BAYERISCHE AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN
MATHEMATISCH-NATURWISSENSCHAFTLICHE KLASSE

SITZUNGSBERICHTE

JAHRGANG

1987

MÜNCHEN 1988

VERLAG DER BAYERISCHEN AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN
In Kommission bei der C. H. Beck'schen Verlagsbuchhandlung München

Über eine einparametrige Familie von Mittelwerten

Von **Horst Alzer** in Waldbröl

Vorgelegt von Heinz Bauer am 12. 12. 1986

1. Einleitung

In einer kurzen Note aus dem Jahre 1975 hat K. B. Stolarsky [16] für positive reelle Zahlen x und y (mit $x \neq y$) sowie für reelle Parameter r und s (mit $r \neq s$, $rs \neq 0$) folgende zweiparametrige Familie von Mittelwerten eingeführt:

$$E(r, s; x, y) := \left[\frac{r}{s} \frac{x^s - y^s}{x^r - y^r}\right]^{1/(s-r)}.$$

Die Mittelwertfamilie E ist von besonderem Interesse, weil sie nahezu alle bekannten Mittelwerte als Spezialfälle enthält:

Das logarithmische Mittel: $E(0, 1; x, y) = \lim\limits_{r \to 0} E(r, 1; x, y) = \dfrac{x - y}{\ln x - \ln y}$,

das geometrische Mittel: $E(-r, r; x, y) = (xy)^{1/2}$,

das arithmetische Mittel: $E(1, 2; x, y) = (x + y)/2$,

das harmonische Mittel: $E(-1, -2; x, y) = 2xy/(x + y)$,

das Heron Mittel: $E(1/2, 3/2; x, y) = (x + (xy)^{1/2} + y)/3$,

das quadratische Mittel: $E(2, 4; x, y) = ((x^2 + y^2)/2)^{1/2}$,

das Wurzel Mittel: $E(1/2, 1; x, y) = ((x^{1/2} + y^{1/2})/2)^2$,

das Lorentz Mittel: $E(1/3, 2/3; x, y) = ((x^{1/3} + y^{1/3})/2)^3$.

Interessante Eigenschaften von E sind außer von Stolarsky vor allem von E. B. Leach und M. C. Sholander [6], [7] bewiesen worden.

Im Folgenden werden wir uns mit der Funktionenschar $E(r, r + 1; x, y)$ beschäftigen. Ziel dieser Note ist es, zu zeigen, wie sich die bekannte Doppelungleichung

$$\sqrt{xy} < \frac{x - y}{\ln x - \ln y} < \frac{x + y}{2}, \qquad x \neq y,$$

mit Hilfe von $E(r, r + 1; x, y)$ auf eine neue Art verschärfen läßt.

2. Definition und elementare Eigenschaften von $F_r(x, y)$

Für positive voneinander verschiedene reelle Zahlen x und y definieren wir:

$$F_r(x, y) := \frac{r}{r+1} \frac{x^{r+1} - y^{r+1}}{x^r - y^r} \qquad \text{für reelle} \quad r \neq 0, -1,$$

$$F_0(x, y) := \lim_{r \to 0} F_r(x, y) = \frac{x - y}{\ln x - \ln y},$$

$$F_{-1}(x, y) := \lim_{r \to -1} F_r(x, y) = xy \frac{\ln x - \ln y}{x - y}.$$

Stolarsky [16] hat gezeigt, daß $E(r, s; x, y)$ bezüglich beider Parameter r und s streng monoton steigt, wenn x, y und der jeweils andere Parameter festgewählte Zahlen sind (vgl. [6]). Somit besitzt $F_r(x, y)$ folgende Monotonieeigenschaft:

Wenn $x \neq y$ und $r_1 < r_2$, dann gilt: $F_{r_1}(x, y) < F_{r_2}(x, y)$.

