BAYERISCHE AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN
MATHEMATISCH-NATURWISSENSCHAFTLICHE KLASSE

SITZUNGSBERICHTE

JAHRGANG
1967

MÜNCHEN 1968

VERLAG DER BAYERISCHEN AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN
In Kommission bei der C. H. Beck'schen Verlagsbuchhandlung München

Über die Gestalten der Kontinua vom schwachen Punktordnungswert Drei in topologisch projektiven Ebenen. I

Unserem lieben Kollegen Georg Nöbeling zum sechszigsten Geburtstag gewidmet

Von **Otto Haupt** und **Hermann Künneth**
in Erlangen

Mit 7 Figuren

Vorgelegt am 5. Mai 1967

Einleitung

I. In einer grundlegenden Arbeit hat Herr *Marchaud* [1] als erster die Kontinua C vom Punktordnungswert Drei bezüglich des Systems $\mathfrak{g}$ der Geraden in der (reellen) projektiven) Ebene P_2, in Zeichen $\text{POW}(C; \mathfrak{g}) = 3$, betrachtet; dabei besagt $\text{POW}(C; \mathfrak{g}) = 3$, daß der Durchschnitt von C mit jeder Geraden maximal 3 Punkte enthält. Herr Marchaud zeigt unter anderem: Diese Kontinua C sind mit den Bogen und Kurven von dritter Ordnung (im Sinne von Juel) noch nicht erschöpft; die C besitzen höchstens einen Verzweigungspunkt und sind darstellbar als Vereinigungen von höchstens zwei Bogen B, und jeder Bogen B mit $\text{POW}(B; \mathfrak{g}) = 3$ als Vereinigung von höchstens vier Konvexbogen.

II. Durch die Forderung, daß $\text{POW}(C; \mathfrak{g}) = 3$ sei, sind solche Kontinua aus der Betrachtung ausgeschlossen, in denen Strecken oder Geraden enthalten sind. Solche Kontinua sind insbesondere die Polygone; bei diesen handelt es sich – allgemein zu reden – um Kontinua, die mit jeder Geraden maximal drei Punkte gemeinsam haben, *abgesehen* von den Geraden einer *in* $\mathfrak{g}$ *nirgends dichten* Menge $\mathfrak{n}$. Wir bezeichnen jedes Kontinuum C, für welches

POW$(C; \mathfrak{g} - \mathfrak{n}) = 3$ ist mit einem in $\mathfrak{g}$ nirgends dichten $\mathfrak{n}$, als vom *schwachen Punktordnungswert* Drei, in Zeichen schwPOW$(C; \mathfrak{g}) = 3$.

III. In der vorliegenden und in einer folgenden Mitteilung sollen die Kontinua vom schwachen Punktordnungswert Drei untersucht werden. Dabei beschränken wir uns auf *maximale* Kontinua, d. h. auf solche, die nicht echte Teilkontinua eines Kontinuums C mit schwPOW$(C; \mathfrak{g}) = 3$ sind; diese Beschränkung ermöglicht eine volle Übersicht über die wesentlichen Typen (Gestalten) der Kontinua vom schwPOW 3. Auf eine nähere Untersuchung der *Bogen* und *Kurven* vom schwachen Punktordnungswert Drei (ohne und mit Verzweigungspunkt („Doppelpunkt")) braucht nicht näher eingegangen zu werden, da für sie im wesentlichen die für Kurven (und Bogen) vom Punktordnungswert Drei bekannten Sätze (vgl. H.-K. [1], Absch. 3.2.) gelten.

Unsere Betrachtungen führen wir allgemein für (beliebige) *topologisch (ebene) projektive Ebenen* E durch; dabei tritt an Stelle des Systems $\mathfrak{g}$ der Geraden in P_2 ein System $\mathfrak{k}$ von (einfachen) Kurven K in E derart, daß – kurz gesagt – je zwei verschiedene K genau einen Punkt gemeinsam haben und daß (dual dazu) je zwei verschiedene Punkte in E genau einem K angehören; außerdem ändern sich der gemeinsame Punkt zweier K bzw. das zwei Punkten gemeinsame K stetig mit den beiden K bzw. den beiden Punkten.

IV. Die Eigenschaft eines Kontinuums C mit schwPOW$(C; \mathfrak{k}) = 3$ *maximal* zu sein, besagt, etwas anders ausgedrückt, daß C nicht (echt) zu einem Kontinuum C' mit schwPOW$(C'; \mathfrak{k}) = 3$ erweiterbar ist; man spricht sinngemäß von *ordnungsfester* (echter) *Erweiterbarkeit.*

Entsprechend wie bei schwPOW$(C; \mathfrak{k}) = 3$ kann man auch bei Kontinuen mit POW$(C; \mathfrak{k}) = 3$ nach den maximalen, d. h. nach den ordnungsfest erweiterbaren, fragen. Ein wesentlicher Unterschied gegenüber dem Fall der C mit schwPOW$(C; \mathfrak{k}) = 3$ besteht schon darin, daß beispielsweise zwar jeder Bogen B mit schwPOW$(B; k) = 3$ zu einer *Kurve* ordnungsfest erweiterbar, also nicht maximal ist, während es maximale Bogen B mit POW$(B; \mathfrak{k}) = 3$ gibt. Auf die sich hieraus für den Fall der Kontinua C mit $\mathrm{POW}(C;\mathfrak{k}) = 3$ ergebenden Fragen soll an anderer Stelle eingegangen werden.

Auch auf die entsprechenden Probleme im n-dimensionalen projektiven Raum der Dimension $n \geq 3$ sei hier nur hingewiesen.

§ 1. Bezeichnungen. Definitionen

1.1. Es sei E eine topologisch ebene projektive Ebene (vgl. betr. die im Folgenden auftretenden Begriffe und Sätze vgl. auch H.-K. [1], Nr. 3.1. ff.) Es sei $\mathfrak{k}$ ein System von Ordnungscharakteristiken, kurz OCh, mit der Grundzahl $k = k(\mathfrak{k}) = 2$; es ist $\mathfrak{k}$ Teilmenge des metrischen kompakten Raumes der kompakten Teilmengen von E. Sind $x, y \in E$ mit $x \neq y$, so existiert genau eine OCh $K = K(x, y)$ mit $x, y \in K$. Ist $K_0 \in \mathfrak{k}$, so kann $E_0 = E - K_0$ als topologisch affine Ebene bezeichnet werden. Eine Menge $M \subset E$ heißt (bezüglich K_0 bzw. in E_0) $\mathfrak{k}$-beschränkt, wenn $\bar{M} \cap K_0 = \theta$. Es heißt $M \subset E$ mit $\bar{M} \subset E_0$ $\mathfrak{k}$-konvex, wenn aus $x, y \in M$ folgt, daß $z \in M$ für jedes $z \in K(x, y) \cap E_0$ zwischen x und y. Die Menge dieser z zuzüglich x und y wird als die (abgeschlossene) $\mathfrak{k}$-Strecke $K(x|y) = \overline{K(x|y)}$ mit den *Endpunkten* x, y bezeichnet; $\underset{\sim}{K}(x|y) = K(x|y) - \{x\} - \{y\}$ heiße offene $\mathfrak{k}$-Strecke. Analog sind im Falle eines Bogens B die Bezeichnungen $B(a|b)$ bzw. $\underset{\sim}{B}(a|b)$ zu verstehen, wobei a, b die Endpunkte von B sind. – Unter Bogen und Kurven werden dabei – soweit nicht ausdrücklich Doppelpunkte (Verzweigungspunkte) zugelassen sind – stets „einfache" verstanden, d. h. topologische Strecken- bzw. Kreislinienbilder.

