BAYERISCHE AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN
MATHEMATISCH-NATURWISSENSCHAFTLICHE KLASSE

SITZUNGSBERICHTE

JAHRGANG
1970

MÜNCHEN 1971

VERLAG DER BAYERISCHEN AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN
In Kommission bei der C.H. Beck'schen Verlagsbuchhandlung München

Kontakt-Relationen

Von Georg **Aumann** in München

Herrn Josef Lense zum 80. Geburtstag gewidmet

Lehrbücher und Vorlesungen über Topologie beginnen zumeist mit dem Axiomensystem (G) (siehe 5.2. unten) der offenen Mengen; zwar zeichnet sich (G) aus durch letzte Prägnanz des Sachverhalts, läßt aber doch für den Anfänger hinsichtlich Motivierung Einiges zu wünschen übrig. Im Zeitalter der Soziologie aber liegt, wie mir scheint, eine recht suggestive Einführung der Topologie auf der Hand, nämlich mit Hilfe der „Kontaktrelation", d. h. einer Beziehung zwischen Individuum und den Gruppen (d. h. den Teilen der Gesellschaft). So jedenfalls beginne ich schon seit Jahren jede einführende Betrachtung der Topologie. Das Axiomensystem (K) für die allgemeine Kontaktrelation ist viel ansprechender als (G), und im übrigen allgemeiner als (G); erst durch Hinzunahme von zwei weiteren Axiomen zu (K) entsteht eine mit (G) äquivalente Kontaktstruktur, („topologischer Kontakt"). Es gibt wichtige Kontaktstrukturen, wie z. B. die Konvexität, die nicht topologisch sind.

Die folgenden Bemerkungen sind in manchen Einzelheiten wohl kaum neu; sie wollen vielmehr durch eine geeignete Darstellung der Zusammenhänge zwischen Kontaktrelationen und Hüllenoperationen und ihrer Erzeugung aus primitiveren Strukturen die erwähnte Möglichkeit einer besseren Motivierung der Axiome der Topologie deutlich machen und in Erinnerung bringen.

1. Die Axiome des Kontakts

1.1. Ein soziologisches Beispiel

Es sei M eine Menge (= Gesellschaft) und B eine Menge (= Bereich aller Individualinteressen) und jedem $x \in M$ (= Individuum) sei zugeordnet eine Teilmenge $J(x)$ von B (= Interessenbereich von x). Wir sagen: x ist in Kontakt mit einer Teilmenge Y (= Gruppe), kurz $x\gamma Y$, wenn es eine endliche Teilmenge Y' (= $Y'(x, Y)$) von Y gibt, so daß

$$\bigcup \{J(y) : y \in Y'\} \supset J(x)$$

(d. h. es endlich viele Glieder der Gruppe gibt, deren Interessen zusammengenommen die von x überdecken). Offensichtlich gilt:

1. $x\gamma \{x\}$ wegen $J(x) \supset J(x)$; – 2. Wenn $x\gamma Y_1$ und $Y_1 \subset Y_2$, dann ist auch $x\gamma Y_2$; denn $Y_1' \subset Y_2$; – 3. Wenn $x\gamma Y_1$ und wenn $y\gamma Y_2$ für jedes $y \in Y_1$, dann ist auch $x\gamma Y_2$; denn mit $S := \bigcup \{J(y') : y' \in Y_1'\} \supset J(x)$ und $\bigcup \{J(y'') : y'' \in Y'(y', Y_2)\} \supset J(y')$ für alle $y' \in Y_1'$ folgt $\bigcup \{J(y'') : y'' \in Y''\} \supset S$ mit $Y'' := \bigcup \{Y'(y', Y_2) : y' \in Y_1'\}$ und endlichem Y''.

Diese Eigenschaften von γ verallgemeinern wir nun in folgender Weise.

