Sitzungsberichte

der

mathematisch-naturwissenschaftlichen Abteilung

der

Bayerischen Akademie der Wissenschaften
zu München

1937. Heft II
Mai-Dezember-Sitzung

München 1937
Verlag der Bayerischen Akademie der Wissenschaften
In Kommission bei der C. H. Beck'schen Verlagsbuchhandlung

Zur Axiomatik der Geometrie V.
Vereinfachung des Hilbertschen Axiomensystems der Euklidischen Geometrie.

Von Richard Baldus in München.

Mit 4 Figuren.

Vorgelegt in der Sitzung vom 4. Dezember 1937.

1. Das älteste Axiomensystem für ein Gebiet der Mathematik ist das von Euklid in seinen berühmten „Elementen" um 300 v. Chr. angegebene,[1] das aus 118 Definitionen, 5 Postulaten und 5 Axiomen besteht. Die erste wirkliche Verbesserung erfuhr Euklids Axiomensystem dadurch, daß M. Pasch 1882 die fehlenden Axiome des „zwischen", auf die schon C. F. Gauß kurz hingewiesen hatte, einführte. Die stärkste Förderung verdankt aber die Axiomatik den Arbeiten D. Hilberts, der in seinen erstmals 1899 erschienenen „Grundlagen der Geometrie"[2] ein Axiomensystem der Euklidischen Geometrie aufgestellt hat, das sämtliche Lücken Euklids ausfüllt, zu zahlreichen axiomatischen Untersuchungen angeregt hat, und das in der neuesten Fassung folgendermaßen lautet, wobei unter zwei, drei, . . . Punkten, Geraden, Ebenen stets *verschiedene* Punkte, Gerade, Ebenen zu verstehen sind und statt „zusammengehören" auch in üblicher Weise „geht durch" usw. gesagt wird:

E r k l ä r u n g. Wir denken drei verschiedene Systeme von Dingen: die Dinge des e r s t e n Systems nennen wir *Punkte* und bezeichnen sie mit A, B, C, . . .; die Dinge des z w e i t e n Systems nennen wir *Geraden* und bezeichnen sie mit a, b, c, . . .; die Dinge des d r i t t e n Systems nennen wir *Ebenen* und bezeichnen

[1] Wir beziehen uns auf die vorzügliche griechisch-lateinische Parallelausgabe der Elemente Euklids von J. L. Heiberg, I. Bd., Leipzig 1883.

[2] Im folgenden wird immer auf die 7. Auflage, Leipzig und Berlin 1930, 326 S., weiterhin angeführt als „Grundlagen", und deren Fassung der Axiome Bezug genommen.

sie mit α, β, γ, . . .; die Punkte heißen auch die *Elemente der linearen Geometrie*, die Punkte und Geraden heißen die *Elemente der ebenen Geometrie*, und die Punkte, Geraden und Ebenen heißen die *Elemente der räumlichen Geometrie* oder *des Raumes*.

Wir denken die Punkte, Geraden, Ebenen in gewissen gegenseitigen Beziehungen und bezeichnen diese Beziehungen durch Worte wie „liegen", „zwischen", „kongruent", „parallel", „stetig"; die genaue und für mathematische Zwecke vollständige Beschreibung dieser Beziehungen erfolgt durch die *Axiome der Geometrie*.

Die Axiomgruppe I: Axiome der Verknüpfung.

I 1. Zu zwei Punkten A, B gibt es stets eine Gerade a, die mit jedem der beiden Punkte A, B zusammengehört.

I 2. Zu zwei Punkten A, B gibt es nicht mehr als eine Gerade, die mit jedem der beiden Punkte A, B zusammengehört.

I 3. Auf einer Geraden gibt es stets wenigstens zwei Punkte. Es gibt wenigstens drei Punkte, die nicht auf einer Geraden liegen.

I 4. Zu irgend drei nicht auf ein und derselben Geraden liegenden Punkten A, B, C gibt es stets eine Ebene α, die mit jedem der drei Punkte A, B, C zusammengehört. Zu jeder Ebene gibt es stets einen mit ihr zusammengehörigen Punkt.

I 5. Zu irgend drei nicht auf ein und derselben Geraden liegenden Punkten A, B, C gibt es nicht mehr als eine Ebene, die mit jedem der drei Punkte A, B, C zusammengehört.

I 6. Wenn zwei Punkte A, B einer Geraden a in einer Ebene α liegen, so liegt jeder Punkt von a in der Ebene α.

I 7. Wenn zwei Ebenen α, β einen Punkt A gemein haben, so haben sie wenigstens noch einen weiteren Punkt B gemein.

I 8. Es gibt wenigstens vier nicht in einer Ebene gelegene Punkte.

Die Axiomgruppe II: Axiome der Anordnung.

Erklärung. Die Punkte einer Geraden stehen in gewissen Beziehungen zueinander, zu deren Beschreibung uns insbesondere das Wort „*zwischen*" dient.

II 1. Wenn ein Punkt B zwischen einem Punkt A und einem Punkt C liegt, so sind A, B, C drei verschiedene Punkte einer Geraden, und B liegt dann auch zwischen C und A.

II 2. Zu zwei Punkten A und C gibt es stets wenigstens einen Punkt B auf der Geraden AC, so daß C zwischen A und B liegt.

II 3. Unter irgend drei Punkten einer Geraden gibt es nicht mehr als einen, der zwischen den beiden anderen liegt.

Erklärung. Wir betrachten auf einer Geraden a zwei Punkte A und B; wir nennen das System der beiden Punkte A und B eine *Strecke* und bezeichnen dieselbe mit AB oder mit BA. Die Punkte zwischen A und B heißen Punkte der Strecke AB oder auch *innerhalb* der Strecke AB gelegen; die Punkte A, B heißen *Endpunkte* der Strecke AB. Alle übrigen Punkte der Geraden a heißen *außerhalb* der Strecke AB gelegen.

II 4. Es seien A, B, C drei nicht in gerader Linie gelegene Punkte und a eine Gerade in der Ebene ABC, die keinen der Punkte A, B, C trifft: wenn dann die Gerade a durch einen Punkt der Strecke AB geht, so geht sie gewiß auch entweder durch einen Punkt der Strecke AC oder durch einen Punkt der Strecke BC.[1]

Erklärung.[2] Sind in einer Ebene α eine Gerade a und außerhalb der Geraden zwei Punkte A, B gegeben, dann sagt man *die beiden Punkte liegen in α auf verschiedenen Seiten* oder *auf der gleichen Seite von a*, je nachdem die Strecke AB einen Punkt von a enthält oder nicht. Es seien A, A', O, B vier Punkte einer Geraden a, so daß O zwischen A und B, aber nicht zwischen A und A'

---

[1] Nach den „Grundlagen", S. 4, rührt insbesondere dieses Axiom von M. Pasch her.