1.1.1. Ist $K \in \mathfrak{k}$, so ist $E_0 - E_0 \cap K$ Vereinigung genau zweier fremder, einfach zusammenhängender Gebiete, der sogenannten Seiten $E_0(+; K)$ und $E_0(-; K)$ von K (in E_0); soweit von „Seiten" einer OCh K die Rede ist, wird, wenn nichts weiter bemerkt ist, stillschweigend auf ein passendes E_0 Bezug genommen.

1.1.2. Es sei M eine Menge (in E), T eine Teilmenge von M und Q eine (Zusammenhangs-)Komponente von $M - T$. Man sagt, es mündet $\acute{Q}$ in $x \in T$ bzw. in T, wenn $x \in \bar{Q}$ bzw. wenn $T \frown \bar{Q} \neq 0$.

1.2. Es sei L eine $\mathfrak{k}$-beschränkte Komponente von $M \frown K$, also L einpunktig oder eine (abgeschlossene oder nicht abgeschlossene) $\mathfrak{k}$-Strecke. Ist L ein- bzw. mehrpunktig, so bezeichnet man L auch als gewöhnlichen bzw. als verlängerten Punkt in $M \frown K$.

Es sei U eine Umgebung von $L \subset E_0$ in E_0 und $Q(L)$ irgend eine, in L mündende Komponente von $(M - M \frown K) \frown U$. Wir unterscheiden die beiden folgenden Fälle:

Erstens. Es liegen alle $Q(L)$ auf der gleichen Seite $E_0(a; K) \frown U$ von K in U. Gibt es genau ein $Q(L)$ oder (mindestens) zwei $Q(L)$, so heiße L eine nicht-innere oder eine innere Stützkomponente von M auf K (in U). Ist L ein- oder mehrpunktig, so spricht man auch von einem gewöhnlichen bzw. verlängerten (nicht-inneren oder inneren) *Stütz*punkt; soweit nicht ausdrücklich etwas anderes bemerkt wird, kann sich also der Ausdruck „Stützpunkt" sowohl auf einen gewöhnlichen als auf einen verlängerten Stützpunkt beziehen. – Zu den nicht-inneren Stützpunkten zählen insbesondere die Endpunkte (im Sinne der topologischen Kurventheorie, vgl. Menger [1], S. S. 99) von M, soweit sie isolierte Punkte in $M \frown K$ sind.

Zweitens. Es gibt (mindestens) zwei $Q(L)$, die auf verschiedenen Seiten von K liegen. Dann heißt L ein (gewöhnlicher bzw. verlängerter) Schnittpunkt.

Mehrere Schnitt- und Stützpunkte gelten als *verschieden* nur, wenn die zu ihnen gehörigen Komponenten L paarweise fremd sind.

1.2.1. Ist L verlängerter Punkt in $M \frown K$, ferner $x \in \underset{\sim}{L}$, mündet $Q(L)$ in x und ist $Q(L)$ ein Bogen, so ist x Verzeigungspunkt (VP) von M (VP im Sinne von Menger [1], S. 99). Dabei heißt also $v \in M$ Verzweigungspunkt von M, wenn in v mehr als zwei, in $M - \{v\}$ enthaltene, paarweise fremde Bogen, etwa $\underset{\sim}{B}_1, \ldots, \underset{\sim}{B}_r$ münden (also $v \in \bar{B}_\varrho$). Die Maximalzahl solcher Bogen, die bei unseren Betrachtungen stets endlich ist, heiße die Verzweigungsordnung (VO(v)) von v (in M). Endpunkte e sind durch VO$(e) = 1$ gekennzeichnet.

1.3. Mit POW$(M \cap K)$ bzw. KOW$(M \cap K)$ und als Punkt- bzw. Komponentenordnungswert von $M \cap K$ wird die Mächtigkeit von $M \cap K$ bzw. die Anzahl der (Zusammenhangs-) Komponenten von $M \cap K$ bezeichnet, ferner mit POW$(M; \mathfrak{k})$ bzw. schwPOW$(M; \mathfrak{k})$ und als Punktordnungswert bzw. schwacher Punktordnungswert *von M* bezüglich $\mathfrak{k}$, das Maximum (falls es existiert) der POW$(M \cap K)$ für alle $K \in \mathfrak{k}$ bzw. für alle $K \in \mathfrak{k} - \mathfrak{n}$, wobei $\mathfrak{n}$ eine (beliebige) in $\mathfrak{k}$ nirgends dichte Teilmenge von $\mathfrak{k}$ bezeichnet. Entsprechend sind KOW$(M; \mathfrak{k})$ bzw. schwKOW$(M; \mathfrak{k})$ zu verstehen.

§ 2. Eigenschaften beliebiger Mengen vom schwPOW Drei

Im Folgenden handelt es sich um Mengen vom schwachen POW Drei, die nicht Kontinua zu sein brauchen.

2.1. Vor. *Es sei* $M \subset E$ *mit* schwPOW $(M; \mathfrak{k}) = 3$ *gegeben. Ferner sei* $B = \bar{B} = B(v \mid w)$ *ein* $\mathfrak{k}$*-beschränkter Bogen, der in* M *enthalten ist.*

Beh. (1) *Für jede* OCh K *besitzt* $B \cap K$ *höchstens drei (ein- oder mehrpunktige) Komponenten; es ist also* KOW$(B; \mathfrak{k}) \leq 3$.

(2) *Ist* $v \in B \cap K$ *mit* $K \in \mathfrak{k}$, *so gibt es eine Umgebung* V *von* v *auf* B *derart, daß entweder* $V \subset K$ *oder daß* $\underset{\sim}{V} \subset E_0(\alpha; K)$, $\alpha = \pm$.

(2a) *Ist* $V \subset K$, *so gilt für jedes zu* K *hinreichend benachbarte* $K' \in \mathfrak{k}$ *mit* $v \in K'$: *Es ist* $\underset{\sim}{V} \subset E_0(\alpha; K')$ *für geeignetes* $\alpha = \pm$.

Zusatz. Die Beh. (1)–(2a) bleiben richtig, wenn an Stelle von B ein $\mathfrak{k}$-beschränktes Kontinuum $C \subset M$ tritt, das höchstens zwei Endpunkte besitzt und wobei v Endpunkt von C sein soll.

Bew. *Betr. Beh.* (1), *zugleich für den Zusatz.* Jedes Kontinuum C im Sinne des Zusatzes ist kompakt (in E_0) speziell ist $B = \bar{B}$ ein C. Wegen $C \subset M$ ist schwPOW $(C; \mathfrak{k}) \leq$ schwPOW $(M; \mathfrak{k}) = 3$. Da C höchstens 2 Endpunkte besitzt (B besitzt genau 2 Endpunkte) ist C $\mathfrak{k}$-reduzibel (im Sinne von H.-K. [1], Nr. 1.4.3.; vgl. dort Beispiele vor dem Reduktionssatz, für $k = 2$). Gemäß

H.-K. [1], Nr. 1.4.2., Satz 2., ist ferner $\mathrm{KOW}(C; \mathfrak{k}) < 7$, weil $\mathrm{schwPOW}(C; \mathfrak{k}) = \mathrm{schwKOW}(C; \mathfrak{k}) \leq 3$; es ist also $\mathrm{KOW}(C; \mathfrak{k})$ höchstens endlich (sogar beschränkt). Daher folgt $\mathrm{KOW}(C; \mathfrak{k}) \leq 3$ (gemäß H.-K. [1], Nr. 1.4.3., Satz, Beh. (2)).