1.2. Es bezeichne M eine Menge und γ eine Relation zwischen Elementen x und Teilmengen Y von M, d. h. für gewisse $x \in M$ und $Y \subset M$ besteht eine Aussage

$$x\gamma Y,$$

(sprich: „x ist in γ-Kontakt mit Y" oder „x ist γ – adherent mit Y"); diese Relation stellt eine Kontaktrelation dar, wenn folgende Axiome erfüllt sind*):

$$(K_1) \qquad \bigwedge_x x\gamma \{x\};$$

$$(K_2) \qquad \bigwedge_{x, Y_1, Y_2} (x\gamma Y_1 \wedge Y_1 \subset Y_2) \succ x\gamma Y_2;$$

$$(K_3) \qquad \bigwedge_{x, Y_1, Y_2} (x\gamma Y_1 \wedge \bigwedge_{y \in Y_1} y\gamma Y_2) \succ x\gamma Y_2.$$

Es besagt: (K_1), daß jedes x mit der Menge $\{x\}$ in Kontakt ist („Reflexivität" des Kontakts), (K_2), daß x, wenn mit einer Menge, dann mit jeder Obermenge davon in Kontakt ist („Monotonie" des Kontakts), und (K_3), daß, wenn x, mit der Menge Y_1 und jedes Element von Y_1 mit Y_2 in Kontakt ist, dann x auch mit Y_2

* Lies: „für alle" für $\bigwedge$, „es gibt ein" für $\bigvee$, „impliziert" für $\succ$, „genau dann, wenn" $\asymp$, „und" für $\wedge$, „oder" für $\vee$; ein Doppelpunkt neben = oder $\asymp$ ist zu lesen „definitionsgemäß".

in Kontakt ist („Infektivität“ des Kontakts). (K) bezeichne die Zusammenfassung der drei Axiome (K_1), (K_2), (K_3).

Bemerkung. (K_3) kann durch Einführung einer aus γ abgeleiteten Relation $\overleftarrow{\gamma}$ auf eine bekanntere Form gebracht werden: Man definiert für zwei Teilmengen Y_1, Y_2 von M

$$Y_1 \overleftarrow{\gamma}\, Y_2 : \Leftrightarrow \bigwedge\nolimits_{y \in Y_1} y \gamma Y_2;$$

dann ist K_3 äquivalent mit

$$(Y_1 \overleftarrow{\gamma}\, Y_2 \wedge Y_2 \overleftarrow{\gamma}\, Y_3) \succ Y_1 \overleftarrow{\gamma}\, Y_3,$$

d. h. $\overleftarrow{\gamma}$ ist transitiv.

2. Mathematische Beispiele

a) R-Kollinearität γ_1 im $\mathbf{R}^n$, wobei R ein Unterring von $\mathbf{R}$ ist (mit $1 \in R$): $x\gamma_1 Y : \Leftrightarrow \bigvee_{n \in \mathbf{N}} \bigvee_{a_1, \ldots, a_n \in Y} \bigvee_{\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in R} \sum_\nu \lambda_\nu = 1 \wedge \sum_\nu \lambda_\nu a_\nu = x$.

Die Gültigkeit der Axiome (K) ist evident.

b) K-Konvexität γ_2 im $\mathbf{R}^n$, wobei K ein Unterkörper von $\mathbf{R}$ ist.

Hier definiert man

$$x\gamma_2 Y : \Leftrightarrow \bigvee\nolimits_{n \in \mathbf{N};\, a_1, \ldots, a_n \in Y;\, \lambda_1, \ldots, \lambda_n \in K} \sum\nolimits_\nu \lambda_\nu = 1 \wedge \bigwedge\nolimits_\nu \lambda_\nu \geqq 0 \wedge \sum\nolimits_\nu \lambda_\nu a_\nu = x.$$

c) Topologische Berührung γ_3 in einem metrischen Raum (M, Abstand r):

Hier setzt man:

$$x\gamma_3 Y : \Leftrightarrow \bigwedge\nolimits_{\varepsilon > 0} \bigvee\nolimits_{y \in Y} r(x, y) < \varepsilon$$

(zum Nachweis von (K_3) muß hier die Dreiecksungleichung für r herangezogen werden).