Ohne Schwierigkeiten beweist man:

$$\lim_{r \to -\infty} F_r(x, y) = \min(x, y) < F_r(x, y) < \max(x, y) = \lim_{r \to \infty} F_r(x, y), \quad x \neq y,$$

$$c\, F_r(x, y) = F_r(cx, cy) \qquad \text{für} \quad c > 0,$$

$$F_r(x, y) = F_r(y, x).$$

Bei $F_r(x, y)$ handelt es sich also um eine einparametrige Familie von homogenen symmetrischen Mittelwerten, die neben den drei klassischen Mittelwerten: dem harmonischen Mittel, dem geometrischen Mittel und dem arithmetischen Mittel auch das logarithmische Mittel von x und y als Spezialfall enthält:

$$H(x,y) := F_{-2}(x,y) = \frac{2xy}{x+y}, \quad G(x,y) := F_{-1/2}(x,y) = (xy)^{1/2},$$

$$A(x,y) := F_1(x,y) = \frac{x+y}{2}, \quad L(x,y) := F_0(x,y) = \frac{x-y}{\ln x - \ln y}.$$

Das logarithmische Mittel L spielt bei wirtschaftswissenschaftlichen und physikalischen Problemen (wie etwa bei Fragen des Wärmetransports oder der Ladungsverteilung bei elektrischen Leitern) eine wichtige Rolle (siehe [11], [14], [15]) und ist darüber hinaus Gegenstand zahlreicher rein-mathematischer Untersuchungen. Vor allem sind eine Vielzahl von Ungleichungen für L veröffentlicht worden. Aus der Monotonieeigenschaft von F_r folgt insbesondere, daß $L(x,y)$ zwischen dem geometrischen und dem arithmetischen Mittel von x und y liegt:

$$G(x,y) < L(x,y) < A(x,y), \quad x \neq y. \tag{1}$$

Für diese Ungleichungen findet man in der Literatur eine Reihe verschiedener Beweise (siehe [2], [3], [9], [12], [13]). Daneben ist die Doppelungleichung (1) mehrfach verschärft worden (siehe [1], [5], [8], [10]). Eine besonders elegante Verschärfung von (1) haben B. C. Carlson sowie E. B. Leach und M. C. Sholander bewiesen:

$$\sqrt[3]{(G(x,y))^2 A(x,y)} < L(x,y) < \tfrac{1}{3}(2\,G(x,y) + A(x,y)), \; x \neq y. \tag{2}$$

(Einen Beweis für die linke bzw. rechte Seite von (2) findet man in [7] bzw. [4].)

3. Ungleichungen für $F_r(x,y)$

Im Folgenden wollen wir zeigen: Für alle reellen Zahlen $r \neq 0$ liegt das geometrische Mittel von F_r und F_{-r} zwischen G und L, und das arithmetische Mittel von F_r und F_{-r} liegt für alle $r \neq 0$ zwischen L und A.

Um diese Aussagen beweisen zu können, benötigen wir Kenntnisse über das Monotonieverhalten der Funktionen $F_r\, F_{-r}$ und $F_r + F_{-r}$.

Lemma 1. Wenn x und y positive Zahlen sind mit $x \neq y$, dann fällt die Funktion $F_r(x, y)\, F_{-r}(x, y)$ bezüglich r in R^+ streng monoton.

Beweis. Für $r > 0$ und $t > 0$ definieren wir:

$$f(r; t) := F_r(e^t, e^{-t})\, F_{-r}(e^t, e^{-t})$$

$$= \begin{cases} \dfrac{r^2}{r^2 - 1} \dfrac{\sinh(t(r+1))\sinh(t(r-1))}{(\sinh(tr))^2} & \text{für} \quad 0 < r \neq 1, \\[2ex] t \coth(t) & \text{für} \quad r = 1, \end{cases}$$

und

$$g(r) = g_t(r) := \frac{r \sinh(t(\sqrt{r}+1))\sinh(t(\sqrt{r}-1))}{(\sinh(t\sqrt{r}))^2} .$$

Auf Grund von

$$f(\sqrt{r}; t) = \begin{cases} \dfrac{g_t(r) - g_t(1)}{r - 1} & \text{für} \quad 0 < r \neq 1, \\[2ex] g_t'(1) & \text{für} \quad r = 1, \end{cases}$$

ist $f(\sqrt{r}; t)$ und somit auch

$$xy\, f(r; \tfrac{1}{2}\ln(x/y)) = F_r(x, y)\, F_{-r}(x, y) \qquad (x > y > 0)$$

bezüglich r in R^+ streng monoton fallend, wenn – was wir beweisen werden – g in R^+ streng konkav ist.