[2] Ohne inhaltliche Änderung etwas anders als in den „Grundlagen", da ein dort vorhergehender Satz mit hereingenommen ist.

liegt; dann sagen wir: die Punkte A, A' liegen *in der Geraden a auf ein und derselben Seite vom Punkte O*, und die Punkte A, B liegen *in der Geraden a auf verschiedenen Seiten vom Punkte O.* Die sämtlichen auf ein und derselben Seite von O gelegenen Punkte der Geraden a heißen auch ein von O ausgehender *Halbstrahl.*

Die Axiomgruppe III: Axiome der Kongruenz.

Erklärung. Die Strecken stehen in gewissen Beziehungen zu einander, zu deren Beschreibung uns die Worte „*kongruent*“ oder „*gleich*“ dienen.

III 1. Wenn A, B zwei Punkte auf einer Geraden a und ferner A' ein Punkt auf derselben oder einer anderen Geraden a' ist, so kann man auf einer gegebenen Seite der Geraden a' von A' stets einen Punkt B' finden, so daß die Strecke AB der Strecke $A'B'$ kongruent oder gleich ist, in Zeichen: $AB \equiv A'B'$.

III 2. Wenn eine Strecke $A'B'$ und eine Strecke $A''B''$ derselben Strecke AB kongruent sind, so ist auch die Strecke $A'B'$ der Strecke $A''B''$ kongruent; oder kurz: wenn zwei Strecken einer dritten kongruent sind, so sind sie untereinander kongruent.

III 3. Es seien AB und BC zwei Strecken ohne gemeinsame Punkte auf der Geraden a und ferner $A'B'$ und $B'C'$ zwei Strekken auf derselben oder einer anderen Geraden a' ebenfalls ohne gemeinsame Punkte; wenn dann $AB \equiv A'B'$ und $BC \equiv B'C'$ ist, so ist auch stets $AC \equiv A'C'$.

Erklärung. Es sei α eine beliebige Ebene, und h, k seien irgend zwei verschiedene von einem Punkte O ausgehende Halbstrahlen in α, die verschiedenen Geraden angehören. Das System dieser beiden Halbstrahlen h, k nennen wir einen *Winkel* und bezeichnen denselben mit $\sphericalangle (h, k)$ oder mit $\sphericalangle (k, h)$. Die Halbstrahlen h, k heißen *Schenkel* des Winkels, und der Punkt O heißt der *Scheitel* des Winkels. Der Halbstrahl h möge zur Geraden $\bar{h}$, der Halbstrahl k zur geraden $\bar{k}$ gehören. Die Halbstrahlen h und k, zusammengenommen mit dem Punkte O, teilen die übrigen Punkte in zwei Gebiete ein: alle Punkte, die mit h

auf der gleichen Seite von $\bar{k}$ und mit k auf der gleichen Seite von $\bar{h}$ liegen, heißen im Innern des Winkels $\sphericalangle (h, k)$ gelegen, alle anderen Punkte heißen im Äußern oder außerhalb dieses Winkels gelegen.

Erklärung. Die Winkel stehen in gewissen Beziehungen zueinander, zu deren Bezeichnung uns ebenfalls die Worte „*kongruent*" oder „*gleich*" dienen.

III 4. Es sei ein Winkel $\sphericalangle (h, k)$ in einer Ebene α und eine Gerade a' in einer Ebene α' sowie eine bestimmte Seite von a' in α' gegeben. Es bedeute h' einen Halbstrahl der Geraden a', der vom Punkte O' ausgeht: dann gibt es in der Ebene α' einen und nur einen Halbstrahl k', so daß der Winkel $\sphericalangle (h, k)$ kongruent oder gleich dem Winkel $\sphericalangle (h', k')$ ist und zugleich alle inneren Punkte des Winkels $\sphericalangle (h', k')$ auf der gegebenen Seite von a' liegen, in Zeichen: $\sphericalangle (h, k) \equiv \sphericalangle (h', k')$. Jeder Winkel ist sich selbst kongruent, d. h. es ist stets $\sphericalangle (h, k) \equiv \sphericalangle (h, k)$.

Erklärung. Ein Winkel mit dem Scheitel B, auf dessen beiden Schenkeln je ein Punkt A und C liegt, wird auch als $\sphericalangle ABC$ bezeichnet.

III 5. Wenn für zwei Dreiecke ABC und $A'B'C'$ die Kongruenzen $AB \equiv A'B'$, $AC \equiv A'C'$, $\sphericalangle BAC \equiv \sphericalangle B'A'C'$ gelten, so ist auch stets die Kongruenz $\sphericalangle ABC \equiv \sphericalangle A'B'C'$ erfüllt.

Hiermit sind z. B. die vier Kongruenzsätze für Dreiecke zu beweisen, die Gleichheit der Scheitelwinkel, die Gleichheit aller rechten Winkel.

Die Axiomgruppe IV: Axiom der Parallelen.

IV (Euklidisches Axiom). *Es sei a eine beliebige Gerade und A ein Punkt außerhalb a: dann gibt es in der durch a und A bestimmten Ebene höchstens eine Gerade, die durch A läuft und a nicht schneidet.*

Die Axiomgruppe V: Axiome der Stetigkeit.

V 1 (Axiom des Messens oder Archimedisches Axiom). *Sind AB und CD irgendwelche Strecken, so gibt es auf der Ge-*

raden AB eine Anzahl von Punkten $A_1, A_2, A_3, \ldots, A_n$, *so daß die Strecken* $AA_1, A_1A_2, A_2A_3, \ldots, A_{n-1}A_n$ *der Strecke CD kongruent sind und B zwischen A und* A_n *liegt.*

V 2 (Axiom der linearen Vollständigkeit). *Die Punkte einer Geraden bilden ein System, welches bei Aufrechterhaltung der linearen Anordnung, des ersten Kongruenzaxions und des Archimedischen Axioms (d. h. der Axiome I 1–2, II, III 1, V 1) keiner Erweiterung mehr fähig ist,* d. h. es ist nicht möglich, zu diesem System von Punkten Punkte auf *a*[1] hinzuzufügen, so daß in dem durch Zusammensetzung entstehenden System sämtliche aufgeführten Axiome erfüllt sind.

Dabei ist eine Erweiterung gemeint, bei der die früheren Axiome in der früheren Weise gültig bleiben sollen, d. h. ein Punkt, der vor der Erweiterung zwischen zwei Punkten liegt, soll dies auch nach der Erweiterung tun, kongruente Strecken sollen kongruent bleiben usw.

2. D. Hilbert hat die moderne Axiomatik begründet, die vor allem in einem entscheidenden Punkt über Euklid hinausgeht: ein Axiomensystem kann grundsätzlich nur logische Beziehungen zwischen den gedachten Dingen, hier den Punkten, Geraden, Ebenen, fordern, diese Dinge selbst beschreibt es nicht, was aus der ersten Erklärung hervorgeht. Wenn man die gedachten Dinge irgendwie umkehrbar eindeutig auf andere gedachte Dinge abbildet, hat man damit eine neue Deutung des Axiomensystems. Es ist gleichgültig, was man sich unter „Punkten", „Geraden", „Ebenen", „kongruent" usw. denkt, wenn es nur in einer Weise geschieht, die mit den Axiomen formallogisch verträglich ist.

