-\varepsilon)^{n} z^{2n} \overline{S\left(\frac{-\varepsilon}{\bar{z}}\right)} = \frac{\bar{C}}{C} S(z)$$

die Beziehung

(60) $$\tilde{b}_{\lambda} = \frac{\bar{C}}{C} \tilde{a}_{\lambda}, \quad -1 \geq \lambda \geq -(2n+1).$$

Ist also eine eindeutige Lösung

(61) $$w = (E g)(z) + \overline{(E h)(z)} \in \overset{*}{\mathfrak{F}}{}^{\varepsilon}(\dot{U}_{\varrho}(z_0))$$

mit einer isolierten Singularität in $z = z_0$ vorgegeben, so erhält man unter Verwendung von (7) und (8) die $(2n+1)$ten Ableitungen der Erzeugenden in der Form

$$(62)\qquad g^{(2n+1)}(z) = \sum_{\lambda=-k_1}^{\infty} \tilde{a}_\lambda (z-z_0)^\lambda, \quad k_1 \in \mathbf{N} \text{ bzw. } k_1 = \infty,$$

$$(63)\qquad h^{(2n+1)}(z) = \sum_{\lambda=-k_2}^{\infty} \tilde{b}_\lambda (z-z_0)^\lambda, \quad k_2 \in \mathbf{N} \text{ bzw. } k_2 = \infty.$$

Es handelt sich bei (61) genau dann um eine Lösung der Klasse $\overset{*}{\mathfrak{F}}{}^\varepsilon(\dot{U}_\varrho(z_0))$, d. h. um eine Lösung mit logarithmischem Hauptglied der asymptotischen Entwicklung, falls in (62), (63) die Anfangsgrade $-k_1$, $-k_2$ endlich sind, die Beziehung

$$k_1 = k_2 = n + 1$$

erfüllt ist und die Koeffizienten $\tilde{a}_\lambda$, $\tilde{b}_\lambda$ für $(-1) \geq \lambda \geq -(n+1)$ den Bedingungen (59) und (60) genügen.

3. Reellwertige Lösungen

Nach Satz 1 läßt sich jede im Kreisring R: $\varrho_1 < |z-z_0| < \varrho_2$, $\varrho_1 \geq 0$, definierte und eindeutige komplexwertige Lösung von (1) in der Form

$$w = (E g)(z) + \overline{(E h)(z)}$$

mit den Erzeugenden

$$(64)\qquad g(z) = g_1(z) + S_1(z) \cdot \log(z-z_0),$$

$$(65)\qquad h(z) = h_1(z) + S_2(z) \cdot \log(z-z_0)$$

darstellen. Dabei bezeichnet $S_1(z)$ ein Polynom vom Grade $2n$ in z; $g_1(z)$ und $h_1(z)$ sind holomorphe und eindeutige Funktionen im Kreisring R, und $S_2(z)$ genügt der Bedingung

$$(66)\qquad S_2(z) = (-\varepsilon)^n z^{2n} \overline{S_1\left(\frac{-\varepsilon}{\bar{z}}\right)}.$$

Wir setzen

$$(67)\qquad (Eg)(z) = \Phi, \quad (Eh)(z) = \Psi,$$

dann gilt für eine reellwertige Lösung w von (1), wenn wir außerdem

$$F = \Phi - \overline{\Psi}$$

verwenden,

$$w - \overline{w} = (\Phi + \Psi) - (\overline{\Phi} + \overline{\Psi}) = (\Phi - \overline{\Psi}) - (\overline{\Phi} - \Psi) = F - \overline{F} = 0.$$

Damit folgt, da es sich bei F um eine reellwertige Funktion handelt,

$$w = \Phi + \Psi = \Phi + \overline{\Phi} - F = \frac{1}{2}\left\{(2\Phi - F) + \overline{(2\Phi - F)}\right\} =$$

$$= \frac{1}{2}\left\{(\Phi + \overline{\Psi}) + \overline{(\Phi + \overline{\Psi})}\right\}.$$

