BAYERISCHE AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN
MATHEMATISCH-NATURWISSENSCHAFTLICHE KLASSE

SITZUNGSBERICHTE

JAHRGANG

1979

MÜNCHEN 1980

VERLAG DER BAYERISCHEN AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN
In Kommission bei der C. H. Beck'schen Verlagsbuchhandlung München

Allgemein relativistische Inertialsysteme

Von Fritz Bopp

Der allgemein kovariante Energie-Impulssatz

$$\nabla_\nu \mathfrak{T}^{\mu\nu} = 0 \tag{1}$$

liefert bekanntlich wegen

$$\nabla_\nu \mathfrak{T}^{\mu\nu} \neq \partial_\nu \mathfrak{T}^{\mu\nu}$$

keine Erhaltungsgrößen. Da jedoch für beliebige skalare Funktionen S die Gleichung

$$\nabla_\nu(\partial_\mu S\, \mathfrak{T}^{\mu\nu}) = \partial_\nu(\partial_\mu S\, \mathfrak{T}^{\mu\nu})$$

gilt, kann man fragen: Gibt es spezielle Funktionen S, für die

$$\partial_\nu(\partial_\mu S\, \mathfrak{T}^{\mu\nu}) \equiv \nabla_\nu(\partial_\mu S\, \mathfrak{T}^{\mu\nu}) = \mathfrak{T}^{\mu\nu}(\partial_{\mu\nu} S - \Gamma^{\varrho}_{\mu\nu}\, \partial_\varrho S) = 0 \tag{2}$$

ist? S muß nur dieser einen Differentialgleichung genügen. Wenn es Integrale gibt, sind auf kovariante Weise spezielle Flächenscharen $S = \text{const}$ definiert, relativ zu denen die Erhaltungssätze

$$\int \partial_\mu S\, \mathfrak{T}^{\mu\nu}\, d\sigma_\nu = \text{const}$$

gelten. Sind die Flächen $S = \text{const}$ raumartig, so ergibt sich der Energiesatz. Sind ihre Flächennormalen raumartig, so sind die Integrale Impulse. Jedoch ist $d\sigma_\nu$ stets raumartig.

In einem speziellen Fall kann man die Integrale der Differentialgleichung (2) leicht charakterisieren. Ist nämlich

$$\mathfrak{T}^{\mu\nu} = \varrho \sqrt{g}\, u^\mu u^\nu \tag{3}$$

so sind die raumartigen Flächen $S = \text{const}$ Lösungen der Hamilton-Jacobischen Differentialgleichung

$$g^{\mu\nu}\, \partial_\mu S\, \partial_\nu S = -1 \tag{4}$$

mit

$$u_\mu = \partial_\mu S, \tag{5}$$

und die Lösungen mit raumartigen Normalen gemäß

$$u^\mu \partial_\mu S = 0 \tag{6}$$

werden von den Orthogonaltrojektorien der Flächen $S = \text{const}$ aufgespannt.

Beweis: (a) Aus $u_\mu = \partial_\mu S$ folgt durch Substitution in die linke Seite von (2) ohne den Faktor $\varrho\sqrt{g}$:

$$\partial^\mu S\, \partial^\nu S\, (\partial_{\mu\nu} S - \Gamma^\varrho_{\mu\nu}\, \partial_\varrho S).$$

Nach (4) ist

$$\partial_\nu (g^{\varrho\tau} \partial_\varrho S\, \partial_\sigma S) = \partial_\nu g^{\varrho\tau} \partial_\varrho S\, \partial_\tau S + 2 g^{\varrho\tau} \partial_\varrho S\, \partial_{\nu\tau} S = 0.$$

Somit ist der vorhergehende Ausdruck gleich

$$-\frac{1}{2}\, \partial_\nu g^{\varrho\tau} \partial_\varrho S\, \partial_\tau S\, \partial^\nu S - \Gamma^\varrho_{\mu\nu}\, \partial^\mu S\, \partial^\nu S\, \partial_\varrho S.$$

Er verschwindet, weil

$$\partial_\nu g^{\varrho\tau} = -\Gamma^\varrho_{\nu\lambda} g^{\lambda\tau} - \Gamma^\tau_{\nu\lambda} g^{\varrho\lambda}$$

ist, so daß Gl. (2) gilt. – (b) Wenn $u^\mu \partial_\mu S = 0$ ist, folgt aus

$$u^\mu u^\nu (\partial_{\mu\nu} S - \Gamma^\varrho_{\mu\nu}\, \partial_\varrho S)$$

zunächst

$$-\partial_\varrho S (u^\mu \partial_\mu u^\varrho + \Gamma^\varrho_{\mu\nu} u^\mu u^\nu),$$

was wegen der Bewegungsgleichung

$$u^\mu \partial_\mu u^\varrho = \frac{du^\varrho}{ds} = -\Gamma^\varrho_{\mu\nu} u^\mu u^\nu$$

ebenfalls verschwindet. Diese gilt, weil (4) die zugehörige H.-J. Gleichung ist.

Da die Integrale von (1) auf die Erhaltungsgrößen Energie- und Impuls bezogen sind, ist es angemessen, von allgemein relativistischen Inertialsystemen zu sprechen. Sie sind wegen $\mathfrak{T}^{\mu\nu}$ in Gl. (2) durch die gesamte Materieverteilung bestimmt, wie es Mach gefordert hat.

Die obige Argumentation und das Verfahren, die Gleichung $\nabla_\nu \mathfrak{S}^\nu = \partial_\nu \mathfrak{S}^\nu$ für Vektordichten auszunutzen, sind so einfach, daß man sich nur schwer vorstellen kann, die Relativisten hätten Gl. (2) übersehen. Aber sie scheint in keinem Lehrbuch zu stehen.

Doch ist von ihr faktisch Gebrauch gemacht. Denn die übliche Darstellung des Friedmannschen Linienelements

$$(7)\quad ds^2 = -c^2\,dt^2 + R(t)^2\,\{d\chi^2 + \sin^2\chi\,(d\vartheta^2 + \sin^2\vartheta\,d\varrho^2)\}$$

ist auf eines der relativistisch verallgemeinerten Inertialsysteme bezogen. Gl. (4) lautet in diesem Fall nämlich

$$-\frac{1}{c^2}\left(\frac{\partial S}{\partial t}\right)^2 + \frac{1}{R^2}\left\{\left(\frac{\partial S}{\partial \chi}\right)^2 + \frac{1}{\sin^2\chi}\left(\left(\frac{\partial S}{\partial \vartheta}\right)^2 + \frac{1}{\sin^2\vartheta}\left(\frac{\partial S}{\partial \varphi}\right)^2\right)\right\} = -1,$$

und $S = ct$ ist eine Lösung.