Die Wirklichkeit führt, z. B. in der Geometrie, zunächst empirisch auf mathematische Untersuchungen, dann wird das betreffende mathematische Gebiet abstrakt dargestellt – Euklid – und in der fertigen axiomatischen Form – D. Hilbert – wird auf den empirischen Ursprung nicht mehr Bezug genommen. Allerdings wird bei der Beurteilung, was wichtig, was unwichtig ist, die Deutung eines Axiomensystems oft wesentlich sein.

[1] Zu Beginn dieses Axioms fehlt die Bezeichnung *a* für die Gerade.

In einigen früheren Arbeiten[1] bin ich auf einzelne Axiome des Hilbertschen Systems näher eingegangen: so in „A. G. I" auf das Vollständigkeitsaxiom, das durch ein anderes Axiom zu ersetzen ist, etwa das Cantorsche Axiom, wenn man in Übereinstimmung mit der ersten Erklärung D. Hilberts bleiben und nicht außer den gedachten Dingen alle überhaupt denkbaren Dinge betrachten will; im Archimedischen Axiom braucht man nach „A. G. III" nur zu verlangen, daß eine einzige Strecke AB durch Vervielfachung jeder ihrer von A ausgehenden Teilstrecken zu übertreffen ist; das Cantorsche Axiom kann man nach „A. G. III" als reines Anordnungsaxiom, und zwar für eine einzige Strecke und die in ihr liegenden Streckenfolgen aussprechen; endlich genügt es, das Euklidische Parallelenaxiom nur für eine einzige Gerade und einen einzigen Punkt außerhalb der Geraden auszusprechen.[2] Im Axiomensystem D. Hilberts ist, außer in der I. Axiomgruppe, bewußt kein Wert darauf gelegt, Axiome so zu fassen, daß sie nur eine Forderung für einen Einzelfall aussprechen; die Beschränkung auf einen Einzelfall bedeutet aber eine grundsätzliche Vereinfachung,[3] die auch bei dem Arbeiten mit dem Axiomensystem dadurch eine Erleichterung bedeutet, daß man bei der Untersuchung ungewöhnlicher Deutungen die Erfüllung eines solchen Axioms an einem bequemen Einzelfall nachprüfen kann, ohne die ganze Deutung durchmustern zu müssen.

---

[1] „Über das Archimedische Axiom", Mathematische Zeitschrift 26 (1927) S. 757–761; „Zur Axiomatik der Geometrie I. (weiterhin kurz „A. G. I") Über Hilberts Vollständigkeitsaxiom", Mathem. Annalen 100 (1928) S. 321–333; „A. G. II. Vereinfachungen des Archimedischen und des Cantorschen Axioms", Atti del congresso internationale dei matematici, Bologna 1928, T. IV, S. 271–275; „A.G. III. Über das Archimedische und das Cantorsche Axiom", Sitz.Ber. d. Heidelberger Akademie der Wiss., Math.-naturwiss. Kl., 1930, 5. Abh., 12 S.; „A.G. IV. Über die Tragweite des Axioms von Pasch", diese Berichte 1934, S. 145–161. Die Kenntnis dieser Arbeiten wird im folgenden nicht vorausgesetzt, ihre hier in Betracht kommenden Ergebnisse werden angeführt.

[2] Siehe des Verfassers „Nichteuklidische Geometrie" (weiterhin kurz „N. G."), Sammlung Göschen Nr. 970, Berlin und Leipzig 1927, 152 S., Nrn. 37 und 38, sowie D. Hilberts „Grundlagen", S. 38.

[3] Hierauf bin ich näher eingegangen in „Ein Axiomensystem der komplexen, projektiven Geometrie" (weiterhin kurz „A. k. p. G."), diese Berichte 1932, S. 149–191, insbesondere in den Nrn. 8, 22, 30, 37, 43.

Im folgenden soll nun gezeigt werden, daß man eine Anzahl Hilbertscher Axiome ohne nennenswerte Änderung der übrigen Axiome einsparen und damit das Axiomensystem D. Hilberts wesentlich vereinfachen kann, wenn man die Reihenfolge der Axiomgruppen ändert und nicht drei Systeme von Dingen einführt. Das Hauptergebnis ist am Schlusse von § 6 ausgesprochen.

§ 1.

Bemerkungen zum Axiomensystem D. Hilberts.

3.[1] Die Forderung ist naturgemäß, daß ein Axiom sich nicht in mehrere Teilaxiome zerlegen läßt, da sonst die Aufspaltung des Axiomensystems in Axiome keinen Sinn hätte. Ein Axiom soll demnach nur eine Forderung enthalten.[2] Es ist merkwürdig, wie verschiedenartig hierin D. Hilberts Axiome sind: während z. B. I 1 und I 2 die Aussage „zu zwei Punkten A, B gibt es stets genau eine Gerade a, die mit jedem der beiden Punkte A, B zusammengehört" sehr sorgfältig zerlegen und dasselbe für den ersten Satz von I 4 und für I 5 gilt, enthält I 3 in seinen beiden Sätzen zwei ganz verschiedene Axiome, die mit I 3a und I 3b bezeichnet werden mögen, ebenso I 4 die beiden Axiome I 4a und I 4b.[3] Das

---

[1] Über den Hauptinhalt der vorliegenden Arbeit habe ich bei der Jahresversammlung der Deutschen Math. Vergg. in Würzburg 1933 kurz berichtet. Äußere Ursachen verschiedener Art lassen mich erst jetzt dazu kommen, diese Dinge ausführlich darzustellen.

[2] Vgl. hierzu aber die folgende Anmerkung.

[3] Man könnte noch I 3a in die beiden Axiome zerlegen „auf einer Geraden gibt es stets wenigstens einen Punkt" und „auf einer Geraden gibt es stets wenigstens einen zweiten Punkt", doch sei von dieser weiteren Zerspaltung hier abgesehen, da es in der Axiomatik üblich ist, Existenzialforderungen einer Zahl gleichberechtigter Elemente nicht in die Forderungen nach jedem einzelnen Element zu zerlegen. Vgl. auch meine Axiome I 1 und I 5 in „A. k. p. G.", § 3. Auch I 3b läßt sich noch zerspalten in „es gibt wenigstens drei Punkte" und „sie liegen nicht auf einer Geraden". Doch folgt der erste Teil aus I 8 – wenn man den Existenzialaussagen rückwirkende Kraft gibt, wovon noch die Rede sein wird –, das aber seinerseits zu zerlegen wäre in „es gibt wenigstens vier Punkte" und „sie liegen nicht in einer Ebene". Von dieser letzten Zerlegung möge hier deshalb abgesehen werden, weil bei uns dieses Axiom an einer Stelle auftreten wird, an der die Existenz von mindestens vier Punkten schon gesichert ist, so daß es dann nur noch eine Forderung enthält.