Differentiation von g ergibt:

$$(\sinh(t))^{-2} g'(r) = (\coth(t))^2 - (\coth(t\sqrt{r}))^2 + t\sqrt{r}\,[(\coth(t\sqrt{r}))^3 - \coth(t\sqrt{r})]$$

sowie

$$(\sinh(t\sqrt{r}))^4 (\sinh(t))^{-2} \frac{2\sqrt{r}}{t} g''(r)$$

$$= -3\cosh(t\sqrt{r})(\sinh(t\sqrt{r}))^3 + 3(\cosh(t\sqrt{r}))^3 \sinh(t\sqrt{r}) -$$

$t\sqrt{r}\,(\sinh(t\sqrt{r}))^4 + 4\,t\sqrt{r}\,(\cosh(t\sqrt{r}))^2(\sinh(t\sqrt{r}))^2 -$

$3\,t\sqrt{r}\,(\cosh(t\sqrt{r}))^4$

$= [3\cosh(t\sqrt{r})\sinh(t\sqrt{r}) - 3\,t\sqrt{r}\,(\cosh(t\sqrt{r}))^2 +$

$t\sqrt{r}\,(\sinh(t\sqrt{r}))^2]\,[(\cosh(t\sqrt{r}))^2 - (\sinh(t\sqrt{r}))^2]$

$= \frac{3}{2}\sinh(2\,t\sqrt{r}) - 2\,t\sqrt{r} - t\sqrt{r}\cosh(2\,t\sqrt{r}).$

Wir entwickeln sinh und cosh in Potenzreihen und erhalten dann:

$$(\sinh(t\sqrt{r}))^4(\sinh(t))^{-2}\frac{2\sqrt{r}}{t}\,g''(r) = -\sum_{n=2}^{\infty}(n-1)\frac{(2\,t\sqrt{r})^{2n+1}}{(2n+1)!}.$$

Folglich gilt: $g''(r) < 0$.

Lemma 2. Wenn x und y positive Zahlen sind mit $x \neq y$, dann steigt die Funktion $F_r(x,y) + F_{-r}(x,y)$ bezüglich r in R^+ streng monoton.

Beweis. Für $r > 0$ und $t > 0$ definieren wir:

$$u(r;t) := F_r(e^t, e^{-t}) + F_{-r}(e^t, e^{-t})$$

$$= \begin{cases} \dfrac{2r}{r^2-1}[r\cosh(t) - \coth(tr)\sinh(t)] & \text{für } 0 < r \neq 1, \\[2ex] \cosh(t) + \dfrac{t}{\sinh(t)} & \text{für } r = 1, \end{cases}$$

und

$$v(r) = v_t(r) := \sqrt{r}\coth(t/\sqrt{r}).$$

Wenn v in R^+ streng konkav ist, dann fällt

$$w(r;t) := \begin{cases} \dfrac{v_t(r) - v_t(1)}{r-1} & \text{für } 0 < r \neq 1, \\[2ex] v_t'(1) & \text{für } r = 1, \end{cases}$$

bezüglich r in R^+ streng monoton, so daß auf Grund von

$$u(r;t) = 2\sinh(t)\,w(1/r^2;t)$$

die Funktion u und somit auch

$$F_r(x, y) + F_{-r}(x, y) = \sqrt{xy}\ \mathrm{u}\,(r; \tfrac{1}{2}\ln(x/y)) \qquad (x > y > 0)$$

bezüglich r in R^+ streng monoton steigt.

Es bleibt zu zeigen, daß v in R^+ streng konkav ist.