2.1. Das Beispiel γ_3 besitzt, wie leicht zu bestätigen, die weiteren Eigenschaften:

(K_0) $\qquad x\gamma\, \emptyset$ für kein $x \in M$;

(Kein x ist mit der leeren Menge $\emptyset$ in Kontakt);

(K_4) $$\bigwedge_{x, Y_1, Y_2} x\gamma(Y_1 \cup Y_2) \succ\!\prec (x\gamma\, Y_1 \vee x\gamma\, Y_2).$$

Eine Kontaktrelation, welche (K_0) bis (K_4) erfüllt, heißt eine (klassisch) topologische Kontaktrelation.

3. Die Axiome der Hüllenoperation

3.1. Ist γ eine Kontaktrelation, so definieren wir die Abbildung, $\gamma^{\langle}: \mathfrak{P}M \to \mathfrak{P}M$, von der Menge $\mathfrak{P}M$ aller Teilmengen von M in sich:

Für $Y \subset M$ wird gesetzt

$$\gamma^{\langle}\, Y := \{x : x \in M \wedge x\gamma\, Y\};$$

gleichwertig damit ist

(1) $$x\gamma\, Y \succ\!\prec : x \in \gamma^{\langle}\, Y.$$

Aus (K_1), (K_2) und (K_3) folgen mit $\gamma^{\langle} = h$

(H_1) $$h\, Y \supset Y \text{ für alle } Y;$$
(H_2) $$Y_1 \subset Y_2 \succ h\, Y_1 \subset h\, Y_2;$$
(H_3) $$h\, h\, Y = h\, Y \text{ für alle } Y.$$

Man spricht bei (H_1), (H_2) bzw. (H_3) von der Extensivität, Isotonie bzw. Idempotenz der Abbildung h, und allgemein heißt jede Abbildung $h : \mathfrak{P}M \to \mathfrak{P}M$, welche (H_1), (H_2) und (H_3) erfüllt, eine Hüllenoperation, und die Mengen hY werden wegen (H_3) die h-abgeschlossenen Mengen genannt [1].

Bemerkung. Jede Hüllenoperation h erfüllt die Beziehung

(D) $$\bigcap \{hY : Y \subset M \wedge hY \supset X\} = hX$$

(für alle X); genauer kann man sagen:

Für jede Abbildung $h : \mathfrak{P}M \to \mathfrak{P}M$ mit (H_1) gilt

$$((H_2) \wedge (H_3)) \succ\!\prec (D).$$

Beweis. Wir bezeichnen die linke Seite von (D) mit dX. – Zu „$\prec$". Die Abbildung $X \mapsto dX$ ist offensichtlich isoton (denn ein kleineres X erlaubt mehr Y's, ergibt also ein kleineres dX), also gilt (H_2). Ferner ist in $d(hX) = \bigcap \{hY : Y \subset M \wedge hY$

$\supset hX\}$, das X ein zulässiges Y, also $dhX \subset hX$; wegen (H_1) ist aber andererseits $hX \subset hhX = dhX$, also ist zusammen $dhX = hX$, d. h. es gilt (H_3). – Zu „$\succ$". Wegen (H_1) ist im Ausdruck für dX das X ein zulässiges Y, also ist $dX \subset hX$; vermöge (H_3) und (H_2) hat man weiter $hY \supset X \succ hY = hhY \supset hX$, also $dX \supset hX$, also gilt (D).

3.2. Der in 3.1. vollzogene Übergang $\gamma \mapsto \gamma^{\langle}$ von einer Kontaktrelation γ zu einer Hüllenoperation $h = \gamma^{\langle}$ ist eindeutig umkehrbar durch einen Übergang $h \mapsto h^{\rangle}$ von einer Hüllenoperation h zu einer Kontaktrelation $h^{\rangle}$, nämlich vermöge

$$(1') \qquad x h^{\rangle} Y : \succ\!\prec x \in hY,$$

so daß für jede Kontaktrelation γ und jede Hüllenoperation h die Äquivalenz gilt

$$(2) \qquad \gamma = h^{\rangle} \succ\!\prec h = \gamma^{\langle}.$$

3.3. Die Beweise der in 3.1. und 3.2. aufgestellten Behauptungen seien kurz angedeutet. Daß die beiden Übergänge auf das Behauptete führen, folgt für $\gamma \mapsto \gamma^{\langle}$ aus den Implikationen $(K_1 \wedge K_2) \succ H_1$, $K_2 \succ H_2$, $(K_1 \wedge K_2 \wedge K_3) \succ H_3$, und für $h \mapsto h^{\rangle}$ aus den Schlüssen $H_1 \succ K_1$, $H_2 \succ K_2$, $(H_2 \wedge H_3) \succ K_3$. Und (2) ergibt sich aus der Kette