Wir erhalten also unter Berücksichtigung von (67) mit $f = \frac{1}{2}(g + h)$

$$w = \frac{1}{2}\left\{(Eg)(z) + (Eh)(z) + \overline{(Eg)(z) + (Eh)(z)}\right\} =$$

$$= (Ef)(z) + \overline{(Ef)(z)}.$$

Dabei gilt für $f(z)$ unter Verwendung von (64) und (65)

$$f(z) = \frac{1}{2}\left\{g_1(z) + h_1(z)\right\} + S(z) \cdot \log(z - z_0)$$

mit

$$S(z) = \frac{1}{2}\left\{S_1(z) + S_2(z)\right\}.$$

Unter Berücksichtigung von (66) erhält man also für das Polynom $S(z)$

$$S(z) = \frac{1}{2}\left\{S_1(z) + (-\varepsilon)^n z^{2n}\, \overline{S_1\left(\frac{-\varepsilon}{\overline{z}}\right)}\right\}.$$

Diese Forderung ist jedoch wegen

$$(-\varepsilon)^n z^{2n}\, \overline{S\left(\frac{-\varepsilon}{\overline{z}}\right)} = (-\varepsilon)^n z^{2n}\, \overline{\left\{\frac{1}{2} S_1\left(\frac{-\varepsilon}{\overline{z}}\right) + \frac{1}{2}(-\varepsilon)^n \left(\frac{-\varepsilon}{\overline{z}}\right)^{2n} \overline{S_1(z)}\right\}}$$

$$= \frac{1}{2}(-\varepsilon)^n z^{2n}\, \overline{S_1\left(\frac{-\varepsilon}{\overline{z}}\right)} + \frac{1}{2} S_1(z) = S(z)$$

gleichbedeutend mit der Bedingung

$$S(z) = (-\varepsilon)^n z^{2n} \overline{S\left(\frac{-\varepsilon}{\bar{z}}\right)}.$$

Damit lautet der Entwicklungssatz für die reellwertigen Lösungen von (1) wie folgt:

Satz 6

Jede im Kreisring $R: \varrho_1 < |z - z_0| < \varrho_2$, $\varrho_1 \geq 0$, definierte und eindeutige reellwertige Lösung der Differentialgleichung

$$(1 + \varepsilon z\bar{z})^2 w_{z\bar{z}} + \varepsilon n(n+1) w = 0, \quad n \in \mathbf{N}, \quad \varepsilon = \pm 1,$$

läßt sich in R gemäß

$$w = (Eg)(z) + \overline{(Eg)(z)}$$

mit der Erzeugenden

$$g(z) = g_1(z) + S(z) \cdot \log(z - z_0)$$

darstellen, wobei $g_1(z)$ in R holomorph und eindeutig ist, während $S(z)$ ein Polynom vom Grade $2n$ in z bezeichnet, welches der Bedingung

$$S(z) = (-\varepsilon)^n z^{2n} \overline{S\left(\frac{-\varepsilon}{\bar{z}}\right)}$$

genügt.

Entartet der Kreisring R in eine punktierte Kreisscheibe, so gilt speziell:

Satz 7

Eine reellwertige Lösung w von (1) habe in $z = z_0$ eine isolierte Singularität, d. h. die reellwertige Funktion w sei in einer punktierten Umgebung $K: 0 < |z - z_0| < \varrho$ als eindeutige Funktion definiert und dort Lösung der Differentialgleichung

$$(1 + \varepsilon z\bar{z})^2 w_{z\bar{z}} + \varepsilon n(n+1) w = 0, \quad n \in \mathbf{N}, \quad \varepsilon = \pm 1.$$

Dann läßt sich w in K gemäß

$$w = (Eg)(z) + \overline{(Eg)(z)}$$

darstellen, wobei die Erzeugende $g(z)$ der in Satz 6 genannten Bedingung genügt.

Um zu einer Darstellung für die Lösungen der Klasse $\overset{*}{\mathfrak{F}}{}_r^{\varepsilon}(\dot{U}_\varrho(z_0))$ zu kommen, ist zu prüfen, welche Einschränkungen aus der in Satz 6 genannten Bedingung

$$S(z) = (-\varepsilon)^n z^{2n} \overline{S\left(\frac{-\varepsilon}{\bar{z}}\right)}$$

für das Polynom (57) folgen. Wegen

$$S(z) = C\left(\frac{(z-z_0)(1+\varepsilon\bar{z}_0 z)}{1+\varepsilon z_0 \bar{z}_0}\right)^n$$

und

$$\overline{S\left(\frac{-\varepsilon}{\bar{z}}\right)} = \frac{(-\varepsilon)^n \bar{C}}{z^{2n}}\left(\frac{(z-z_0)(1+\varepsilon\bar{z}_0 z)}{1+\varepsilon z_0\bar{z}_0}\right)^n$$

folgt hier jedoch lediglich

$$C = \bar{C}.$$

Liegt die Singularität in ∞, so verwende man das obige Ergebnis für $z_0 = 0$, transformiere durch die Isometrie $z = \frac{1}{\zeta}$ und verwende (34a). Damit gilt der folgende

