Sitzungsberichte

der

mathematisch-naturwissenschaftlichen Abteilung

der

Bayerischen Akademie der Wissenschaften

zu München

1924. Heft I
Januar- bis Junisitzung

München 1924
Verlag der Bayerischen Akademie der Wissenschaften
in Kommission des G. Franz'schen Verlags (J. Roth)

Die nicht-euklidischen Minimalflächen II.

Von **F. Lindemann.**

Vorgelegt in der Sitzung am 10. Mai 1924.

9. Bildet man den nicht-euklidischen Raum mittels der von Darboux und Poincaré angegebenen Transformation[1]) auf den euklidischen Raum ab, so entstehen aus den nicht-euklidischen Minimalflächen, wie ich in einer früheren Mitteilung gezeigt habe,[2]) Flächen, welche sich (wenn α, β die Parameter der Minimalkurven bedeuten) in der folgenden Form darstellen lassen:

$$
\begin{aligned}
x &= i \int [\operatorname{cosin} \lambda \cdot W_\alpha \, d\alpha - \operatorname{cosin} \mu \cdot W_\beta \, d\beta], \\
y &= i \int [\sin \lambda \cdot W_\alpha \, d\alpha - \sin \mu \, W_\beta \, d\beta], \qquad (1) \\
z &= \int [W_\alpha \, d\alpha + W_\beta \, d\beta] = W.
\end{aligned}
$$

Dabei bedeutet W eine reelle Funktion von α, β, mit der λ, μ durch die Gleichungen zusammenhängen:

$$
(2) \qquad \frac{\partial \lambda}{\partial \beta} \operatorname{tg} \omega = \frac{\partial \lg W_\alpha}{\partial \beta}, \quad \frac{\partial \mu}{\partial \alpha} \operatorname{tg} \omega = -\frac{\partial \lg W_\beta}{\partial \alpha}, \quad \lambda - \mu = 2\omega,
$$

$$
(3) \qquad W \cdot W_{\alpha\beta} + 2 \sin^2 \omega \cdot W_\alpha W_\beta = 0.
$$

Die Gleichungen (2) sagen aus, daß unter den Integralzeichen in (1) vollständige Differentiale stehen; die Gleichung (3) charakterisiert die Flächen als Bilder nicht-euklidischer Minimalflächen. Aus (2) erhält man ferner:

$$
(4) \qquad \frac{\partial \mu}{\partial \beta} = -2 \frac{\partial \omega}{\partial \beta} + \operatorname{cotg} \omega \cdot \frac{\partial \lg W_\alpha}{\partial \beta}, \quad \frac{\partial \lambda}{\partial \alpha} = 2 \frac{\partial \omega}{\partial \alpha} - \operatorname{cotg} \omega \cdot \frac{\partial \lg W_\beta}{\partial \alpha},
$$

---

[1]) Vgl. z. B. meine Anmerkungen zur Deutschen Ausgabe von Poincarés „Wissenschaft und Hypothese“.

[2]) Diese Sitzungsberichte, Jahrg. 1923, Seite 1 ff. Daselbst ist die jetzt mit 2ω bezeichnete Differenz $\lambda - \mu$ mit ω bezeichnet.

$$(5)\qquad \frac{\partial}{\partial\alpha}\left(\operatorname{cotg}\omega\cdot\frac{\partial\lg W_\alpha}{\partial\beta}\right)+\frac{\partial}{\partial\beta}\left(\operatorname{cotg}\omega\cdot\frac{\partial\lg W_\beta}{\partial\alpha}\right)=2\,\frac{\partial^2\omega}{\partial\alpha\,\partial\beta}.$$

Setzt man noch

$$(6)\qquad \lambda=p+\omega,\qquad \mu=p-\omega,$$

(wo also p reell, ω rein imaginär ist), so ergibt sich ferner aus (2) und (4):

$$(7)\qquad \frac{\partial}{\partial\alpha}\left(\operatorname{cotg}\omega\cdot\frac{\partial\lg W_\alpha}{\partial\beta}\right)-\frac{\partial}{\partial\beta}\left(\operatorname{cotg}\omega\cdot\frac{\partial\lg W_\beta}{\partial\alpha}\right)=2\,p_{\alpha\beta}.$$