Axiom III 4[1] endlich läßt sich sogar in drei Axiome aufspalten: III 4a bestünde aus dem 1. Teile des Axioms, wenn man „und nur einen" streicht, III 4b geht aus III 4a hervor, wenn man „nicht mehr als einen" an die Stelle von „einen" setzt – damit hat man die gleiche Zerlegung, welche die Paare I 1, I 2 sowie I 4a, I 5 statt je eines Axioms liefert – endlich spricht der letzte Satz von III 4 das Axiom III 4c aus.

Man erhält so bei D. Hilbert in den beiden ersten Axiomgruppen 14 Axiome, nämlich 10 in der I. Gruppe, 4 in der II. Gruppe.

4. Ein Axiomensystem soll keine überzähligen Axiome enthalten. Das heißt zunächst, es soll keines der Axiome aus den übrigen beweisbar sein, weiterhin soll das Axiomensystem aber deutbar sein. Eine zulässige Deutung liegt dabei nur dann vor, wenn in dieser jedes Axiom benötigt und erfüllt wird, wenn also Dinge der Deutung dem betreffenden Axiome genügen. Werden die Axiome so formuliert, daß sie aus einem die Voraussetzungen enthaltenden Vordersatz und aus einem die Forderung des Axioms aussprechenden Nachsatze bestehen, dann muß demnach eine zulässige Deutung für jedes Axiom die Voraussetzungen des Vordersatzes erfüllen, da sonst das betreffende Axiom entbehrlich wäre. Wenn die Erfüllbarkeit des Vordersatzes eines Axioms nicht durch vorausgehende Axiome gewährleistet wäre, dann enthielte das betreffende Axiom zweierlei Forderungen, nämlich die, daß sein Vordersatz erfüllbar sein soll, und die seines Nachsatzes. Dies widerspräche zunächst dem Anfange von Nr. 3, weiterhin wäre aber dieses versteckte Einführen von Existenzialforderungen mit der Klarheit, die man von einem Axiomensystem fordern muß, unverträglich.[2]

---

[1] „Grundlagen", S. 13, ist der 3. und 4. Absatz zu vertauschen, da man nicht von „überstumpfen" Winkeln sprechen kann, bevor das Winkelinnere erklärt ist.

[2] So wird z. B. niemand aus der (allen übrigen Axiomen der Euklidischen Geometrie mit Ausnahme des Parallelenaxioms genügenden) absoluten Geometrie die Euklidische Geometrie dadurch gewinnen, daß er statt des Parallelenaxioms etwa ein Axiom einführt „wenn in einem Dreieck die Winkelsumme gleich zwei Rechten ist, dann . . ."; die Erfüllbarkeit dieses Vordersatzes könnte nicht aus den übrigen Axiomen bewiesen werden.

Hier läßt D. Hilberts Axiomensystem Wünsche offen: zunächst fehlt vor I 1 ein Axiom, das die Existenz mindestens zweier Punkte fordert; vor I 7 fehlt ein Axiom, welches die Existenz zweier Ebenen gewährleistet; und selbst, wenn man durch Vorziehen von I 8 hier für Abhilfe sorgte, würde der Vordersatz von I 6 leer laufen.[1] Man muß demnach das Anordnungsaxiom II 2 heranziehen, um das Verknüpfungsaxiom I 6 sinnvoll aussprechen zu können. Endlich ist auch der Vordersatz von II 1 erst durch II 2 garantiert, so daß innerhalb der Anordnungsaxiome II 1 und II 2 zu vertauschen sind.

Die hier genannten Schwierigkeiten werden durch die weiterhin angegebenen Abänderungen am System D. Hilberts wegfallen.

5. Es seien nun D. Hilberts Axiome der Verknüpfung *mit Ausnahme des Axioms I 5* vorausgesetzt, dazu die Axiome II 2, II 3, II 4. Drei Punkte A, B, C, die nicht in einer Geraden liegen

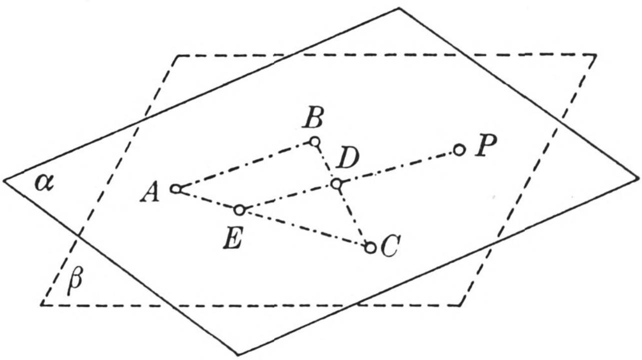

Fig. 1

(I 3), bestimmen nach I 4 mindestens eine Ebene α. Angenommen, es wäre durch dieselben drei Punkte noch eine Ebene β bestimmt. Dann würden nach I 6 alle Punkte der Geraden AB, BC, CA sowohl in α als auch in β liegen. Wäre P ein weiterer Punkt von α und Punkt einer dieser drei Geraden, dann wäre er auch Punkt von β. Läge er aber auf keiner dieser drei Geraden,

[1] Das zeigt die Deutung der übrigen Verknüpfungsaxiome durch die Ecken, Kanten, Flächen eines Tetraeders als Punkten, Geraden, Ebenen mit den üblichen Inzidenzbeziehungen.

Fig. 1, dann würde ein Punkt D, der zwischen B und C liegt („Grundlagen“ S. 5/6, Satz 3 mit Beweis mittels der Axiome I 3, II 2, II 3, II 4) zu α und β gehören und nach I 1 eine Gerade DP liefern, die nach II 4 entweder den Punkt A oder einen Punkt E enthielte, der innerer Punkt einer der Strecken AB oder AC wäre und gleichzeitig Punkt von β. Die Gerade AD oder ED wäre daher nach I 6 auch Gerade von β, demnach wäre P auch Punkt von β. Dies ist der, *ohne Axiom I 5* geführte Beweis für den

Satz I. Haben zwei Ebenen drei nicht in einer Geraden liegende Punkte gemeinsam, dann haben sie alle Punkte gemeinsam.