$$\gamma^{\langle} = h \succ\!\prec \curlywedge_X \gamma^{\langle} X = hX \succ\!\prec \curlywedge_X \{y : y\gamma X\} = hX \succ\!\prec \curlywedge_X \curlywedge_y (y\gamma X \succ\!\prec y \in hX) \succ\!\prec \curlywedge_{X,y} (y\gamma X \succ\!\prec y h^{\rangle} X) \succ\!\prec \gamma = h^{\rangle}.$$

3.4. Den Axiomen (K_0) und (K_4) der „Kontaktsprache" stehen als äquivalent gegenüber die Axiome

$$(H_0) \qquad h \varnothing = \varnothing,$$
$$(H_4) \qquad h(Y_1 \cup Y_2) = (hY_1) \cup (hY_2)$$

der „Hüllensprache", wie leicht zu bestätigen.

Bemerkung. Steht das Axiom (K_4) bzw. (H_4) zur Verfügung, so sind (K_2) bzw. (H_2) entbehrlich (als direkte Folgerung aus (K_4) bzw. (H_4)). Die Axiome (H_0), (H_1), (H_3), (H_4) heißen die topologischen Hüllenaxiome und werden gewöhnlich nach C. Kuratowski benannt [1].

4. Durch Kontakttestmengen definierte Kontaktrelationen

4.1. Es sei $\mathfrak{H}$ irgendein System von Teilmengen von M. Damit wird die Kontaktrelation $\gamma_{\mathfrak{H}}$ wie folgt erklärt:

$$(4) \qquad x\gamma_{\mathfrak{H}} Y :\Leftrightarrow \bigwedge\nolimits_{H \in \mathfrak{H}} x \in H \succ Y \cap H \neq \emptyset .$$

Es gilt (K_1), weil $x \notin H \vee H \cap \{x\} \neq \emptyset$ immer erfüllt ist; (K_2) ist evident: (K_3) folgt aus:

$x\gamma_{\mathfrak{H}} Y \wedge \bigwedge_{y \in Y} y\gamma_{\mathfrak{H}} Y' \succ (\bigwedge_{H \in \mathfrak{H}} (x \in H \succ \bigvee_{y_1 \in Y \cap H} \succ H \cap Y' \neq \emptyset)) \succ x\gamma_{\mathfrak{H}} Y'$.

Extreme Beispiele: 1. $\mathfrak{H} = \emptyset$ oder $\mathfrak{H} = \{\emptyset\}$; da die Aussage $x\gamma_{\mathfrak{H}} Y$ äquivalent ist mit

$$(4') \qquad \bigwedge\nolimits_H H \notin \mathfrak{H} \vee x \notin H \vee H \cap Y \neq \emptyset ,$$

so ist in diesen Fällen x mit jeder Menge in Kontakt, auch mit der leeren Menge. – 2. $H = \{M\}$; hier ist x mit jeder Menge $\neq \emptyset$ in Kontakt.

Bemerkung. Unmittelbar aus der Definition von $\gamma_{\mathfrak{H}}$ folgt: $\bigwedge_{H \in \mathfrak{H}, Y \subset M} (H \cap Y = \emptyset \succ H \cap \gamma_{\mathfrak{H}}^{<} Y = \emptyset)$; denn $\bigwedge_{x \in H} H \cap Y = \emptyset \succ x \notin \gamma_{\mathfrak{H}}^{<} Y$.