Mit Hilfe von (2) folgt aus (3):

$$(8)\qquad W_\beta\sin 2\omega+W\lambda_\beta=0,\qquad W_\alpha\sin 2\omega-W\mu_\alpha=0,$$

also auch:

$$(9)\qquad \frac{\partial}{\partial\alpha}\left(\frac{\lambda_\beta}{\sin 2\omega}\right)+\frac{\partial}{\partial\beta}\left(\frac{\mu_\alpha}{\sin 2\omega}\right)=0,$$

oder ausgeführt

$$(9\,\mathrm{a})\qquad 2\,p_{\alpha\beta}\cdot\sin 2\omega-\operatorname{cosin}2\omega\cdot(p_\beta\,\omega_\alpha+p_\alpha\,\omega_\beta)=0.$$

10. Die Gleichung (7) kann wegen (2) in der folgenden Form geschrieben werden:

$$(10)\qquad \frac{\partial^2\log(W_\alpha:W_\beta)}{\partial\alpha\,\partial\beta}-\frac{1}{\sin\omega\cdot\operatorname{cosin}\omega}(\lambda_\beta\,\omega_\alpha+\mu_\alpha\,\omega_\beta)=2\,p_{\alpha\beta}\cdot\operatorname{tg}\omega.$$

Ferner ist

$$\frac{\lambda_\beta}{\sin 2\omega}=\frac{1}{2\sin^2\omega}\cdot\frac{\partial\lg W_\alpha}{\partial\beta},\qquad \frac{\mu_\alpha}{\sin 2\omega}=\frac{-1}{2\sin^2\omega}\cdot\frac{\partial\lg W_\beta}{\partial\alpha},$$

so daß die Gleichung (9) wird:

$$\frac{\partial}{\partial\alpha}\left(\frac{1}{\sin^2\omega}\cdot\frac{\partial\lg W_\alpha}{\partial\beta}\right)-\frac{\partial}{\partial\beta}\left(\frac{1}{\sin^2\omega}\,\frac{\partial\lg W_\beta}{\partial\alpha}\right)=0,$$

oder entwickelt:

$$\frac{\partial^2\lg(W_\alpha:W_\beta)}{\partial\alpha\,\partial\beta}-2\operatorname{cotg}\omega\cdot\left(\omega_\alpha\,\frac{\partial\lg W_\alpha}{\partial\beta}-\omega_\beta\,\frac{\partial\lg W_\beta}{\partial\alpha}\right)=0,$$

und unter Benutzung von (2):

$$(11)\qquad \frac{\partial^2\lg(W_\alpha:W_\beta)}{\partial\alpha\,\partial\beta}-2\,(\omega_\alpha\,\lambda_\beta+\omega_\beta\,\mu_\alpha)=0,$$

also durch Verbindung mit (10):

$$(\lambda_\beta\, \omega_\alpha + \mu_\alpha\, \omega_\beta) = p_{\alpha\beta} \cdot \operatorname{tg} \omega \cdot \frac{\sin 2\,\omega}{\sin 2\,\omega - 1}.$$

Nach (9) ist aber:

$$(\lambda_\beta\, \omega_\alpha + \mu_\alpha\, \omega_\beta) - 2\, p_{\alpha\beta} \cdot \operatorname{tg}(2\,\omega) = 0.$$

Es folgt somit:

(12) $$p_{\alpha\beta} = 0, \qquad p_\alpha\, \omega_\beta + p_\beta\, \omega_\alpha = 0,$$

und hieraus:

(13) $$p = A + B, \qquad \omega = f(A - B),$$

wenn A, B Funktionen von α bzw. β allein bedeuten, und f eine noch näher zu bestimmende Funktion bezeichnet.