Betr. Beh. (2) *und* (2a). Es sei jetzt v Endpunkt von C und $v \in C \cap K$. Wegen $\mathrm{KOW}(C; \mathfrak{k}) \leq 3$ enthält $C \cap K$ nicht mehr als 3 Komponenten. Gibt es daher unter diesen Komponenten von $C \cap K$ keine in v mündende, so ist eine Umgebung V von v auf $C - \{v\}$ fremd zu K, wobei $V = \underset{\sim}{V}$ als Bogen angenommen werden kann, da v Endpunkt ist. Ist aber $V \subset K$, so gilt $V \subset \subset E_0(\alpha; K')$.

Anmerkung. Besitzt die Menge R mit $\mathrm{schwPOW}(R; \mathfrak{k}) = 3$ mehr als zwei Endpunkte, so ist $\mathrm{KOW}(R; \mathfrak{k} - \mathfrak{c}) = 3$, wenn $\mathfrak{c}$ die Menge derjenigen OCh ist, für die $R \cap K$ entweder einen Schnittpunkt und 3 nicht-innere Stützpunkte enthält oder 4 nicht-innere Stützpunkte.

Bew. Durch Diskussion der einzelnen Möglichkeiten betr. $R \cap K$ für beliebige OCh K. Man sieht dann, daß $\mathrm{KOW}(R \cap K) \leq \leq 3$ ist bis auf höchstens die $K \in \mathfrak{c}$.

2.2. Vor. *Es sei* $R \subset E_0$ *mit* $\mathrm{schwPOW}(R; \mathfrak{k}) = 3$ *und* $v \in R$ *sei Verzweigungspunkt von* R. *Weiter sei* $K \in \mathfrak{k}$ *mit* $v \in K$.

Beh. *Ist* $x \in (K - \{v\}) \cap E_0$ *und* X *eine hinreichend kleine Umgebung von* x *in* E_0, *ist ferner* $y \in X' = X - X \cap K$ *beliebig gewählt, so gibt es zur* OCh $K(y, v)$ *beliebig benachbarte* OCh K' *mit* $y \in K'$ *derart, daß* $R \cap K'$ *(mindestens) zwei (verschiedene) zu* v *beliebig benachbarte Schnittpunkte enthält.*

Bew. Es sei $K'' = K(y, v) \in \mathfrak{k}$ gesetzt. Wegen $\mathrm{VO}(v) \geq 3$ existieren (mindestens) 3 paarweise fremde, in v mündende, in R enthaltene Bogen $\underset{\sim}{B}_i$, $i = 1, 2, 3$,; o. B. d. A. werden diese $\underset{\sim}{B}_i$ jeweils als hinreichend klein angenommen. Gemäß Nr. 2.1 liegt jedes $\underset{\sim}{B}_i$ in der Nähe von v ganz auf einer Seite von K'' und zwar für jedes y bzw. K'' mit Ausnahme von höchstens drei der K''; für hinreichend kleines X gehört daher für jedes $y \in X'$ kein K''

zu einer dieser 3 Ausnahme OCH K''. Daher liegen für jedes K'' mindestens 2 der $\underset{\sim}{B}_i$ in der Nähe von v auf der gleichen Seite von K''; es seien dies etwa $\underset{\sim}{B}_1$, $\underset{\sim}{B}_2$. Folglich ist v innerer Stützpunkt von $B_1 \cup B_2$ auf K'', woraus (vgl. H.-K. [1] Nr. 1.3.5., angewandt auf B) die Beh. folgt.

2.3. *Ist v Verzweigungspunkt von R, wobei* schwPOW $(R; \mathfrak{k}) = 3$, *so hat jede v enthaltende* OCh K *mit $R - \{v\}$ höchstens einen Schnitt- und keinen inneren Stützpunkt gemeinsam.*

Bew. Indirekt. – (1) Es seien zwei Schnittpunkte in $R \cap \underset{\sim}{K}$ vorhanden, wobei $\underset{\sim}{K} = K - \{v\}$ gesetzt ist. Dann gibt es (gewöhnliche oder verlängerte) Punkte in $R \cap \underset{\sim}{K}$, etwa L', L'' mit $L' \cap L'' = 0$ und Komponenten Q_i' bzw. Q_i'', $i = 1, 2$, von $R - R \cap K$, die in L' bzw. in L'' münden und wobei Q_1', Q_2' bzw. Q_1'', Q_2'' je auf verschiedenen Seiten von K liegen. Ist dann $y \in Q_1'$ hinreichend benachbart zu L', so enthält $Q_1' \cap K(v, y)$ und eines der $Q_i'' \cap K(v, y)$ je einen zu v fremden Schnittpunkt (vgl. dazu ev. H.-K. [1], Nr. 1.3.5.). Gemäß Nr. 2.2. enthält ein zu $K(v, y)$ hinreichend benachbartes (geeignet gewähltes) $K' \in \mathfrak{k}$ mit $y \in K'$ mindestens zwei Schnittpunkte in $V \cap K'$, wobei V eine Umgebung von v auf $R - \{v\}$ bezeichnet, und $V \cap Q_i' = V \cap Q_i'' = 0$, $i = 1, 2$. Da auch $Q_1' \cap K'$ und eines der $Q_i'' \cap K'$ je einen Schnittpunkt enthält, liefert $R \cap K''$ für jedes $K'' \in \mathfrak{u}$, wobei $\mathfrak{u}$ eine in $\mathfrak{k}$ offene (K' enthaltende) Menge ist, mindestens 4 Schnittpunkte, so daß KOW $(R; \mathfrak{u}) \geq 4$ im Widerspruch zu schwPOW $(R; \mathfrak{k})$ = schwKOW $(R; \mathfrak{k}) = 3$.

(2) Ist ein innerer Stützpunkt in $R \cap \underset{\sim}{K}$ vorhanden, so gibt es eine, ev. einpunktige Komponente L von $R \cap \underset{\sim}{K}$, in welcher zwei Komponenten Q', Q'' von $R - R \cap K$ münden und wobei Q' und Q'' in der Nähe von L auf der gleichen Seite von K liegen. Wegen $v \notin L$ enthält für ein zu L hinreichend benachbartes $y \in Q'$ die OCh $K(v, y)$ wieder mindestens zwei Schnittpunkte in $(Q' \cup Q'') \cap K(v, y)$. Daher ergibt sich wie in Ziff. (1) ein Widerspruch.

2.3.1. Vor. *Es sei $M \subset E$ mit* schwPOW $(M; \mathfrak{k}) = 3$. *Ferner sei v ein Verzweigungspunkt von M und K eine Ordnungscharakteristik mit $v \in K$.*

Beh. (1) *In $K - \{v\}$ münden höchstens zwei zu K (und untereinander) fremde Teilbogen von M.* – (2) *Im Falle zwei (fremde) Teilbogen $\underset{\sim}{B}_1, \underset{\sim}{B}_2 \subset M - M \frown K$ in $K - \{v\}$ münden, und zwar $\underset{\sim}{B}_i$ etwa in $x_i \in (K - \{v\}) \frown E_0$, $i = 1, 2$, gilt: Werden x_1, x_2 auf $K \frown E_0$ durch v getrennt bzw. nicht getrennt, so liegen $\underset{\sim}{B}_1$ und $\underset{\sim}{B}_2$ in der Nähe von x_1 bzw. von x_2 auf der gleichen Seite von $K \frown E_0$ bzw. auf verschiedenen Seiten von $K \frown E_0$.* (Dabei ist $x_1 = x_2$ zuzulassen).