Satz 8

Jede in $0 < |z - z_0| < \varrho$ definierte und eindeutige Lösung $w \in \overset{*}{\mathfrak{F}}{}_r^{\varepsilon}(\dot{U}_\varrho(z_0))$ der Differentialgleichung

$$(1+\varepsilon z\bar{z})^2 w_{z\bar{z}} + \varepsilon n(n+1)w = 0,\ n \in \mathbf{N},\ \varepsilon = \pm 1,$$

läßt sich in $(\dot{U}_\varrho(z_0))$ gemäß

$$w = (Eg)(z) + \overline{(Eg)(z)}$$

mit der Erzeugenden

$$g(z) = g_1(z) + S(z)\cdot\log(z-z_0)$$

darstellen, wobei $g_1(z)$ eine Potenzreihe bezeichnet, während für $S(z)$ gilt

$$S(z) = C \sum_{\varrho=0}^{n} \binom{n}{\varrho} \left(\frac{\varepsilon \bar{z}_0}{1 + \varepsilon z_0 \bar{z}_0}\right)^{\varrho} (z - z_0)^{n+\varrho}, \quad C \text{ reell } (\neq 0).$$

Liegt eine Lösung $w \in \overset{*}{\mathfrak{F}}{}_r^{+1}(\dot{U}_\varrho(\infty))$ vor, so gilt für die Erzeugende

$$g(z) = \sum_{-\infty}^{2n} a_\mu z^\mu + C z^n \log z, \quad C \text{ reell } (\neq 0).$$

Hieran ist besonders bemerkenswert, daß $S(z)$ abgesehen von dem (von w abhängigen, konstanten) Faktor C für alle Lösungen $w \in \overset{*}{\mathfrak{F}}{}_r^{\varepsilon}(\dot{U}_\varrho(z_0))$ die gleiche Gestalt hat. Eine entsprechende Aussage gilt für

$$\varphi_1(z, \bar{z}) = 2\,(E\,S)(z) = \frac{2C}{(1 + \varepsilon z_0 \bar{z}_0)^n} \underset{z}{E}\left([(z - z_0)(1 + \varepsilon \bar{z}_0 z)]^n\right)$$

in der Entwicklung

$$w = \varphi_1(z, \bar{z}) \cdot \log|z - z_0| + \varphi_2(z, \bar{z}).$$

Zum Beispiel erhält man im Falle $z_0 = 0$ für

$$U(z, \bar{z}; 0) = \underset{z}{E}\,(z^n \log z) + \overline{\underset{z}{E}\,(z^n \log z)}$$

bei Berücksichtigung von (19)

(68)

$$U(z, \bar{z}; 0) = \left\{\sum_{\nu=0}^{n} A_\nu \frac{n!}{(n-\nu)!} \left(\frac{z\bar{z}}{1+\varepsilon z\bar{z}}\right)^{n-\nu}\right\} \log(z\bar{z})$$
$$+ 2 \sum_{\nu=1}^{n} \left\{\sum_{\mu=1}^{\nu} \binom{\nu}{\mu} \frac{n!\,(\mu-1)!\,(-1)^{\mu-1}}{(n+\mu-\nu)!}\right\} A_\nu \left(\frac{z\bar{z}}{1+\varepsilon z\bar{z}}\right)^{n-\nu},$$

d. h. es liegt eine nur von $z\bar{z}$ abhängige Lösung von (1) vor. Zur Bestimmung aller derartigen Lösungen setzen wir

$$w(z, \bar{z}) = \varphi(\omega), \quad \omega = \frac{1 - \varepsilon z\bar{z}}{1 + \varepsilon z\bar{z}}$$

und erhalten an Stelle von (1) die Legendresche Differentialgleichung

$$(\omega^2 - 1)\varphi'' + 2\omega\varphi' - n(n+1)\varphi = 0.$$

Die allgemeine Lösung dieser Differentialgleichung lautet (C_1, C_2 bel. komplex)

$$\varphi = C_1 P_n(\omega) + C_2 Q_n(\omega) \text{ für } \varepsilon = +1 \tag{69}$$

bzw.