4.2. Die Mengen H von $\mathfrak{H}$ in 4.1. heißen Kontakttestmengen (von $\gamma_{\mathfrak{H}}$) und $\mathfrak{H}$ heißt ein Kontakttestmengensystem (KT-System) für $\gamma_{\mathfrak{H}}$; es ist durchaus möglich, daß verschiedene KT-Systeme $\mathfrak{H}$ dieselbe Kontaktrelation $\gamma_{\mathfrak{H}}$ erzeugen; wir nennen sie dann äquivalente KT-Systeme. Je umfangreicher $\mathfrak{H}$ ist, um so mehr Bedingungen werden an den Kontakt gestellt, d. h. um so „enger" wird er. Es gibt nun im allgemeinen zu einer Kontaktrelation kein kleinstes äquivalentes KT-System, wohl aber ein größtes.

Satz. 1. Ist γ eine Kontaktrelation in M, so ist $\mathfrak{K} := \{\complement\, \gamma^{<} Y : Y \subset M\}$* ein KT-System für γ, d. h. $\gamma_{\mathfrak{K}} = \gamma$. – 2. $\mathfrak{K}$ ist das größte γ erzeugende KT-System.

Beweis. 1. $x \notin \gamma_{\mathfrak{K}}^{<} Y \succ \bigvee_{Y'} x \in \complement\, hY' \wedge \complement\, hY' \cap Y = \emptyset$. Das Letzte bedeutet $Y \subset hY'$, woraus $hY \subset hhY' = hY'$ folgt.

* $\complement\, A$ bezeichnet das Komplement von A in M.

Also ist $x \in \complement\, hY$ d. h. $x \notin hY$. Umgekehrt, wenn $x \notin hY$, so $x \in \complement\, hY$, und da wegen $hY \supset Y$ noch $\complement\, hY \cap Y = \oslash$, so ist $x \notin \gamma_{\mathfrak{K}}^{<} Y$. Also gilt $\gamma = \gamma_{\mathfrak{K}}$. – 2. Es sei $\mathfrak{H}$ irgendein γ erzeugendes KT-System. Dann ist jedes $H \in \mathfrak{H}$ ein $\complement\, hY$ mit $Y \subset M$, oder jedes $\complement\, H$ ein hY, nämlich einfach wegen $\complement\, H = h\, \complement\, H$. In der Tat, $\complement\, H \supset h\, \complement\, H$ (das Umgekehrte ist klar) ergibt sich so: $x \notin \complement\, H \succ x \in H \wedge H \cap \complement\, H = \oslash \succ x \notin \gamma_{\mathfrak{H}}^{<} \complement\, H = h\, \complement\, H$.

5. Topologische Kontaktrelationen

5.1. Satz. Eine von einem KT-System $\mathfrak{H}$ erzeugte Kontaktrelation γ im M ist topologisch, wenn $\mathfrak{H}$ die Bedingung

$$(T) \qquad M \in \mathfrak{H} \wedge \bigwedge_{H_1, H_2 \in \mathfrak{H}} H_1 \cap H_2 \in \mathfrak{H}$$

erfüllt. Umgekehrt besitzt das größte, die topologische Kontaktrelation γ erzeugende KT-System $\mathfrak{K}$ die Eigenschaft (T).

Beweis. Wir betrachten $\gamma^{<} = h$ anstelle von γ.

1. $\mathfrak{H}$ erfülle (T). Wegen $M \in \mathfrak{H}$ besteht (H_0) zu Recht. Ferner ist $h(Y_1 \cup Y_2) \supset h(Y_1) \cup h(Y_2)$ wegen der Isotonie. Die umgekehrte Inklusion folgt so: $x \notin h(Y_1) \cup h(Y_2) \succ \bigwedge_{i=1,2} \bigvee_{G_i \in \mathfrak{H}} x \in G_i \wedge G_i \cap Y_i = \oslash \succ x \in G_1 \cap G_2 \in \mathfrak{H} \wedge (G_1 \cap G_2) \cap (Y_1 \cup Y_2) = \oslash \succ x \notin h\,(Y_1 \cup Y_2)$. Damit ist auch (H_4) nachgewiesen. – 2. Wenn umgekehrt h eine topologische Hüllenoperation ist, so impliziert $h\, \oslash = \oslash$ unmittelbar $\complement\, h\, \oslash = M$ und weiter $h(Y_1) \cup h(Y_2) = h(Y_1 \cup Y_2)$ durch Komplementbildung $\complement\, h(Y_1) \cap \complement\, h(Y_2) = \complement\, h(Y_1 \cup Y_2)$, d. h. die Mengen $\complement\, hY$ erfüllen (T).