6. Durch diesen Satz I ist trotz seiner engen Verwandtschaft mit dem Axiom I 5 nicht etwa dieses Axiom bewiesen, denn es lassen sich Deutungen angeben, in denen zwar dieser Satz, aber nicht das Axiom I 5 gilt:

Man deutet z. B. die Worte „Punkt“, „Gerade“, „Ebene“ in der üblichen Euklidischen Weise und fügt noch irgendein Ding als „Ebene“ β hinzu, der man die Punkte und Geraden einer Euklidischen Ebene α zuordnet. Mit irgend drei nicht kollinearen Punkten von α gehören dann zwei Ebenen zusammen, nämlich α und β, in Widerspruch mit I 5. Mit Ausnahme dieses Axioms sind die Axiome der Gruppen I–IV und das Archimedische Axiom erfüllt.[1]

Oder man nimmt ein Drehparaboloid $\{P\}$ an, deutet wieder die Worte „Punkt“, „Gerade“, „Ebene“ Euklidisch, nennt aber außerdem noch die Euklidischen Punkte „Ebenen“ und ordnet einer solchen punktförmigen Ebene γ als „Punkte“ in der Deutung des Axiomensystems die Euklidischen Punkte zu, welche

---

[1] Diese Deutung kann man ohne weiteres in den Ebenen erweitern, ohne neue Punkte oder Gerade hinzuzudenken. Der Schluß von der Vollständigkeit der Punkte auf die der Ebenen und Geraden, wie er vom Verfasser in seiner „N. G.“ S. 51, ferner in „A. G. I“, S. 322/323 und S. 325/326 durchgeführt wurde, sowie von D. Hilbert, „Grundlagen“ S. 31/32, ist demnach wesentlich durch I 5 und entsprechend durch I 2 bedingt. Die Bemerkung S. 32 der „Grundlagen“, daß für den Vollständigkeitssatz die Aufrechterhaltung von I 7 wesentlich ist, läßt sich demnach dahin erweitern, daß auch die Aufrechterhaltung von I 5 und I 2 nötig ist.

in der Euklidischen Polarebene von γ bezüglich $\{P\}$ liegen.[1] Dann zerfallen die Ebenen in zwei Klassen, die Euklidischen und die punktförmigen. Zu irgend drei nicht-kollinearen Punkten in einer Euklidischen Ebene, die nicht zur Achse von $\{P\}$ parallel ist, gibt es dann, in Widerspruch mit I 5, zwei Ebenen, die mit jedem der drei Punkte zusammengehören, nämlich deren Euklidische Verbindungsebene und außerdem den Pol dieser Verbindungsebene als punktförmige Ebene.[2]

Die nun naheliegende Betrachtung des Satzes I und des Axioms I 5 zeigt, daß man I 5 in den Beweisen der Sätze der Euklidischen Geometrie entbehren kann, wenn man unter zwei „verschiedenen" Ebenen zwei Ebenen versteht, deren eine im Sinne der Axiome I 4a, I 4b, I 6, I 7, I 8 mit mindestens einem Punkte zusammengehört, mit dem die andere nicht zusammengehört, die demnach punkt-verschieden sind.[3] *Daher ist das Axiom I 5 entbehrlich, obwohl es nicht aus den übrigen Axiomen bewiesen werden kann.*

7. Der tiefere Grund für diese merkwürdige Tatsache ist folgender:

Die Dinge der drei Systeme D. Hilberts, die Punkte, Geraden, Ebenen, *sind nicht gleichberechtigt.* Jedes Axiom handelt von Punkten in Verbindung mit Geraden oder Ebenen oder beiden, dagegen kein einziges nur von Geraden und Ebenen.[4] Demnach

---

[1] Man könnte auch ein allgemeines Paraboloid nehmen. Bei einer Mittelpunktsfläche 2. Ordnung wäre dem Mittelpunkt als punktförmiger Ebene entgegen I 4b kein Punkt zugeordnet.

[2] Auch diese Deutung erfüllt die beim vorigen Beispiele genannten Axiome. Sie läßt sich ebenfalls in den Ebenen erweitern, ohne daß man neue Punkte oder Gerade hinzudenkt, indem man noch weitere Drehparaboloide annimmt und mit ihnen so verfährt wie mit dem ersten.

[3] In der ersten Deutung sind α und β nicht punktverschieden. Ist in der zweiten Deutung eine Euklidische Ebene nicht parallel zur Drehachse und ist γ die punktförmige Ebene ihres Poles, dann sind diese beiden Ebenen nicht punktverschieden.

[4] Es gibt auch keinen Satz der Euklidischen Geometrie, der nur von Geraden oder Ebenen oder beiden handelt, in allen Sätzen treten Punkte auf; dabei ist zu berücksichtigen, daß z. B. die Aussage, daß sich zwei Gerade schneiden (nicht schneiden), nichts anderes bedeutet, als daß es einen (keinen) Punkt gibt, der mit beiden zusammengehört.

nehmen die Punkte eine Sonderstellung gegenüber den Geraden und Ebenen ein. Die Aufgabe dieser beiden letzten Systeme von Dingen ist die, Zuordnungen innerhalb des Systems der Punkte festzulegen.[1] Die Euklidische Geometrie handelt nur von den Punkten und den durch die Geraden und Ebenen bestimmten Punktmengen, während die Hilbertschen Geraden und Ebenen ohne selbständige Bedeutung neben der Geometrie herlaufen. Dies erkennt man z. B. einfach dadurch, daß man zunächst D. Hilberts Axiomensystem in der Euklidischen Weise deutet und dann aus dieser Deutung $\{\mathfrak{D}\}$ eine neue Deutung $\{\mathfrak{D}_1\}$ dadurch ableitet, daß man von einem Punkt O aus die Geraden durch eine Dehnung des Raumes hinausschiebt, die Ebenen durch eine andere Dehnung, während man die Punkte und ihre Zuordnungen unverändert läßt. Dann kommt irgendeine O nicht enthaltende Gerade g oder Ebene ε in eine neue Lage g_1 oder ε_1; die mit g_1 oder ε_1 nach den Axiomen zusammengehörenden Punkte sind jedoch die in g oder ε liegenden. Diese Deutung $\{\mathfrak{D}_1\}$ erfüllt sämtliche Axiome D. Hilberts. Man kann nun jeden Satz der Euklidischen Geometrie durch eine nur aus Punkten bestehende Figur erläutern, die sich durch den Übergang von $\{\mathfrak{D}\}$ zu $\{\mathfrak{D}_1\}$ nicht ändert; wenn man allerdings auch noch Gerade und Ebenen einträgt, dann erhält man eine andere Figur, z. B. gehen die Seiten eines Dreiecks dann räumlich nicht durch dessen Eckpunkte, und die Ebene eines Dreiecks enthält räumlich weder die drei Eckpunkte noch die drei Seiten.

8. So erklärt es sich auch, daß D. Hilberts Axiomensystem für die Euklidische Geometrie genügt, obwohl darin – was besonders bei der Deutung $\{\mathfrak{D}_1\}$ klar wird – auf die für die räumliche Anschauung wesentlichen Tatsachen der *Inzidenz* der Punkte mit den ihnen zugeordneten Geraden und Ebenen überhaupt nicht Bezug genommen wird. Räumlich-anschaulich ist die Gerade

[1] So daß z. B. die Verknüpfungsaxiome, die von Punkten und Geraden handeln, die wesentliche Tatsache festlegen, daß es innerhalb des Systems der Punkte Zusammenfassungen zu Punktmengen derart gibt, daß durch irgend zwei Punkte eine solche Menge eindeutig bestimmt ist, diese Punkte dazugehören und die Menge durch irgend zwei ihrer Punkte eindeutig bestimmt ist.

oder Ebene *Träger* ihrer Punkte, in D. Hilberts Axiomensystem nicht notwendig.