$$\varphi = C_1 P_n(\omega) + C_2 \mathfrak{Q}(\omega) \text{ für } \varepsilon = -1, \tag{70}$$

wenn man entsprechend der Schreibweise von Magnus und Oberhettinger [3] mit $P_n(\omega)$ die Legendreschen Polynome bezeichnet und

$$Q_n(\omega) = \frac{1}{2} P_n(\omega) \log \frac{1+\omega}{1-\omega} - W_{n-1}(\omega), \quad \varepsilon = +1,$$

$$\mathfrak{Q}_n(\omega) = \frac{1}{2} P_n(\omega) \log \frac{\omega+1}{\omega-1} - W_{n-1}(\omega), \quad \varepsilon = -1,$$

$$W_{n-1}(\omega) = \sum_{\nu=0}^{\left[\frac{n-1}{2}\right]} \frac{2n-4\nu-1}{(n-\nu)(2\nu+1)} P_{n-2\nu-1}(\omega)$$

setzt. Die Lösung (68) ist sodann in den Lösungen (69) bzw. (70) mit

$$C_1 = 0, \quad C_2 = -2 \cdot n!$$

enthalten; es gilt also im Falle $z_0 = 0$

$$U(z, \bar{z}; 0) = n! \{P_n(\omega) \cdot \log(z\bar{z}) + 2 W_{n-1}(\omega)\} \text{ mit } \omega = \frac{1-\varepsilon z\bar{z}}{1+\varepsilon z\bar{z}}.$$

Setzt man für beliebiges z_0

$$U(z, \bar{z}; z_0) = \underset{z}{E}\big(S(z; z_0) \log(z - z_0)\big) + \overline{\underset{z}{E}\big(S(z; z_0) \log(z - z_0)\big)}$$

mit

$$S(z; z_0) = \left(\frac{(z-z_0)(1+\varepsilon\bar{z}_0 z)}{1+\varepsilon z_0 \bar{z}_0}\right)^n.$$

dann gilt

$$U(z,\bar{z};z_0) = n!\left[P_n\left(\frac{1-\varepsilon\zeta\bar{\zeta}}{1+\varepsilon\zeta\bar{\zeta}}\right)\right]_{\zeta=\frac{z-z_0}{1+\varepsilon\bar{z}_0 z}} \log|z-z_0|^2 + \Phi(z,\bar{z})$$

mit einer in $z = z_0$ beschränkten Funktion $\Phi(z,\bar{z})$. Mit diesen Überlegungen haben wir den folgenden Satz gewonnen.

Satz 9

Zu jeder Lösung $w \in \overset{*}{\mathfrak{F}}{}_r^{\varepsilon}(\dot{U}_\varrho(z_0))$ *gibt es genau eine reelle Zahl* C, *so daß*

$$w - C\cdot U(z,\bar{z};z_0)$$

in z_0 *reell analytisch ergänzbar ist.*

Wir betrachten nun ein einfach zusammenhängendes Gebiet G mit $z_\lambda \in G$, $\lambda = 1, \ldots, k$. Durch Herausnahme der Punkte z_λ aus G entstehe das Gebiet G_0. Wir nehmen außerdem an, daß G im Falle $\varepsilon = -1$ im Innern des Einheitskreises liegt.

Zu jeder Funktion $w \in \mathfrak{F}_r^{-1}(G_0)$, die in den Punkten z_λ, $\lambda = 1$, $\ldots, k$, isolierte Singularitäten mit logarithmischem Hauptglied der asymptotischen Entwicklung besitzt, gibt es dann unter Berücksichtigung von Satz 9 reelle Konstanten $C_1, \ldots, C_k$, so daß

$$w - \sum_{\lambda=1}^{k} C_\lambda \cdot U(z,\bar{z};z_\lambda)$$

in allen z_λ reell analytisch ergänzbar ist und danach eine Lösung der Klasse $\mathfrak{F}_r^{-1}(G)$ darstellt.