Bew. Es mögen x_1, x_2 auf $K \frown E_0$ nicht durch v getrennt werden. Würden dann Umgebungen von x_1 bzw. von x_2 auf $\underset{\sim}{B}_1$ bzw. auf $\underset{\sim}{B}_2$ auf der gleichen Seite von $K \frown E_0$ liegen, so gäbe es zu K beliebig benachbarte $K' \in \mathfrak{k}$ mit $v \in K'$ und $\underset{\sim}{B}_i \frown K' \neq 0$, $i = 1, 2$, im Widerspruch zu Nr. 2.3. Entsprechend schließt man, wenn x_1, x_2 durch v auf $K \frown E_0$ getrennt werden. Ebenso ergibt sich die Beh. (1).

2.4. Satz. Vor. *Es besitze R den* schwPOW$(R; \mathfrak{k}) = 3$ *und mindestens zwei Verzweigungspunkte, etwa v' und v''.*

Beh. (1) *Die Verzweigungsordnung* VO(v) *eines jeden Verzweigungspunktes v von R ist* 3 *oder* 4.

(2) *Unter den Komponenten von $R - \{v'\} - \{v''\}$ gibt es sowohl mindestens eine und höchstens zwei $\mathfrak{k}$-Strecken $S' \subset \subset K(v', v'') \in \mathfrak{k}$ mit v' als Endpunkt als auch (mindestens) eine und höchstens zwei $\mathfrak{k}$-Strecken $S'' \subset K(v', v'')$ mit v'' als Endpunkt.*

(3) *In v' bzw. in v'' münden mindestens eine und höchstens zwei Komponenten Q' bzw. Q'' von $R - R \frown K(v', v'')$. Existieren zwei Komponenten Q', so liegen sie (in der Nähe von v') auf verschiedenen Seiten von $K(v', v'')$. Gleiches gilt für zwei, etwa existierende Q''. Besitzt also etwa v' die* VO 4, *so münden in v' genau zwei $\mathfrak{k}$-Strecken S'.*

(4) *In $\underset{\sim}{K} = K(v', v'') - \{v'\} - \{v''\}$ mündet höchstens eine Komponente Q von $R - R \frown K(v', v'')$. Existiert ein solches Q und mündet Q in der Komponente L von $R \frown \underset{\sim}{K}$, so existiert genau ein in v' und genau ein in v'' mündendes Q' bzw. Q''* (vgl. Beh. (3)). *Werden die v', v'', L in ihrer, einer Orientierung von $K(v', v'')$ entsprechenden Reihenfolge mit L_1, L_2, L_3 bezeichnet und die in*

L_i mündende Komponente unter den Q', Q'', Q mit Q_i, so gilt: Es liegen Q_i und Q_{i+1} (in der Nähe von L_i) auf entgegengesetzten Seiten von $K(v', v'')$, $i = 1, 2, 3$; $i + 3 = i$.

Zusatz. Besitzt R einen Verzweigungspunkt der Verzweigungsordnung größer als Vier, so keinen anderen Verzweigungspunkt (vgl. dazu auch Nr. 2.6., Satz. Beh. (1)). (Folgt aus Beh. (1))

Bew. *Betr. Beh.* (1). Indirekt. O. B. d. A. sei $v = v'$. Wir setzen $K = K(v', v'')$. Es sei also VO $(v) \geq 5$, so daß etwa fünf Bogen $\underset{\sim}{B}_i \subset R - \{v\}$ in v münden, wobei $\underset{\sim}{B}_i \cap \underset{\sim}{B}_j = \theta$ für $i \neq j$; $i, j = 1, \ldots, 5$. Gemäß Nr. 2.1. liegen (in der Nähe von v) mindestens 3 der $\underset{\sim}{B}_i$ in $R - R \cap K$, also mindestens 2, etwa $\underset{\sim}{B}_1$, $\underset{\sim}{B}_2$ auf der gleichen Seite von K. Dann ist aber v innerer Stützpunkt des Teilbogens $B_1 \cup B_2$ von R auf K. Gemäß Nr. 2.3., angewandt auf $v = v''$, $K = K(v', v'')$, ergibt sich ein Widerspruch.

Betr. Beh. (2). Indirekt. Andernfalls münden z. B. in v' (mindestens) 3 zu $K = K(v', v'')$ fremde Bogen $\underset{\sim}{B}'_i$ in v', von denen also (mindestens) 2, etwa $\underset{\sim}{B}_1$, $\underset{\sim}{B}_2$ auf der gleichen Seite von K liegen (in der Nähe von v'). Wie beim Bew. der Beh. (1) ergibt sich ein Widerspruch.

Betr. Beh. (3) und (4). Unmittelbare Folgen aus Nr. 2.3.1.

2.5. *Für jede Menge R mit* schwPOW $(R; \mathfrak{k}) = 3$ *gilt:* (I) *Keine vier Verzweigungspunkte von R liegen auf einer Ordnungscharakteristik.* – (II) *Es besitzt R höchstens vier Verzweigungspunkte.*

Bew. *Betr. Beh.* (I) Indirekt. Liegen die vier VP v_i, $i = 1, \ldots, 4$, von R auf der OCh K, so sei o. B. d. A. $v_i \in K \cap E_0$, $i = 1, \ldots, 4$, und die Reihenfolge v_1, v_2, v_3, v_4 entspreche einer Orientierung von K. Wegen VO $(v_i) \geq 3$ gibt es zu v_i (mindestens) einen Bogen $\underset{\sim}{B}_i \subset R \cap E_0(\alpha_i; K)$, der in v_i mündet; $\alpha_i = \pm$. Da mindestens zwei dieser α_1, α_2, α_3 gleich sind, folgt ein Widerspruch zu Nr. 2.3.1.

Betr. Beh. (II). Besitzt R (mindestens) 5 VP v_i, $i = 1, \ldots, 5$, so liegen (gemäß Beh. (I)) je höchstens 3 auf der gleichen OCh. Wir unterscheiden: *Fall* (II 1). Es gibt ein v_i, etwa v_1, welches mit keinen zweien der übrigen $v_2, \ldots, v_5$ auf der gleichen OCh liegt. – *Fall* (II 2). Jedes der v_i liegt mit zweien der übrigen in einer OCh.

Betr. Fall (II 1). Die 4 OCh $K_j = K(v_1, v_j)$, $j = 2, \ldots, 5$, sind also verschieden. Gemäß Nr. 2.4., Beh. (2), enthält $R \cap K_j$ eine $\mathfrak{k}$-Strecke S_j mit v_1 als Endpunkt. Daher ist VO$(v_1) = 4$; es liegen aber keine zwei der S_j auf der gleichen OCh im Widerspruch mit Nr. 2.4., Beh. (3).