Bemerkung. Man kann jedes Teilmengensystem $\mathfrak{H}^0$ von M zu einem kleinsten, $\mathfrak{H}^0$ enthaltenden System $\tilde{\mathfrak{H}}$, welches (T) erfüllt, erweitern: Man bilde zunächst $\mathfrak{H}' := \mathfrak{H} \cup \{M\}$ und dann aus $\mathfrak{H}'$ das System $\tilde{\mathfrak{H}}$ aller Durchschnitte von je endlich vielen Mengen aus $\mathfrak{H}'$. Besitzt $\mathfrak{H}$ von vorneherein schon die Eigenschaft (T), so ist $\tilde{\mathfrak{H}} = \mathfrak{H}$.

5.2. Ist h eine topologische Hüllenoperation in M, so erfüllt das System

$$\mathfrak{F} := \{hY : Y \subset M\}$$

die Axiome für die „abgeschlossenen" Mengen des durch h erklärten topologischen Raumes (M, h):

$$(F_1) \qquad \bigwedge_{\mathfrak{F}' \subset \mathfrak{F}} \mathfrak{F}' \text{ endlich} \succ \bigcup \mathfrak{F}' \in \mathfrak{F};$$

$$(F_2) \qquad \bigwedge_{\mathfrak{F}'' \subset \mathfrak{F}} \bigcap \mathfrak{F}'' \in \mathfrak{F}.$$

(Hierbei ist sinngemäß $\bigcup \emptyset = \emptyset$ und $\bigcap \emptyset = M$ zu setzen.)

Demgemäß erfüllen die „offenen" Mengen als die Komplemente der abgeschlossenen Mengen,

$$\mathfrak{G} := \{\complement F : F \in \mathfrak{F}\},$$

die zu (F_1), (F_2) dualen Axiome (G), nämlich

$$(G_1) \qquad \bigwedge_{\mathfrak{G}' \subset \mathfrak{G}} \mathfrak{G}' \text{ endlich} \succ \bigcap \mathfrak{G}' \in \mathfrak{G};$$

$$(G_2) \qquad \bigwedge_{\mathfrak{G}'' \subset \mathfrak{G}} \bigcup \mathfrak{G}'' \in \mathfrak{G}.$$

Offensichtlich ist dabei $\mathfrak{G}$ das größte KT-System, welches (M, h) erzeugt; daher befriedigt $\mathfrak{G}$ das Axiom (G_1). (F_2) ergibt sich so: Es sei etwa $D := \bigcap \{hY : Y \in \mathfrak{Y}\}$, so daß $\bigwedge_{Y \in \mathfrak{Y}} D \subset hY$, also $hD \subset hhY = hY$, also $hD \subset D$. Da das Umgekehrte auch gilt, so folgt $hD = D$.

6. Polaritätsprinzip und Hüllenoperationen

Bekanntlich führt jede beliebige zweistellige Relation durch Anwendung des Polaritätsprinzips zu Hüllenbildungen [2]. Der Sachverhalt ist dabei der folgende:

Es sei xry irgendeine Relation zwischen gewissen Elementen x einer Menge A und Elementen y einer Menge B. Hierzu bildet man die Abbildungen a bzw. b von $\mathfrak{P}A$ in $\mathfrak{P}B$ bzw. umgekehrt nach folgender Vorschrift: Für $Y \subset B$, $X \subset A$ ist

$$aY := \{x : x \in A \wedge \bigwedge_{y \in Y} xry\},$$
$$bX := \{y : y \in B \wedge \bigwedge_{x \in X} xry\}.$$