Im Falle $\varepsilon = +1$ lassen sich ähnliche Aussagen formulieren, doch ist hier der Punkt $z = \infty$ besonders zu beachten. Wir betrachten zunächst den Fall, daß das Gebiet G nicht gleich der Riemannschen Zahlenkugel ist. Dann kann man durch eine Kugeldrehung stets erreichen, daß der Punkt ∞ nicht zu G gehört. Wir können also in diesem Fall ohne Einschränkung der Allgemeinheit annehmen, daß ein Gebiet G mit $z = \infty \notin G$ vorliegt. Damit haben wir die Möglichkeit, wie oben im Falle $\varepsilon = -1$ zu verfahren, und kommen so zu einer entsprechenden Aussage. Wir fassen das Ergebnis für beide Fälle im folgenden Satz zusammen.

Satz 10

Sei das einfach zusammenhängende Gebiet G im Falle $\varepsilon = -1$ im Innern des Einheitskreises, im Falle $\varepsilon = +1$ in der offenen Zahlenebene gelegen (also $\infty \notin G$). Dann gibt es zu jeder Lösung $w \in \mathfrak{F}_r^\varepsilon(G_0)$ mit $w \in \overset{*}{\mathfrak{F}}{}_r^\varepsilon(\dot{U}_\varrho(z_\lambda))$, $\lambda = 1, \ldots, k$, (und ϱ genügend klein) reelle Konstanten $C_1, \ldots, C_k$, so daß

$$w - \sum_{\lambda=1}^{k} C_\lambda \cdot U(z, \bar{z}; z_\lambda)$$

in allen z_λ reell analytisch ergänzbar ist und nach dieser Ergänzung eine Lösung der Klasse $\mathfrak{F}_r^\varepsilon(G)$ darstellt.

Handelt es sich bei dem Gebiet G im Falle $\varepsilon = +1$ um die Riemannsche Zahlenkugel E^*, so lassen sich die Lösungen w mit den genannten Eigenschaften explizit angeben. Wir können hier ohne Einschränkung der Allgemeinheit annehmen, daß (gegebenenfalls nach geeigneter Kugeldrehung) $z_\lambda \neq \infty$ für $\lambda = 1, \ldots, k$. Dann gibt es geeignete reelle Konstanten $C_1, \ldots, C_k$, so daß

$$(71) \qquad F(z, \bar{z}) = w(z, \bar{z}) - \sum_{\lambda=1}^{k} C_\lambda \cdot U(z, \bar{z}; z_\lambda) \in \mathfrak{F}_r^{+1}(E_0),$$

wenn wir mit E_0 die offene Ebene bezeichnen. Nach Satz II existiert sodann eine in E_0 holomorphe Funktion $g(z)$, so daß

$$F(z, \bar{z}) = (Eg)(z) + \overline{(Eg)(z)}.$$

Dabei ist die Erzeugende $g(z)$ unter Berücksichtigung von Satz I, c bis auf ein Polynom vom Grade $2n$ in z mit

$$(72) \qquad P(z) + (-1)^n z^{2n} \overline{P\left(\frac{-1}{\bar{z}}\right)} = 0$$

bestimmt. Zur Untersuchung der Funktion F für $z \to \infty$ transformieren wir durch $z = \frac{1}{\zeta}$. Da F eine in E_0 definierte Lösung von (1) darstellt, erhalten wir unter Verwendung von (34a) die neue Erzeugende $g_1(\zeta)$ der in $|\zeta| > 0$ definierten Lösung

$$[F(z, \bar{z})]_{z=\frac{1}{\zeta}} = F_1(\zeta, \bar{\zeta}) = (Eg_1)(\zeta) + \overline{(Eg_1)(\zeta)}$$

gemäß

$$g_1(\zeta) = g\left(\frac{1}{\zeta}\right) \cdot (-1)^n \zeta^{2n} = \sum_{-\infty}^{2n} a_\lambda \zeta^\lambda. \tag{73}$$