Betr. Fall (II 2). O. B. d. A. sei $v_3 \in K(v_1, v_2) \cap K(v_4, v_5)$. Dann sind die 4 OCh $K(v_1, v_4)$, $K(v_1, v_5)$, $K(v_2, v_4)$, $K(v_2, v_5)$ untereinander und von $K(v_1, v_2)$ verschieden. Gemäß Nr. 2.4., Beh. (2), (3), münden also sowohl in v_1 als in v_2 je zwei zu $K(v_1, v_2)$ und untereinander fremde $\mathfrak{k}$-Strecken. Setzt man $v = v_3$, $K = K(v_1, v_3) = K(v_1, v_2)$, so ergibt sich ein Widerspruch zu Nr. 2.3.1., Beh. (1).

2.6. Satz. Vor. *Es sei $R \subset E$ mit* schwPOW$(R; \mathfrak{k}) = 3$. *Ferner sei v Verzweigungspunkt von R.*

Beh. (1) *Für die Verzweigungsordnung* VO(v) *von v gilt* $3 \leq \text{VO}(v) \leq 6$.

(2) *Ist* $5 \leq \text{VO}(v) \leq 6$, *so ist jeder in v mündende Teilbogen von R eine $\mathfrak{k}$-Strecke.* – (2 a) *Im Fall* VO$(v) = 6$ *bilden die* 6 *in v mündenden $\mathfrak{k}$-Strecken* 3 *Paare derart, daß jedes Paar der gleichen Ordnungscharakteristik angehört.* – (2 b) *Im Fall* VO$(v) = 5$ *liegt in keinem der, durch zwei in v mündende $\mathfrak{k}$-Strecken gebildeten $\mathfrak{k}$-konvexen Winkelräume mehr als eine der übrigen $\mathfrak{k}$-Strecken.* (Vgl. auch die Formulierung in Nr. 3.2.2., Satz, Beh. (III)). Gemäß Nr. 2.4, Zusatz, ist v der einzige Verzweigungspunkt von R.

Zusatz. Alle vier Fälle $3 \leq \text{VO}(v) \leq 6$ treten bei Kontinuen C mit schwPOW$(C; \mathfrak{k}) = 3$ auf (vgl. § 3.)

Bew. *Betr. Beh.* (1). Indirekt. Münden (mindestens) 7 paarweise fremde Bogen $\underset{\sim}{B}_i \subset R$ in v, $i = 1, \ldots, 7$, so gibt es gemäß Nr. 2.1. solche OCh K, daß für jedes i eine Umgebung U_i von v auf $\underset{\sim}{B}_i$ in $E_0(\alpha_i; K)$ liegt, also (mindestens) 4 der U_i im gleichen $E_0(\alpha; K)$. Dann gibt es aber beliebig nahe bei K in $\mathfrak{k}$ ein offenes $\mathfrak{o}$

so, daß $R \cap K'$ mindestens 4 Schnittpunkte enthält für jedes $K' \in \mathfrak{o}$; dies folgt aus bekannten Sätzen (vgl. H.-K. [1], Nr. 1.3.5.) Es ist aber $\mathfrak{o}$ nicht nirgends dicht in $\mathfrak{k}$; und andererseits ist KOW $(R; \mathfrak{o}) \geq 4$ im Widerspruch zu schwPOW $(R; \mathfrak{k}) =$ $=$ schwKOW $(R; \mathfrak{k}) = 3$.

Betr. Beh. (2). Falls $5 \leq \mathrm{VO}\,(v) \leq 6$ ist, gibt es in v mündende Teilbogen von $R - \{v\}$, etwa $\underset{\sim}{B}_i$, $i = 1, \ldots, 5$. Ist z. B. $\underset{\sim}{B}_5$ keine $\mathfrak{k}$-Strecke, so gibt es K' mit $v \in K'$ so, daß $\underset{\sim}{B}_5 \cap K'$ einen, zu v fremden Schnittpunkt enthält. Gemäß Nr. 2.1. kann K' überdies so gewählt werden, daß $U_i \subset E_0\,(\alpha_i; K')$ gilt für Umgebungen U_i von v auf $\underset{\sim}{B}_i$, $i = 1, \ldots, 5$. Wie beim Bew. von Beh. (1) ergibt sich die Existenz eines in $\mathfrak{k}$ offenen $\mathfrak{o}$ derart, daß mindestens 3 der $U_i \cap K''$, $i = 1, \ldots, 5$, je einen Schnittpunkt enthalten und $(\underset{\sim}{B}_5 - \underset{\sim}{U}_5) \cap K''$ einen Schnittpunkt für jedes $K'' \in \mathfrak{o}$. (letzteres gemäß H.-K. [1], Nr. 1.3.4.). Es ergibt sich also KOW $(R; \mathfrak{k}) \geq$ $\geq$ KOW $(R; \mathfrak{o}) \geq 4$ im Widerspruch zu schwKOW $(R; \mathfrak{k}) = 3$.

Betr. Beh. (2a). Gemäß Beh. (2) münden in v die 6 $\mathfrak{k}$-Strecken $\underset{\sim}{B}_i$, $i = 1, \ldots, 6$. Liegt etwa $\underset{\sim}{B}_1$ mit keinem der $\underset{\sim}{B}_2, \ldots, \underset{\sim}{B}_6$ auf der gleichen OCh, während $\underset{\sim}{B}_1 \subset K_1 \in \mathfrak{k}$ ist, so liegen mindestens 3 der $\underset{\sim}{B}_2, \ldots, \underset{\sim}{B}_6$, etwa $\underset{\sim}{B}_2$, $\underset{\sim}{B}_3$, $\underset{\sim}{B}_4$ auf der gleichen Seite $E_0\,(\alpha; K_1)$ von K_1. Gemäß Nr. 2.1. gibt es zu K_1 beliebig benachbarte $K' \in \mathfrak{k}$, so daß $\underset{\sim}{B}_1, \ldots, \underset{\sim}{B}_4 \subset E_0\,(\beta; K')$ und $v \in K'$. Wie beim Bew. betr. Beh. (1) ergibt sich ein Widerspruch.

Betr. Beh. (2b). Andernfalls gibt es eine OCh K derart, daß Umgebungen von v auf vieren unter den $\underset{\sim}{B}_1, \ldots, \underset{\sim}{B}_5$ auf der gleichen Seite von K liegen, so daß man wie oben schließen kann.

§ 3. Kontinua vom schwachen Punktordnungswert Drei

3.1. Allgemeines.

3.1.1. Satz. *Jedes Kontinuum C mit* schwPOW $(C; \mathfrak{k}) = 3$ *ist endliche Bogensumme. Die Anzahl der Endpunkte von C besitzt eine, von C unabhängige obere Schranke; gleiches gilt für die minimale Anzahl der bis auf Endpunkte fremden Bogen, als deren Vereinigung sich C darstellen läßt.*

Bew. Zufolge Nr. 2.5. existieren höchstens 4 VP, deren VO, gemäß Nr. 2.6., höchstens 6 ist. Zufolge Menger [1], S. 266, folgt aus der Kompaktheit von C die Darstellbarkeit von C als endliche Bogensumme. Jeder Endpunkt von C ist Endpunkt eines Bogens, der in einem VP mündet. Daher ist die Anzahl der Endpunkte nicht größer als die Summe der VO der VP von C, also nicht größer als max $(6, 4 \cdot 4)$ (gemäß Nr. 2.4., Zusatz, sowie Nr. 2.5.)