Differentiation von v ergibt:

$$v'(r) = \frac{1}{2\sqrt{r}}\coth(t/\sqrt{r}) - \frac{t}{2r}\,[1 - (\coth(t/\sqrt{r}))^2],$$

$$4r^{3/2}v''(r) = (t/\sqrt{r}) - (1 + 2(t/\sqrt{r})^2)\coth(t/\sqrt{r}) -$$
$$(t/\sqrt{r})(\coth(t/\sqrt{r}))^2 + 2(t/\sqrt{r})^2(\coth(t/\sqrt{r}))^3,$$

$$(\sinh(t/\sqrt{r}))^3\,4r^{3/2}v''(r) = (t/\sqrt{r})(\sinh(t/\sqrt{r}))^3 +$$
$$2(t/\sqrt{r})^2(\cosh(t/\sqrt{r}))^3 - ((t/\sqrt{r})^2 + 1/2)\sinh(t/\sqrt{r})\sinh(2t/\sqrt{r}) -$$
$$(t/2\sqrt{r})\cosh(t/\sqrt{r})\sinh(2t/\sqrt{r}).$$

Unter Beachtung der Formeln:

$$(\sinh(a))^3 = \tfrac{1}{4}\sinh(3a) - \tfrac{3}{4}\sinh(a),$$
$$(\cosh(a))^3 = \tfrac{1}{4}\cosh(3a) + \tfrac{3}{4}\cosh(a),$$
$$\sinh(a)\sinh(2a) = \tfrac{1}{2}\cosh(3a) - \tfrac{1}{2}\cosh(a),$$
$$\cosh(a)\sinh(2a) = \tfrac{1}{2}\sinh(3a) + \tfrac{1}{2}\sinh(a),$$

folgt nach elementaren Umformungen:

$$(\sinh(t/\sqrt{r}))^3\,4r^{3/2}v''(r) = -(t/\sqrt{r})\sinh(t/\sqrt{r}) -$$
$$(1/4)\cosh(3t/\sqrt{r}) + (2(t/\sqrt{r})^2 + 1/4)\cosh(t/\sqrt{r}). \tag{3}$$

Wir entwickeln die rechte Seite von (3) in eine Potenzreihe und erhalten:

$$(\sinh(t/\sqrt{r}))^3\,4r^{3/2}v''(r) =$$
$$\tfrac{1}{4}\sum_{n=2}^{\infty}[8(n+1)(4n+1) - 9^{n+1} + 1]\,\frac{(t/\sqrt{r})^{2n+2}}{(2n+2)!}\,.$$

Durch vollständige Induktion beweist man:

$$8\,(n+1)\,(4n+1) - 9^{n+1} + 1 < 0 \qquad \textit{für} \quad n \geq 2;$$

also gilt

$$v''(r) < 0 \qquad \text{für} \quad r > 0.$$

Wir sind nun in der Lage, die oben formulierte Verschärfung der Ungleichungen

$$G\,(x, y) < L\,(x, y) < A\,(x, y), \qquad x \neq y,$$

zu beweisen.

Satz. Wenn x und y positive Zahlen sind mit $x \neq y$, dann gilt für $r \neq 0$:

$$G\,(x, y) < \sqrt{F_r\,(x, y)\,F_{-r}(x, y)} < L\,(x, y)$$
$$< \tfrac{1}{2}\,(F_r(x, y) + F_{-r}\,(x, y)) < A\,(x, y).$$

Beweis. Nach Lemma 1 ist

$$S_r(x, y) := [F_r\,(x, y) F_{-r}\,(x, y)]^{1/2}, \qquad x \neq y,$$

bezüglich r in R^+ streng monoton fallend, so daß wir auf Grund von

$$\lim_{r \to \infty} S_r\,(x, y) = G\,(x, y) \qquad \text{und} \qquad S_0\,(x, y) = L\,(x, y)$$

für $r \neq 0$ die Doppelungleichung

$$G\,(x, y) < S_r\,(x, y) < L\,(x, y)$$

erhalten.

Nach Lemma 2 ist

$$T_r\,(x, y) := \tfrac{1}{2}\,[F_r\,(x, y) + F_{-r}\,(x, y)], \qquad x \neq y,$$

bezüglich r in R^+ streng monoton steigend.