Diese Abbildungen sind antiton; es stellen die Zusammensetzungen ab auf $\mathfrak{P}A$ und ba auf $\mathfrak{P}B$ Hüllenoperation dar, wobei

$$\mathfrak{X} := \{aY : Y \subset B\} \text{ bzw. } \mathfrak{Y} := \{bX : X \subset A\}$$

das System der (ab)- bzw. (ba)-abgeschlossenen Mengen ergeben. Das Polaritätsprinzip kommt darin zum Ausdruck, daß die eingeengten Abbildungen

$$a : \mathfrak{Y} \to \mathfrak{X},\ b : \mathfrak{X} \to \mathfrak{Y}$$

Umkehrungen voneinander sind und einen Antiordnungsisomorphismus darstellen. Die Anwendungen dieses wohl allgemeinsten Isomorphiesatzes der Mathematik sind zahlreich; sie reichen von den Dedekindschen Schnitten bis zum Hauptsatz der Galoisschen Theorie.

6.1. Unsere Frage hier ist, ob die genannten Hüllenoperationen ba (oder ab) nicht etwa von spezieller Art sind. Das ist nicht der Fall; es gilt nämlich:

Um die beliebig vorgegebene Hüllenoperation $h : \mathfrak{P}M \to \mathfrak{P}M$ als die ba-Operation zu einer Relation r zu erhalten, definiere man für $x \in M$ und $Y \subset M$ die Relation r gemäß

$$xrY :\Leftrightarrow x \in hY.$$

Dann ergibt sich nämlich für $X \subset M$:

$$\begin{aligned} bX &= \{Y : Y \subset M \wedge \textstyle\bigwedge_{x \in X} x \in hY\} = \{Y : Y \subset M \wedge X \\ &\quad \subset hY\}, \\ abX &= \{x : x \in M \wedge \textstyle\bigwedge_{Y \in bX} x \in hY\} = \{x : x \in M \wedge x \in \\ &\quad \textstyle\bigcap_{Y \in bX} hY\} = \{x : x \in M \wedge x \in \textstyle\bigcap_{hY \supset X} hY\} \\ &= \{x : x \in M \wedge x \in hX\} = hX, \end{aligned}$$

wobei wir (D) von 3.1. benutzten.

6.2. Zu einer beliebigen Relation r zwischen den Mengen A und B erhalten wir durch die Übergänge

$$r \mapsto ab \mapsto (ab)^{\rangle} =: \Gamma_r$$

eine Kontaktrelation in A, die wir auch direkt beschreiben können.

Es ist nämlich $x \Gamma_r Y \Leftrightarrow x \in abY \Leftrightarrow \bigwedge_{z \in bY} xrz$.

Da aber $z \in bY$ äquivalent ist mit $Y\overleftarrow{r}z$, so folgt

$$x\Gamma_r Y \approx \bigwedge_{z \in B} (Y\overleftarrow{r}z \succ xrz);$$

dies können wir ansehen als die aus der beliebigen Relation r abgeleitete Kontaktrelation Γ_r. Hierzu gilt noch:

Wenn bereits r eine Kontaktrelation ist, so ist $\Gamma_r = r$.

Einerseits haben wir nämlich $trY \succ (\bigwedge_{X \subset M} (Y\overleftarrow{r}X) \succ trX) \succ t\Gamma_r Y$ (wegen (K_3)); ferner, wenn $t\Gamma_r Y$, so gilt $(Y\overleftarrow{r}X) \succ trX$ für alle X, insbesondere ist für $X = Y$ wegen (K_1) und (K_2) $Y\overleftarrow{r}Y$, so daß trY folgt.

Bemerkung. Neuerdings versucht man KT-Systeme selbst aus irgendwelchen vorgegebenen Relationen r abzuleiten und durch Wahl von r eine gewünschte besondere Struktur des Kontaktes zu erzielen [3].

6.3. **Beispiele**

1. Wir betrachten die Relation $x \leq y$ in $\mathbf{R}$. Die daraus gemäß 6.2. abgeleitete Kontaktrelation $x\Gamma_r Y$ ist die Aussage

$$\bigwedge_{z \in \mathbf{R}} ((Y \overleftarrow{\leq} z) \succ x \leqslant z), \text{ oder}$$
$$\bigwedge_{z \in \mathbf{R}} ((\sup Y \leqslant z) \succ x \leqslant z), \text{ oder}$$
$$(*) \qquad x \leqslant \sup Y.$$

Dabei ist $\sup \emptyset = -\infty$ zu setzen und $\sup Y = +\infty$ für jedes nach oben nicht beschränkte Y.