Diese Erzeugende ist wiederum bis auf ein Polynom $P_1(\zeta)$ vom Grade $2n$ in ζ mit

$$P_1(\zeta) + (-1)^n \zeta^{2n} \overline{P_1\left(\frac{-1}{\bar{\zeta}}\right)} = 0$$

bestimmt. Da die Funktion w in (71) nach Voraussetzung in $z = \infty$ analytisch ist, gilt nunmehr

$$w_1(\zeta, \bar{\zeta}) = w\left(\frac{1}{\zeta}, \frac{1}{\bar{\zeta}}\right) = (Ef_1)(\zeta) + \overline{(Ef_1)(\zeta)}$$

mit einer in $\zeta = 0$ holomorphen Funktion

$$f_1(\zeta) = \sum_{\lambda=0}^{\infty} b_\lambda \zeta^\lambda. \tag{74}$$

Außerdem folgt

$$\left[\sum_{\lambda=1}^{k} C_\lambda \cdot U(z, \bar{z}; z_\lambda)\right]_{z=\frac{1}{\zeta}} = (Ef)(\zeta) + \overline{(Ef)(\zeta)}$$

mit

$$f(\zeta) = (-1)^{n+1} \cdot S(\zeta) \cdot \log \zeta + \sum_{\lambda=0}^{\infty} c_\lambda \zeta^\lambda, \tag{75}$$

$$S(\zeta) = \sum_{\lambda=1}^{k} C_\lambda \left(\frac{(1 - z_\lambda \zeta)(\zeta + \bar{z}_\lambda)}{1 + z_\lambda \bar{z}_\lambda}\right)^n,$$

$$\sum_{\lambda=0}^{\infty} c_\lambda \zeta^\lambda = (-1)^n \cdot S(\zeta) \cdot \log(1 - z_\lambda \zeta).$$

Für die Erzeugende $g_1(\zeta)$ gilt also in einer Umgebung von $\zeta = 0$ einerseits unter Verwendung von (73)

$$g_1(\zeta) = \sum_{-\infty}^{2n} a_\lambda \zeta^\lambda$$

und andererseits wegen (74) und (75)

$$g_1(\zeta) = \sum_{\lambda=0}^{\infty} d_\lambda \zeta^\lambda + (-1)^{n+1} \cdot S(\zeta) \cdot \log \zeta .$$

Damit folgt

$$d_\lambda = 0 \text{ für } \lambda > 2n \tag{76}$$

und

$$S(\zeta) \equiv 0 . \tag{77}$$

Wegen (76) und (72) kann also die Funktion $F(z,\bar{z})$ durch ein Polynom in z vom Grade $p \leq n$ erzeugt werden; damit ist $F(z,\bar{z})$ nach Satz III eine in der abgeschlossenen Ebene E^* definierte Lösung von (1), und es gilt der

Satz 11

Es sei E^* die Riemannsche Zahlenkugel. E_0^* entsteht aus E^* durch Herausnahme der Punkte z_λ, $\lambda = 1, \ldots, k$, $z_\lambda \neq \infty$. Dann läßt sich jede Lösung $w \in \mathfrak{F}_r^{+1}(E_0^*)$, für die $w \in \overset{*}{\mathfrak{F}}{}_r^{+1}(\dot{U}_\varrho(z_\lambda))$, $\lambda = 1, \ldots, k$ (mit genügend kleinem ϱ) gilt, durch

$$w = (E\,g)(z) + \overline{(E\,g)(z)}$$

mit

$$g(z) = P(z) + \sum_{\lambda=1}^{k} C_\lambda \cdot S(z; z_\lambda) \cdot \log(z - z_\lambda), \quad C_\lambda \text{ reell } (\neq 0),$$

und

$$\sum_{\lambda=1}^{k} C_\lambda \cdot S(z; z_\lambda) \equiv 0 \tag{78}$$

darstellen, wobei $P(z)$ ein Polynom in z vom Grade $p \leq n$ bezeichnet.