Damit wird man dazu geführt, die Einführung der drei Systeme von Dingen D. Hilberts fallen zu lassen und nur von dem System der Punkte sowie von Punktreihen und Punktfeldern zu handeln, wie es in verschiedenen Axiomensystemen schon geschehen ist.[1]

Das läßt sich, worauf wir jetzt eingehen wollen, einfach durchführen, *indem man von den Anordnungstatsachen als den anschaulichen Grundtatsachen ausgeht*, und zwar fast ausschließlich mit Verwendung Hilbertscher Axiome. Die nähere Untersuchung wird zeigen, daß man, neben anderen Vorteilen, von denen noch die Rede sein wird, nicht nur, was nach den Nrn. 5 und 6 zu erwarten ist, das Axiom I 5 einspart, sondern nach der Zählung von Nr. 3 noch weitere 5 Verknüpfungsaxiome, so daß in dem abgeänderten Axiomensystem in den beiden ersten Axiomgruppen statt 14 Axiomen nur deren 8 auftreten, ohne daß man an den Axiomen der übrigen Gruppen etwas zu ändern bräuchte.

Ebenso beginnt O. Veblen a. a. O. mit den Anordnungsaxiomen. Auf die enge Verwandtschaft von hier folgenden Axiomen mit solchen von O. Veblen werden wir in Nr. 29 noch hinweisen.

§ 2.

Die neue Axiomgruppe der Anordnungsaxiome.

9. Die beiden Erklärungen D. Hilberts vor der Axiomgruppe I und zu Beginn der Axiomgruppe II werden folgendermaßen abgeändert und zusammengefaßt:

1. Erklärung. *Die Euklidische Geometrie handelt von einem System von Dingen, die man „Punkte“ nennt und mit großen, lateinischen Buchstaben bezeichnet. Punkte können in einer Beziehung stehen, die durch das Wort „zwischen“ bezeichnet wird.*

---

[1] So bei O. Veblen, „A system of axioms for geometry“, Trans. of the American Mathem. Soc., Vol. 5 (1904) p. 343–384 für die Euklidische und die reelle, projektive Geometrie; für die komplexe projektive Geometrie in des Verfassers „A. k. p. G.“.

A. Anordnungsaxiome.[1]

A 1. Es gibt drei Punkte $\bar{R}$, $\bar{S}$, $\bar{T}$,[2] die miteinander in keiner zwischen-Beziehung stehen.

Dieses Axiom entspricht dem Hilbertschen I 3b. Es gewährleistet die Existenz von mindestens drei Punkten.

A 2. Zu zwei Punkten A, B gibt es wenigstens einen dritten Punkt C derart, daß B zwischen A und C liegt, in Zeichen ABC.[3]

A 2 unterscheidet sich, bis auf die Bezeichnung, von D. Hilberts II 2 durch den Fortfall von „auf der Geraden AB“, da bei uns die Anordnungsaxiome dazu dienen werden, zu *definieren*, was es heißt, daß Punkte in einer Geraden, einer Ebene liegen. Es folgen nun II 1 in etwas abgeänderter Fassung und fast wörtlich II 3:

A 3. Aus ABC folgt CBA.

A 4. Unter drei Punkten gibt es nicht mehr als einen, der zwischen den beiden anderen liegt.

Bezeichnet „*non* ABC“, daß zwar zwischen den Punkten A, B, C eine zwischen-Beziehung besteht, aber nicht die Beziehung ABC (sondern BCA oder CAB), dann folgt aus ABC, den Axiomen A 3 und A 4 zufolge: non ACB, non BCA, non BAC, non CAB. Zu B und A gibt es nach A 2 einen Punkt D mit BAD, der demnach von C verschieden sein muß. Es gibt daher 4 Punkte, die sich zu zwei Tripeln mit zwischen-Beziehungen zusammenfassen lassen, wie sie der Vordersatz des nun folgenden Axioms voraussetzt:

---

[1] Die Bezeichnung der neuen Axiomgruppen mit großen, lateinischen Buchstaben gestattet eine einfache Unterscheidung von den Axiomgruppen D. Hilberts, die mit römischen Ziffern bezeichnet sind.

[2] Die Buchstaben in den Axiomen auftretender Punkte, auf die wiederholt zurückgegriffen wird, werden durch Überstreichen hervorgehoben. Das sind nicht etwa Punktindividuen, die durch keine anderen ersetzt werden können, nur müßte diese Ersetzung gleichzeitig in allen Axiomen erfolgen, die von ihnen handeln. Vgl. dazu auch „A. k. p. G.“, S. 189, Anm. 2.

Mit zwei, drei, . . . Punkten sind, wie bei D. Hilbert, zwei, drei, . . . *verschiedene* Punkte gemeint; siehe auch „A. k. p. G.“, S. 159, Anm. 3.

[3] Diese bequeme Bezeichnung wird schon lange in Untersuchungen über Anordnungseigenschaften verwendet.

A 5. Liegt einer der Punkte A, B, C zwischen den beiden anderen und einer der Punkte A, B, D zwischen den beiden anderen, dann liegt auch einer der Punkte B, C, D zwischen den beiden anderen.

Daß aus A 5 ein Axiom D. Hilberts folgt, wird sich am Ende von Nr. 11 zeigen.

10. Nun werden vermöge der zwischen-Beziehungen Punktreihen eingeführt durch die

2. Erklärung. *Sind A, B irgend zwei Punkte, dann bilden die Punkte A und B sowie die Punkte, welche mit A und B in einer zwischen-Beziehung stehen, die „Punktreihe AB". Punktreihen werden auch mit kleinen, lateinischen Buchstaben bezeichnet.*

Nach dieser Erklärung ist die Punktreihe AB mit der Punktreihe BA identisch. Über Punktreihen lassen sich nun einige Sätze beweisen.

Aus der Bemerkung nach A 4 folgt, daß die Punktreihe AB mindestens zwei weitere Punkte C, D enthält mit ABC und BAD; zu A und C gibt es nach A 2 einen Punkt X mit ACX, wobei wegen A 4 der Punkt X von B verschieden ist. Wenn X auch von D verschieden ist, dann ist X ein fünfter Punkt der Punktreihe AB, bezeichnen aber X und D denselben Punkt, d. h. gilt ACD, dann gibt es nach A 2 zu C und A einen Punkt E mit CAE, der wegen ABC und ACD nach A 4 von B und D verschieden ist. Demnach gilt der

Satz 1. Jede Punktreihe enthält mindestens fünf Punkte.