11. Die Bestimmung von f geschieht durch folgende Erwägungen:

Differentiert man die erste Gleichung (8) nach α und eliminiert W aus dem Resultate, so findet man:

$$W_{\alpha\beta} \sin 2\,\omega + 2\, W_\beta \cdot \omega_\alpha \cdot \operatorname{cosin} 2\,\omega + W_\alpha\, \lambda_\beta$$
$$+ - W_\beta \sin 2\,\omega \cdot \frac{\lambda_{\alpha\beta}}{\lambda_\beta} = 0.$$

Hier kann nach (2) $W_\alpha\, \lambda_\beta$ durch $\operatorname{cotg} \omega \cdot W_{\alpha\beta}$ ersetzt werden; dividiert man sodann mit W_β und wendet die zweite Gleichung (2) an, so entsteht:

$$\mu_\alpha \operatorname{tg} \omega \cdot \sin 2\,\omega - 2\,\omega_\alpha \operatorname{cosin} 2\,\omega + \mu_\alpha + \sin 2\,\omega \cdot \frac{\lambda_{\alpha\beta}}{\lambda_\beta} = 0.$$

Zufolge (4) und (13) ist hier:

$$\mu_\alpha = A'(1 - f'(A - B)), \qquad \omega_\alpha = f'(A - B) \cdot A',$$
$$\lambda_\beta = B'(1 - f'(A - B)), \qquad \lambda_{\alpha\beta} = - A' B' f''(A - B),$$

und so ergibt sich für f die Bedingung:

(14) $$(1 - f')^2 (1 + 2 \sin^2 f) - 2 f'(1 - 2 \sin^2 f)(1 - f') - 2 f'' \cdot \sin f \cdot \sqrt{1 - f^2} = 0$$

oder:

$$f'^2 (3 - 2 \sin^2 f) - 4 f' + 1 + 2 \sin^2 f - 2 f'' \cdot \sin f \cdot \sqrt{1 - f^2} = 0,$$

und, wenn man $\sin f = \eta$ setzt:

$$2\, \eta\, \eta'' - \eta'^2 (3 - 4\, \eta^2) + 4\, \eta' \sqrt{1 - \eta^2} - (1 + 2\, \eta^2)(1 - \eta^2) = 0,$$

wobei $A - B$ die unabhängige Variable ist. Sei $\xi = A - B$, und werde η als unabhängige Variable eingeführt, so wird dies:

$$2\eta \frac{d^2 \xi}{d\eta^2} + \left(\frac{d\xi}{d\eta}\right)^3 (1 + 2\eta^2)(1 - \eta^2) - 4\left(\frac{d\xi}{d\eta}\right)^2 \sqrt{1 - \eta^2}$$

$$(15) \qquad + \frac{d\xi}{d\eta}(3 - 4\eta^2) = 0,$$

eine Differentialgleichung erster Ordnung für $\frac{d\xi}{d\eta}$. Es ist zu beachten, daß sowohl $\xi = A - B$ als $\omega = f(A - B)$ rein imaginär sein muß.

Die Gleichung (14) ist für $f' = 1$, $f = A - B$ identisch erfüllt; dann wird $\omega_{\alpha\beta} = 0$, $\lambda_\beta = 0$, $\mu_\alpha = 0$; folglich nach (8) auch $W_\alpha = 0$, $W_\beta = 0$. Es ergibt sich also keine Fläche.

Hat man f und damit λ, μ bestimmt, so wird W am einfachsten aus (8) gewonnen, und dann können die Gleichungen (1) aufgestellt werden.

12. In Nr. 3 (vgl. die frühere Mitteilung) hatte ich p und ω allein aus der Gleichung (9a) zu bestimmen gesucht, wobei dann p als reelle Funktion von α, β beliebig anzunehmen war und unendlich viele Funktionen p immer zu derselben Lösung ω führen. Die Gleichung ist jetzt in die beiden Gleichungen (12) zerfallen, so daß die nicht-euklidischen Minimalflächen von einer willkürlichen Funktion A und der konjugierten Funktion B abhängen, wie die euklidischen Minimalflächen; aber zur fertigen Aufstellung der Lösungen ist noch die gewöhnliche Differentialgleichung (14) zu lösen, die sich auf (15) reduziert.

Der von Darboux bemerkte Zusammenhang des Problems mit dem Problem der Flächen konstanten Krümmungsmaßes ist in Nr. 6 (erste Mitteilung) angegeben. Wollte man aus den bekannten Beispielen für letztere Flächen (bei denen die Krümmungslinien als Parameterkurven benutzt werden) Beispiele für nicht-euklidische Minimalflächen ableiten, so müßte man auf den Flächen konstanten Krümmungsmaßes zunächst die Differentialgleichung der Minimalkurven integrieren, und dadurch wird dieses Verfahren umständlich.