Man erhält solche in Satz 11 genannten Lösungen zum Beispiel, wenn k eine gerade Zahl ist und die isolierten Singularitäten paarweise in Diametralpunkten auftreten. Wir setzen

$$k = 2m, \quad z_{2\lambda-1} = z^{(\lambda)}, \quad z_{2\lambda} = -\frac{1}{\overline{z^{(\lambda)}}}, \quad \lambda = 1, \ldots, m.$$

Wegen

$$S\left(z; -\frac{1}{z_0}\right) = (-1)^n \cdot S(z; z_0)$$

folgt sodann

$$\sum_{\lambda=1}^{m} \left\{C_{2\lambda-1}\, S(z; z^{(\lambda)}) + C_{2\lambda}\, S\left(z; -\frac{1}{z^{(\lambda)}}\right)\right\}$$

$$= \sum_{\lambda=1}^{m} (C_{2\lambda-1} + (-1)^n C_{2\lambda})\, S(z; z^{(\lambda)}).$$

Die in Satz 11 genannte Bedingung (78) ist also mit

$$C_{2\lambda-1} + (-1)^n C_{2\lambda} = 0, \quad \lambda = 1, \ldots, m,$$

erfüllt. Die isolierten Singularitäten brauchen jedoch nicht notwendig paarweise in Diametralpunkten aufzutreten. Wir greifen als Beispiel den Fall $n = 1$ heraus und nehmen an, daß die Punkte z_λ, $\lambda = 1, \ldots, k$ auf einem Großkreis liegen; nach Anwendung einer geeigneten Kugeldrehung können wir voraussetzen, daß sämtliche z_λ reell sind. Die Bedingung (78) ist erfüllt, falls

$$\sum_{\lambda=1}^{k} c_\lambda z_\lambda = 0, \quad \sum_{\lambda=1}^{k} c_\lambda (1 - z_\lambda^2) = 0$$

mit

$$c_\lambda = \frac{C_\lambda}{1 + z_\lambda \bar{z}_\lambda}, \quad C_\lambda \text{ reell } (\neq 0).$$

Durch Elimination von

$$z_k = -\frac{1}{c_k} \sum_{\lambda=1}^{k-1} c_\lambda z_\lambda$$

folgt sodann

$$z_{k-1} = \frac{1}{A}\left(-B \pm \sqrt{B^2 - AC}\right)$$

mit

$$A = c_{k-1}(c_k + c_{k-1}),$$

$$B = c_{k-1} \sum_{\lambda=1}^{k-2} c_\lambda z_\lambda,$$

$$C = \left(\sum_{\lambda=1}^{k-2} c_\lambda z_\lambda\right)^2 + c_k \left(\sum_{\lambda=1}^{k-2} c_\lambda z_\lambda^2 - \sum_{\lambda=1}^{k} c_\lambda\right).$$

Wir nehmen nun

$$|c_k| < c_{k-1}$$

an; damit folgt $A > 0$. Die Bedingung

$$0 \leq B^2 - AC$$

$$= -c_k c_{k-1} \left\{ \left(\sum_{\lambda=1}^{k-2} c_\lambda z_\lambda \right)^2 + (c_k + c_{k-1}) \sum_{\lambda=1}^{k-2} c_\lambda (z_\lambda^2 - 1) - (c_k + c_{k-1})^2 \right\}$$

ist dann zum Beispiel bei Vorgabe von

$$z_\lambda \text{ mit } z_\lambda^2 > 2, \; \lambda = 1, \ldots, k-2,$$

$$c_\lambda > 1 \text{ für } \lambda = 1, \ldots, k-2$$

$$c_{k-1} = 2 \text{ und } c_k = -1$$

erfüllt.

Literaturhinweise

[1] Bauer, K. W.: Über die Lösungen der Differentialgleichung

$$(1 \pm z\bar{z})^2 w_{z\bar{z}} + \lambda w = 0.$$

Journal für die reine und angewandte Mathematik, Bd. 221, 1966; Teil I, S. 48–84; Teil II, S. 176–196.

[2] Bauer, K. W.: Über eine der Differentialgleichung $(1 \pm z\bar{z})^2 w_{z\bar{z}} \pm$ $\pm n(n+1) w = 0$ zugeordnete Funktionentheorie. Bonner Mathematische Schriften, Bd. 23, 1965.

[3] Magnus, W. und Oberhettinger, F.: Formeln und Sätze für die speziellen Funktionen der mathematischen Physik. Berlin 1948.

[4] Roelcke, W.: Über die Wellengleichung bei Grenzkreisgruppen erster Art. Sitzungsberichte der Heidelberger Akademie der Wissenschaften, Math.-Nat. Klasse, Heidelberg, 1956.