Man erkennt unschwer, daß diese Relation die ersten beiden Axiome des Kontakts erfüllt. Das Axiom (K_3) lautet hier:

$$x \leqslant \sup Y \wedge (\bigwedge_{y \in Y} y \leqslant \sup T) \succ x \leqslant \sup T,$$

was eine richtige, aber wenig bekannte Eigenschaft von sup ist.

Die Kontaktrelation (*) ist sogar eine topologische; denn es gilt $x \leqslant \sup \emptyset$ für kein x (da $\sup \emptyset$ sinngemäß $= +\infty$ zu setzen ist). Ferner gilt $x \leqslant \sup (Y_1 \cup Y_2) \approx (x \leqslant \sup Y_1) \vee (x \leqslant \sup Y_2)$.

Die zugehörige Topologie ist wohl bekannt: Die abgeschlossenen Mengen sind die Mengen $\{x : x \leqslant \sup Y\}$, wobei $\sup Y$ eine beliebige Zahl sein kann. Die offenen Mengen sind also die Mengen $\{x : x > a\}$. Diese Topologie dient zur Beschreibung der Halbstetigkeit nach unten der reellen Funktionen [4].

2. Im Bereich $\mathbf{N}$ der natürlichen Zahlen sei $x <| y$ die Relation „x ist Teiler von y". Die zugehörige Kontaktrelation ist erklärt durch

$$x \Gamma_r Y : \asymp \bigwedge_{z \in \mathbf{N}} (Y \overleftarrow{<|} z) \succ (x <| z).$$

Ähnlich wie vorhin ist diese Aussage äquivalent mit

$$x <| KGV\ Y^*$$

(„x ist Teiler des kleinsten gemeinsamen Vielfachen der Zahlen von Y"), was ersichtlich wieder eine Kontaktrelation ist. Sie ist aber nicht topologisch. Denn, wenn z. B. p und q verschiedene Primzahlen sind, so ist für $x := pq$ zwar $x <| KGV\ \{p, q\}$, aber weder $x <| KGV\ \{p\}$ noch $x <| KGV\ \{q\}$.

7. Man kann daran denken, eine vorgegebene Hüllenoperation h durch eine geeignete Umwandlung $h \mapsto h'$ in eine topologische Hüllenoperation überzuführen, wobei für den Fall, daß schon h topologisch ist, $h' = h$ bleibt. Dies ist in der Tat möglich. Es stellt sich jedoch heraus, daß die Korrektur gemäß Bemerkung 5.1., die die den Mengen hY fehlende Eigenschaft (H_4) einbringt, die Idempotenz zerstört, so daß neue Korrekturen notwendig sind, die im allgemeinen erst nach transfinit vielen Schritten zum gewünschten Effekt führen. Hierauf brauchen wir nicht einzugehen, da uns die Überlegungen von **4.1.** und **5.1.** einfache Möglichkeiten bieten, aus ganz primitiven Gegebenheiten alle Kontakt- und topologischen Kontaktstrukturen herzustellen.

Das in 1.1. beschriebene Modell einer Kontaktrelation ist noch mathematischer Verallgemeinerung fähig und soll in einer folgenden Arbeit näher untersucht werden.

Literatur

[1] Georg Nöbeling, Grundlagen der analytischen Topologie, Berlin 1954;
[2] Garett Birkhoff, Lattice Theory, Am. Math. Soc. Publ. XXV, 3. Aufl., 1967;
[3] R. E. Smithson, Topologies generated by relations, Bull. Austr. Math. Soc. 1 (1969), 297;
[4] G. Aumann, Reelle Funktionen, 2. Auflage, Berlin 1969.

* Hier ist $KGV\ \emptyset = 1$ zu setzen und $KGV\ Y = \infty$ für jedes unendliche Y, wobei $x <| \infty$ für jedes natürliche x als gültig anzusehen ist.