Anmerkung. Es gibt Bogen B mit schwPOW $(B; \mathfrak{k}) = 3$, sogar offene Polygone B, zu denen eine OCh K existiert derart, daß $B \frown K$ drei mehrpunktige Komponenten enthält (von denen zwei die Endpunkte von B enthalten und die dritte eine innere Stützkomponente ist) (vgl. die Figur 1). Dagegen hat jede *Kurve* C mit schwPOW $(C; \mathfrak{k}) = 3$ auf keinem $C \frown$ K drei mehrpunktige Komponenten.

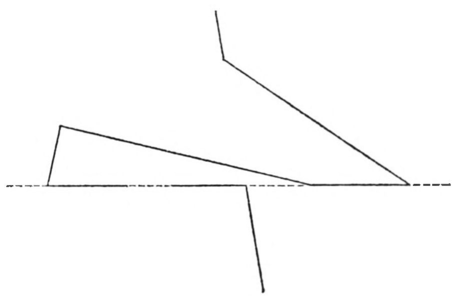

Fig. 1

3.1.2.. *In jedem inneren Punkt eines Bogens B mit* schwPOW $(B; \mathfrak{k}) = 3$ *existiert eindeutig die vordere und die hintere* $\mathfrak{k}$-*Halbtangente an B, in jedem Endpunkt von B nur eine von diesen beiden.*

Bew. Wie in H.-K. [1], Nr. 3.1.6., Satz 1; Bew. für Beh. (1), wobei hier KOW $(B; \mathfrak{k}) = 3$ (vgl. Nr. 2.1., Beh. (1)) an Stelle von KOW $(B; \mathfrak{k}) < 5$ tritt.

Zusatz. Die Beh. und der Beweis gelten allgemein für Bogen B in E mit beschränktem KOW $(B; \mathfrak{k})$, insbesondere für schwPOW$(B; \mathfrak{k}) = 2$ (vgl. H.-K. [1] a. a. O.).

3.1.3. Da gemäß Nr. 3.1.2. nebst Zusatz, in jedem Punkt eines jeden Teilbogens T des Kontinuums C mit schwPOW $(C; \mathfrak{k}) = 3$ die vordere bzw. hintere $\mathfrak{k}$-Halbtangente existiert, definiert man die Begriffe: $\mathfrak{k}$-Dorn und $\mathfrak{k}$-Dornspitze (sowie $\mathfrak{k}$-Schnabel und $\mathfrak{k}$-Wendepunkt) in naheliegender Weise genau durch die in H.-K. [1], Nr. 3.2.2., Satz, angegebenen Eigenschaften. Sind also $B', B'' \subset E_0$ (abgeschlossene, hinreichend kleine) Teilbogen von C, deren keiner eine $\mathfrak{k}$-Strecke ist und für die $\{d\} = B' \cap B''$ gilt, wobei d kein Verzweigungspunkt von C ist, so heißt d ein $\mathfrak{k}$-Dorn bzw. eine $\mathfrak{k}$-Dornspitze, wenn folgendes gilt: Es seien Th' bzw. Th'' die $\mathfrak{k}$-Halbtangenten in d an B' bzw. an B''; ferner seien T' bzw. T'' die Träger von Th' bzw. von Th'', also $Th' \subset T' \in \mathfrak{k}$ bzw. $Th'' \subset T'' \in \mathfrak{k}$. Im Fall eines $\mathfrak{k}$-Dorns soll $T' \neq T''$ sein und es soll $B' \cup B''$ fremd sein zu dem $\mathfrak{k}$-konvexen, von $Th' \cup Th''$ in E_0 begrenzten offenen $\mathfrak{k}$-Winkelraum $W(d) \subset E_0$ und seinem $\mathfrak{k}$-Scheitelwinkelraum. Im Fall einer $\mathfrak{k}$-Dornspitze d sei $Th' = Th''$ und es sollen B', B'' auf verschiedenen abgeschlossenen Seiten von $T' = T''$ (in E_0) liegen.

Entsprechend dem bekannten Satz vom Fehlen von Dornen bei Kurven 3. Ordnung mit Doppelpunkt gilt allgemein der

Satz. *Besitzt das Kontinuum C mit* schwPOW $(C; \mathfrak{k}) = 3$ *(mindestens) einen Verzweigungspunkt, so keinen $\mathfrak{k}$-Dorn (und keine $\mathfrak{k}$-Dornspitze).*

Bew. (1) Es sei $d \in C$ ein $\mathfrak{k}$-Dorn und $v \in C$ sei ein VP von C. Es sei W das abgeschlossene, $W(d)$ enthaltende Dieder in E (begrenzt von $T' \cup T''$). Durch jedes $x \in E - W$ gehen OCh, die mit einer Umgebung von d auf C zwei Schnittpunkte (ev. verlängerte) gemeinsam haben, nämlich je einen mit $\underset{\sim}{B}'$ und einen mit $\underset{\sim}{B}''$. Gemäß Nr. 2.3. muß daher $v \in W$ gelten. Da aber C ein Kontinuum ist, gilt $(T' \cup T'' - \{d\}) \cap C \neq \emptyset$, so daß $x \in C \cap (E - W)$ beliebig nahe bei $T' \cup T'' - \{d\}$ existieren. Es gibt aber $K' \in \mathfrak{k}$ mit $x \in K'$ und mit mindestens 3, zu d benachbarten Schnittpunkten in $C \cap K'$. Da – erforderlichenfalls – für geeignetes, zu K' beliebig benachbartes K'' ein von den übrigen 3 verschiedener Schnittpunkt an Stelle von x tritt, ergibt sich ein Widerspruch mit schwPOW $(C; \mathfrak{k}) = 3$. – (2) Für den

Fall einer Dornspitze schließt man analog auf die Existenz eines $x \in C \frown (E - T')$ in der Nähe eines $z \in C \frown (T' - \{d\})$.

3.2. Kontinua C vom schwPOW $(C; \mathfrak{k}) = 3$, deren von Verzweigungspunkten freie offene Teilbogen sämtlich $\mathfrak{k}$-Strecken sind.

Definition. Ein Kontinuum C mit schwPOW $(C; \mathfrak{k}) = 3$ heiße maximal (bezüglich des schwPOW $= 3$), wenn C nicht echter Teil eines Kontinuums C' mit schwPOW $(C'; \mathfrak{k}) = 3$ ist.

3.2.1. Satz. Vor. *Es sei C ein Kontinuum mit* schwPOW $(C; \mathfrak{k}) = 3$, *welches einen Verzweigungspunkt v der Verzweigungsordnung* VO $(v) = 6$ *besitzt.*

Beh. *Es ist C Vereinigung von 6 in v mündenden $\mathfrak{k}$-Strecken, die paarweise auf einer Ordnungscharakteristik liegen und zusammen diese OCh ausfüllen können. Die maximalen unter diesen Kontinuen C sind die Vereinigungen von je drei Ordnungscharakteristiken, die sich im Verzweigungspunkt v schneiden. (Figur 2).*

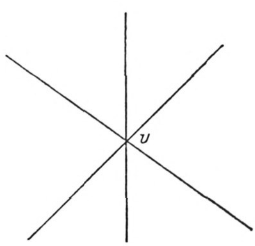

Fig. 2

Bew. Folgt aus Nr. 2.6. und Nr. 2.4., Zusatz.