11. Es seien nun C, D, E Punkte der Punktreihe AB, d. h. es bestehen zwischen-Beziehungen in den Punktetripeln (1) A, B, C, ferner (2) A, B, D und (3) A, B, E; dann gibt es nach A 5 auch eine zwischen-Beziehung in dem Tripel (4) B, C, D und vermöge (1) und (2) auch in (5) A, C, D. Zufolge (4) und (5) sind A und B Punkte der Punktreihe CD. Aus (1) und (3) folgt vermöge A 5 eine zwischen-Beziehung in dem Tripel (6) A, C, E und aus (5) und (6) eine solche in (7) C, D, E. Demnach ist auch E Punkt der Punktreihe CD. Aus (1), (2), (5), (7) und A 4 folgt der

Satz 2. Irgend drei Punkte einer Punktreihe stehen in einer zwischen-Beziehung; genau einer von ihnen liegt zwischen den beiden anderen.[1]

Sind A, B zwei Punkte, dann können nicht alle drei Punkte $\bar{R}$, $\bar{S}$, $\bar{T}$ mit ihnen in zwischen-Beziehung stehen, da sonst nach Satz 2 eine zwischen-Beziehung zwischen $\bar{R}$, $\bar{S}$, $\bar{T}$ bestehen müßte, im Widerspruch mit A 1. D. h.

Satz 3. Außerhalb jeder Punktreihe gibt es mindestens einen Punkt.

Aus dem Satze 2 und der 2. Erklärung ergeben sich unmittelbar die beiden Sätze, die nur verschiedene Ausdrücke für den gleichen Sachverhalt sind:

Satz 4. Haben zwei Punktreihen zwei Punkte gemeinsam, dann haben sie alle Punkte gemeinsam.

Satz 5. Eine Punktreihe ist durch irgend zwei ihrer Punkte eindeutig bestimmt.

Dieser letzte Satz entspricht D. Hilberts Axiom I 2, das demnach mittels A 5 bewiesen wird.

12. Wir wenden uns zum letzten Anordnungsaxiom D. Hilberts, II 4.[2] Zunächst werden, wie bei D. Hilbert, die Strecken erklärt.

3. Erklärung. *Das System zweier Punkte A, B nennt man, ohne Rücksicht auf ihre Reihenfolge, „Strecke AB". Die Punkte zwischen A und B heißen „Punkte der Strecke AB", A und B heißen „Endpunkte der Strecke AB"; alle übrigen Punkte der Punktreihe AB heißen „außerhalb der Strecke AB" gelegen.*

---

[1] Der mittels des Axioms II 4 geführte Beweis von A. Wald für diesen Satz, „Grundlagen" S. 6, wird hier entbehrlich.

[2] Die aus den früheren Auflagen übernommene Fassung von II 4 in den „Grundlagen" mit „entweder . . . oder" ist mit dem anschließenden letzten Satze vor § 4 unverträglich, es müßte danach etwa heißen: „. . . gewiß auch durch einen Punkt mindestens einer der Strecken AC, BC". Vgl. dagegen die „schwächere" Fassung von „entweder, oder" bei G. Thomsen, „Grundlagen der Geometrie in gruppenalgebraischer Behandlung", Leipzig und Berlin 1933, 88 S., insbes. S. 24, die sprachlich nicht glücklich ist.

Die Strecke AB ist nach dieser Erklärung gleichbedeutend mit der Strecke BA.

Nach A 1 und A 2 gibt es, Fig. 2,[1] einen Punkt X mit $\bar{R}\bar{S}X$ und einen Punkt Y mit $\bar{R}\bar{T}Y$, also gibt es eine zwischen-Beziehung im Tripel Y, $\bar{R}$, $\bar{T}$, wobei im Tripel Y, $\bar{R}$, $\bar{S}$ keine zwischen-Beziehung bestehen kann, da sonst vermöge A 5 eine

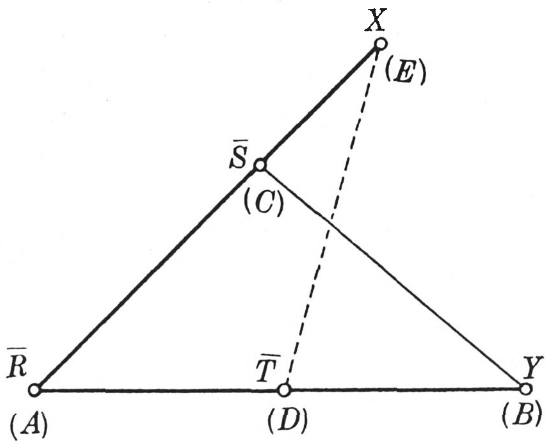

Fig. 2

solche im Tripel $\bar{R}$, $\bar{T}$, $\bar{S}$ folgen würde, in Widerspruch zu A 1. Damit ist die Konstellation des nun folgenden letzten Anordnungsaxioms gewonnen, das eine etwas veränderte Form von II 4 ist, Fig. 2:

A 6. Sind A, B, C drei Punkte, die miteinander in keiner zwischen-Beziehung stehen, ist D ein Punkt der Strecke AB und E ein außerhalb der Strecke AC liegender Punkt der Punktreihe AC, dann enthält die Punktreihe DE mindestens einen Punkt der Strecke BC.

Daß die Punktreihe DE genau einen Punkt der Strecke BC enthält, ergibt sich ohne weiteres aus Satz 4.

[1] In Fig. 2 gelten zunächst die nichteingeklammerten Buchstaben, die eingeklammerten beziehen sich auf den Wortlaut des gleich folgenden Axioms A 6.

§ 3.

Folgerungen aus der Axiomgruppe A.

13. Man beweist nun, wie in den „Grundlagen“ S. 5/6 den

Satz 6. Zwischen irgend zwei Punkten einer Punktreihe liegt mindestens ein Punkt.

Beweis: B, C seien die beiden Punkte, nach dem Satze 3 sei D ein Punkt außerhalb der Punktreihe BC. Dann gibt es nach A 2 einen Punkt A mit BDA und einen Punkt E mit ACE. Nach A 6 existiert in der Punktreihe DE ein Punkt der Strecke BC.