Wegen

$$\lim_{r \to \infty} T_r\,(x, y) = A\,(x, y) \qquad \text{und} \qquad T_0\,(x, y) = L\,(x, y)$$

folgt für $r \neq 0$:

$$L\,(x, y) < T_r\,(x, y) < A\,(x, y).$$

Bemerkung. Auf Grund der Identität

$$\tfrac{1}{2}\left(F_{1/2}(x,y) + F_{-1/2}(x,y)\right) = \tfrac{1}{3}\left(2\,G(x,y) + A(x,y)\right)$$

und der Abschätzung

$$\begin{aligned}&\left((G(x,y))^2 A(x,y)\right)^{1/3} - \left(F_{1/2}(x,y)\, F_{-1/2}(x,y)\right)^{1/2}\\ &\quad = (G(x,y))^{1/2}\left[\left(G(x,y)\,(A(x,y))^2\right)^{1/6} - \left(\frac{G(x,y) + 2\,A(x,y)}{3}\right)^{1/2}\right]\\ &\quad < 0 \qquad \text{für } x \neq y,\end{aligned}$$

erhalten wir folgende Verschärfungen der Doppelungleichung (2):

$$\sqrt[3]{(G(x,y))^2 A(x,y)} < \sqrt{F_r(x,y)\, F_{-r}(x,y)} < L(x,y)$$

$$\text{für } x \neq y \quad \text{und} \quad 0 < r \leq 1/2,$$

und

$$L(x,y) < \tfrac{1}{2}\left(F_r(x,y) + F_{-r}(x,y)\right) < \tfrac{1}{3}\left(2\,G(x,y) + A(x,y)\right)$$

$$\text{für} \quad x \neq y \quad \text{und} \quad 0 < r < 1/2.$$

Herrn Prof. Dr. H. Bauer danke ich herzlich für seine Verbesserungsvorschläge zu dieser Arbeit.

Literatur

[1] Alzer, H.: Über Mittelwerte, die zwischen dem geometrischen und dem logarithmischen Mittel zweier Zahlen liegen. Anz. d. Österr. Akad. d. Wiss., math.-naturwiss. Kl. **123,** 5–9 (1986).

[2] Burk, F.: By all means. Amer. Math. Monthly **92,** 50 (1985).

[3] Carlson, B. C.: Some inequalities for hypergeometric functions. Proc. Amer. Soc. **17,** 32–39 (1966).

[4] Carlson, B. C.: The logarithmic mean. Amer. Math. Monthly **79,** 615–618 (1972).

[5] Karamata, J.: Sur quelques problèmes poses par Ramanujan. J. Indian Math. Soc. **24,** 343–365 (1960).

[6] Leach, E. B. and Sholander, M. C.: Extended mean values. Amer. Math. Monthly **85,** 84–90 (1978).

[7] Leach, E. B. and Sholander, M. C.: Extended mean values II. J. Math. Anal. Appl. **92,** 207–223 (1983).

[8] Lin, T. P.: The power mean and the logarithmic mean. Amer. Math. Monthly **81,** 879–883 (1974).

[9] Marshall, A. W. and Olkin, I.: Inequalities: Theory of majorization and its applications. New York 1979 (chapter 3, section I.4).

[10] Mascioni, V.: Logarithmische Konvexität und Ungleichungsscharen. El. Math. **40,** 149–150 (1985).

[11] McAdams, W. H.: Heat transmission. New York 1954.

[12] Mitrinović, D. S.: Analytic inequalities. Berlin 1970 (sections 3.6.15; 3.6.17).

[13] Ostle, B. and Terwilliger, H. L.: A comparison of two means. Proc. Montana Acad. Sci. **17,** 69–70 (1957).

[14] Pittenger, A. O.: The logarithmic mean in n variables. Amer. Math. Monthly **92,** 99–104 (1985).

[15] Pólya, G. and Szegö, G.: Isoperimetric inequalities in mathematical physics. Princeton 1951.

[16] Stolarsky, K. B.: Generalizations of the logarithmic mean. Math. Mag. **48,** 87–92 (1975).