3.2.2. Satz. Vor. *Es sei C ein Kontinuum mit* schwPOW$(C; \mathfrak{k}) = 3$, *welches einen Verzweigungspunkt v mit der Verzweigungsordnung* VO $(v) = 5$ *besitzt.*

Beh. *Es ist v der einzige Verzweigungspunkt von C. Und es ist C Vereinigung von 5 in v mündenden $\mathfrak{k}$-Strecken B_i, $i = 1, \ldots, 5$, wobei etwa $B_i \subset K_i \in \mathfrak{k}$ sein möge. Wir unterscheiden folgende 3, alle Möglichkeiten umfassende* Typen:

(I) *Es ist* $K_1 = K_2$ *und* $K_3 = K_4$, *während* $K_5 \neq K_j$, $j = 1, 2, 3, 4$ *ist. Dann ist jedes C dieses Typus* (I) *echtes Teilkontinuum von* $K_1 \cup K_3 \cup K_5$. *Es gibt also keine maximalen Kontinua dieses Typus* (I). *(Figur 3).*

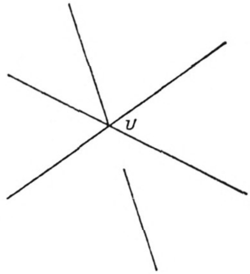

Fig. 3

(II) *Es ist* $K_1 = K_2$ *und die übrigen* K_3, K_4, K_5 *sind von* K_1 *und untereinander verschieden. Bei geeigneter Numerierung der* $\underset{\sim}{B}_i$ *liegen* $\underset{\sim}{B}_3$ *und* $\underset{\sim}{B}_4$ *(in der Nähe von* v*) auf der gleichen Seite* $E_0(\alpha; K_1)$ *von* K_1 *bezüglich eines* $E_0 = E - K_0$ *mit* $v \notin K_0 \in \mathfrak{k}$. *Dagegen liegt* $\underset{\sim}{B}_5$ *(in der Nähe von* v*) auf der entgegengesetzten*

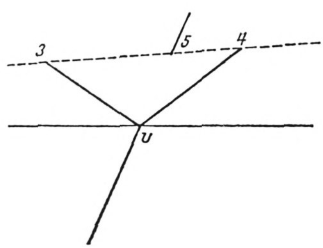

Fig. 4

Seite $E_0(-\alpha; K_1)$ *von* K_1, *aber im* $\mathfrak{k}$*-Scheitelwinkelraum (bezüglich* E_0*) des von* $B_3 \cap B_4$ *bestimmten (in* E_0*)* $\mathfrak{k}$*-konvexen* $\mathfrak{k}$*-Winkelraumes. Maximal sind diejenigen Kontinua dieses Typus* (II), *in welchen* K_1 *enthalten ist und wobei der von* v *verschiedene Endpunkt des* B_5 *auf derjenigen Ordnungscharakteristik liegt, welche die von* v *verschiedenen Endpunkte von* B_3, B_4 *verbindet. (Figur 4).*

(III) *Alle* $K_1, \ldots, K_5$ *sind verschieden.* Die *Reihenfolge* B_1, B_2, B_3, B_4, B_5 *entspreche einer zyklischen Anordnung um* v;[1] *demgemäß sei* $B_{i+5} = B_i$ *gesetzt,* $i = 1, \ldots, 5$. *Es sei* $B_i = B(v \mid e_i)$. *Bezüglich eines* K_0 *mit* $v \notin K_0$ *bzw. des zugehörigen* $E_0 = E - K_0$ *gilt dann: Der, eine Umgebung von* v *auf* B_{i+1} *enthaltene* $\mathfrak{k}$-*Winkelraum* W_i, *auf dessen Begrenzung* $(B_i \cup B_{i+2}) \cap E_0$ *oder eine Teilmenge davon liegt, ist* $\mathfrak{k}$-*konvex. Ist ferner* $e'_j = K(e_1, e_2) \cap K_j$, $j = 3, 4, 5$, *so entspricht die Reihenfolge* $e'_3, e_1, e'_4, e_2, e'_5$ *auf* $K(e_1, e_2)$ *einer Orientierung von* $K(e_1, e_2)$ *und es ist* $B_j = K_j(v \mid e_j) \subset K_j(v \mid e'_j)$, $j = 3, 4, 5$. *Ein Kontinuum* C *vom Typus* (III) *ist* **maximal** *genau dann, wenn* $e_j = e'_j$, $j = 3, 4, 5$, *ist. (Figur 5).*

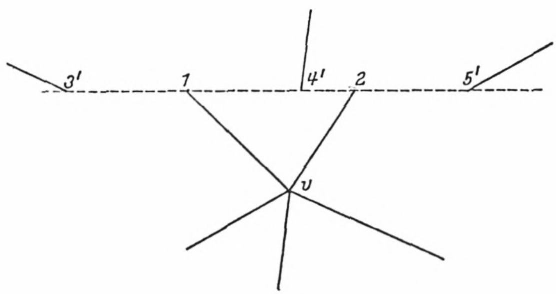

Fig. 5

Bew. Daß C genau einen VP und nur $\mathfrak{k}$-Strecken bzw. OCh enthält, folgt aus Nr. 2.4., Zusatz, und N. 2.6., Satz, Beh. (2). – *Betr. Typus* (I) und (II). Klar. – *Betr. Typus* (III). Die Beh. bezüglich der W_i und der Anordnung der e'_j auf $K(e_1, e_2)$ folgt aus Nr. 2.6., Beh. (2b). Die Bedingung $B_j \subset K_j(v \mid e'_j)$ ist notwendig und hinreichend dafür, daß kein in $\mathfrak{k}$ nicht nirgends dichtes $\mathfrak{d} \subset \mathfrak{k}$ existiert mit KOW$(C; \mathfrak{d}) \geq 4$.

3.2.3. Satz. Vor. *Es sei* C *ein Kontinuum mit* schwPOW$(C; \mathfrak{k}) = 3$ *und mit genau vier Verzweigungspunkten* v_i, $i = 1, \ldots, 4$. *Mit* $S(i \mid j)$, $i \neq j$, *sei eine der beiden, von* v_i *und* v_j *begrenzten* $\mathfrak{k}$-*Strecken bezeichnet.*

---

[1] Die $B_1, \ldots B_5$ sind in dieser Reihenfolge zyklisch angeordnet, wenn folgendes gilt: Es sei D ein $\mathfrak{k}$-Dreieck, in dessen Inneren v liegt. Dann soll die Reihenfolge der Punkte $B_1 \cap D$, $B_2 \cap D$, $B_3 \cap D$, $B_4 \cap D$, $B_5 \cap D$ einer Orientierung von D entsprechen.

Beh. (I) *Liegen keine drei der Verzweigungspunkte v_i auf der gleichen Ordnungscharakteristik, so ist jedes maximale C Vereinigung von 6 paarweise bis auf Endpunkte fremden unter den $S(i|j)$ derart, daß durch diese $S(i|j)$ jedes v_i mit jedem*

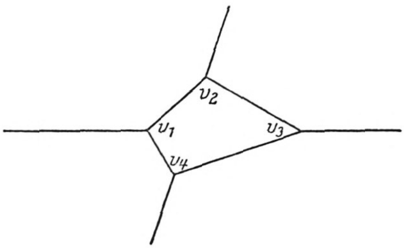

Fig. 6

anderen v_i verbunden wird. Jedes maximale C ist Vereinigung von drei $\mathfrak{k}$-*konvexen Vierecken* ($\mathfrak{k}$-*Polygonen*), *die paarweise zwei gegenüberliegende Seiten gemeinsam haben. Die Verzweigungsordnungen der v_i sind alle gleich Drei. (Figur 6).*

(II) *Liegen etwa v_1, v_2, v_3 in der Ordnungscharakteristik K, so ist jedes maximale C Vereinigung von K mit* $\mathfrak{k}$-*Strecken* $S(1|4)$, $S(2|4)$, $S(3|4)$. *Dabei kann o. B. d. A. E_0 so angenommen und*

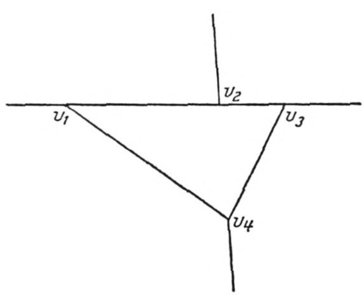

Fig. 7

die Numerierung der v_i auf K so gewählt werden, daß v_2 auf $K \cap E_0$ zwischen v_1 und v_3 liegt und daß $S(1|4) \cup S(3|4) \subset E_0$; dann ist $S(2|4) \not\subset E_0$. (Figur 7).

Anmerkung. Der Fall (II) kann durch stetige Deformation aus dem Fall (I) gewonnen werden.

Bew. *Betr. Fall* (I). (1) Es sei $K(i, j) = K(v_i, v_j) = K(j, i)$ gesetzt. Gemäß Nr. 2.4., Satz, Beh. (2), gibt es – falls ein C mit den v_i als VP existiert – unter den Komponenten von $C - \{v_i\} - \{v_j\}$ mindestens eine, von v_i bzw. von v_j begrenzte, in $K(i, j)$ liegende $\mathfrak{k}$-Strecke $T(i; j)$ bzw. $T(j; i)$. Gemäß Nr. 2.4., Satz. Beh. (3), liegen $\underset{\sim}{T}(i; j')$ und $\underset{\sim}{T}i; j'')$ für $j' \neq j''$; $j' \neq j$, $j'' \neq j$; in der Nähe von v_i auf verschiedene Seiten von $K(i, j)$. Ein zweites $T(i;j)$ bzw. $T(j;i)$ existiert nicht; denn anderenfalls würde eines der beiden $\underset{\sim}{T}(i; j)$ zusammen mit einem der (sicher vorhandenen) $\underset{\sim}{T}(i; j')$ auf der gleichen Seite von $K(i, j'')$ liegen, was (Nr. 2.4., Satz, Beh. (3)), nicht möglich ist.

(2) Gemäß Ziff. (1) kann C nur $\mathfrak{k}$-Strecken enthalten, die einem der $K(i, j)$ angehören. Gibt es daher ein C mit den $v_1, \ldots, v_4$ als VP und enthält C sechs $\mathfrak{k}$-Strecken $S(i \mid j)$ – wird also jedes der v_i mit jedem anderen durch ein $S(i \mid j)$ „verbunden" –, so ist C jedenfalls maximal. Ein derart maximales C (falls vorhanden) enthält drei 4-Ecke ($\mathfrak{k}$-Polygone) Q, die (einfache) Kurven sind. Falls unter diesen Q ein $\mathfrak{k}$-beschränktes existiert, also ein $Q \subset E_0$, gilt schwPOW $(Q; \mathfrak{k}) = 0 \pmod 2$; und da andererseits schwPOW $(Q; \mathfrak{k}) \leq 3 =$ schwPOW$(C; \mathfrak{k})$ ist, folgt schwPOW $(Q; \mathfrak{k}) = 2$. Gemäß H.-K. [1], Nr. 3.1.5.3., Satz 4. bzw. Satz 3., ist daher Q $\mathfrak{k}$-konvex. Fügt man zu Q noch die, nicht in E_0 enthaltenen Komplemente der ($\mathfrak{k}$-beschränkten) Diagonalen von Q hinzu, so hat man die in Beh. (I) beschriebene Konfiguration für ein maximales C. Die vorstehenden Schlüsse zeigen: Die Existenz eines $\mathfrak{k}$-konvexen Vierecks Q mit den $v_1, \ldots, v_4$ als Ecken, ist notwendig und hinreichend für die Existenz eines maximalen Kontinuums C mit den $v_1, \ldots, v_4$ als VP und mit schwPOW$(C; \mathfrak{k}) = 3$. –

(3) Bei beliebig vorgegebenen $v_1, \ldots, v_4$ im Sinne der Beh. (I) ist noch ein 4-Eck Q gemäß Ziff. (2) mit den $v_1, \ldots, v_4$ als Ecken zu konstruieren. Dazu betrachte man die $\mathfrak{k}$-beschränkte Menge $M = \bar{M} = \{v_1, \ldots, v_4\} \subset E_0$. Es sei $H = \bar{H} = H(\bar{M})$ die $\mathfrak{k}$-konvexe Hülle von M; es ist $H \subset E_0$. Liegen die v_i sämtlich auf dem Rand $R = H - \underline{H}$ von H, so ist R ein Q. Andernfalls sei etwa $v_3 \in$

$\in H$, also $v_1, v_2, v_4 \in R$ (da mindestens 3 der v_i auf R liegen). Wir bilden das 4-Eck gebildet aus $K(3|1) \cup K(3|2) \subset E_0$ und aus $K(4|1) \not\subset E_0$ sowie aus $K(4|2) \not\subset E_0$. Dies ist aber schon ein Q. Damit ist die Existenz eines maximalen C bewiesen.

Betr. Beh. (II). Sie ergibt sich unmittelbar aus einem (𝔨-beschränkten) 𝔨-konvexen Q durch Grenzübergang bei festen v_1, v_3, v_4, indem man $v_2 \in Q$ gegen den vorgegebenen Punkt auf $S(1|3)$ konvergieren läßt.

Zusatz. Für beliebige 4 Punkte v_1, v_2, v_3, v_4 in E, von denen keine 3 auf der gleichen OCh liegen, gilt: *Erstens. Die Punkte* $v_1, \ldots, v_4$ *sind die Ecken genau eines* 𝔨*-konvexen* 4*-Ecks*, welches zusammen mit den Komplementen seiner beiden (𝔨-beschränkten, d. h. inneren) Diagonalen eine Einteilung von E in 3 𝔨-konvexe 4-Ecke liefert, wobei je zwei dieser 4-Ecke ein Paar Gegenseiten gemeinsam haben. – *Zweitens.* Durch die Punkte $v_1, \ldots, v_4$ ist *genau* ein maximales Kontinuum C mit schwOPW$(C; \mathfrak{k}) = 3$ bestimmt, das die $v_1, \ldots, v_4$ als Verzweigungspunkte besitzt.

Bew. Unmittelbar aus dem Bew. für Beh. (I) des obigen Satzes.

3.3. Einige weitere Fälle, in denen C ebenfalls nur 𝔨-Strecken enthält, werden in einer anschließenden zweiten Mitteilung besprochen.

Literatur

Marchaud, A. [1] Sur les continus d'ordre borné. Acta math. 55, 67–115 (1930).

Menger, K. [1] Kurventheorie. Leipzig und Berlin. 1932.

Haupt-Künneth [1] Geometrische Ordnungen. Berlin–Heidelberg–New York 1967. Zitiert als H.-K. [1].