Es mögen nun die Beziehungen (1) ABC und (2) ACD bestehen, Fig. 3. Dann gibt es nach Satz 3 einen Punkt E außer-

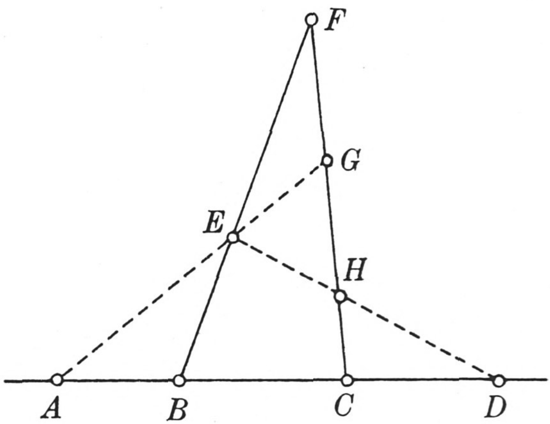

Fig. 3

halb der Punktreihe AC und nach A 2 einen Punkt F mit (3) BEF, der nach Satz 4 nicht zur Punktreihe BC gehört. Nun folgt vermöge A 6 aus den Punkten B, F, C und (1), (3) die Existenz eines Punktes G mit (4) FGC, ebenso aus den Punkten A, G, C und (1), (4) die Beziehung (5) AEG, ferner aus den Punkten A, E, D und (2), (5) ein Punkt H mit (6) EHD, endlich aus den Punkten B, E, D und (3), (6) die Beziehung BCD. Daher gilt der

Satz 7. Aus ABC und ACD folgt BCD.

Man beweist nun den

Satz 8. Aus ABC und ABD folgt non CBD.

Denn aus (1) ABC und (2) ABD folgt zunächst non CAD, da sich aus CBA und CAD Satz 7 zufolge BAD ergeben würde, in Widerspruch zu (2). Daher gilt entweder (3) ADC oder (4) ACD. Aus (2) und (3) würde BDC nach Satz 7 folgen, aus (1) und (4) aber BCD, demnach gilt non CBD.

14. Es gelte (1) ABC und (2) ACD, dann gilt nach Satz 7 auch (3) BCD. Damit sind nun sowohl (4) BDA als auch (5) DAB unverträglich, denn aus (3) und (4) würde CDA nach Satz 7 folgen, was nach A 4 unvereinbar mit (2) wäre, und aus (2) DCA und (5) würde sich CAB ergeben, entgegen (1). Das liefert, zusammengehalten mit Satz 2, den

Satz 9. Aus ABC und ACD folgt ABD.

Angenommen, es bestehen die Beziehungen (1) und (3), Fig. 3. Dann wählt man G außerhalb der Punktreihe BC und F mit (6) CGF. Es folgt nach A 6 aus den Punkten A, C, G und (1), (6) ein Punkt E der Punktreihe FB mit (7) AEG, weiter aus den Punkten B, C, F und (1), (6) die Beziehung (8) BEF, ferner aus den Punkten B, E, D und (3), (8) ein Punkt H der Punktreihe FC mit (9) EHD, endlich aus den Punkten A, E, D und (7), (9) die Beziehung ACD. Aus ABC und BCD folgt demnach ACD, ebenso aus DCB und CBA die Beziehung DBA. Das gibt zusammengefaßt den

Satz 10. Aus ABC und BCD folgt ABD und ACD.[1]

15. Es gelte (1) ABC und (2) BDC. Dann gilt nach Satz 2 eine und nur eine der drei Beziehungen (3) ADB, (4) BAD, (5) ABD. Infolge (3) und (1) müßte, Satz 7 zufolge, DBC gelten, (2) widersprechend; aus (4) und (2) würde, Satz 9 zufolge, BAC folgen, (1) widersprechend. Daher gilt (5). Das ist der

Satz 11. Gilt ABC, dann kann kein Punkt einer der beiden Strecken AB, BC gleichzeitig Punkt der anderen sein.

[1] Die Sätze 1–10 und ihre Beweise sind bekannt, vgl. z. B. „Grundlagen", S. 7 und H. Liebmann, „Nichteuklidische Geometrie", 3. Aufl., Berlin und Leipzig 1923, S. 11/12.

Man bezeichnet eine Strecke PQ als „*Teilstrecke*“ einer Strecke AB, wenn entweder P und Q Punkte der Strecke AB sind, oder einer Punkt und der andere Endpunkt der Strecke AB ist. Gilt ABC, dann ist demnach die Strecke AB Teilstrecke der Strecke AC. Es sei D ein Punkt der Strecke AB, d. h. es gelte ADB und ABC, dann folgt nach Satz 9 daraus ADC, der Punkt der Teilstrecke AB ist demnach auch Punkt der ganzen Strecke AC. Gilt APQ und PQB, dann ist irgendein Punkt R der Strecke PQ demnach auch Punkt der Strecke PB, daher auch Punkt der Strecke AB. Das ist der erste Teil von

Satz 12. Ist eine erste Strecke Teilstrecke einer zweiten, dann ist jeder Punkt der ersten auch Punkt der zweiten, während es Punkte der zweiten gibt, die nicht zur ersten gehören.

Der zweite Teil dieses Satzes ist klar, man braucht ja nur einen Punkt der Strecken AP oder QB zu nehmen.

Es gelte nun ABC und BCD, dann gilt nach Satz 10 auch ACD. Liegt ein Punkt in der Strecke AB, dann liegt er nach Satz 12 auch in der Strecke AC und vermöge des Satzes 11 nicht in CD. D. h.

Satz 13. Sind in einer Punktreihe vier Punkte A, B, C, D gegeben und gilt ABC sowie BCD, dann gibt es keinen Punkt, der sowohl zur Strecke AB als auch zur Strecke CD gehört.

16. Sind nun A und B irgend zwei Punkte einer Punktreihe, dann gibt es nach Satz 6 einen Punkt C zwischen A und B, dann einen Punkt D zwischen A und C sowie einen Punkt E zwischen C und B, in jeder dieser vier Strecken AD, DC, CE, EB wieder je einen Punkt usf. Daher gilt der weit über Satz 1 hinausgehende erste Teil von

Satz 14. In einer Punktreihe gibt es zwischen irgend zwei Punkten unendlich viele Punkte. Außerhalb jeder Strecke einer Punktreihe gibt es unendlich viele Punkte der Punktreihe.

Der zweite Teil dieses Satzes ist klar, denn ist AB eine Strecke, dann gibt es nach A 2 einen Punkt C mit ABC und in der Strecke BC nach dem ersten Teile des Satzes unendlich viele Punkte. Ebenso gibt es einen Punkt D mit BAD und in der Strecke AD unendlich viele Punkte.

Aus Satz 14 ergibt sich unmittelbar, daß es unendlich viele Punktreihen gibt: die Punktreihen $\bar{R}\bar{S}$ und $\bar{S}\bar{T}$ sind nach A 1 voneinander verschieden, jede enthält unendlich viele Punkte, und irgendeiner dieser Punkte, der von $\bar{S}$ verschieden ist, der einen Punktreihe bestimmt mit einem von $\bar{S}$ verschiedenen Punkte der andern Punktreihe nach Satz 5 eine Punktreihe, und nach Satz 4 sind alle diese Punktreihen voneinander verschieden. Demnach gilt der

Satz 15. Es gibt unendlich viele Punktreihen.

§ 4.

Zwei Erklärungen.

17. Es seien O, A, B, C, D fünf Punkte einer Punktreihe und es gelte AOB sowie AOC, vermöge des Satzes 8 gilt dann non BOC; ebenso folgt aus BOA und BOD die Beziehung non AOD. Damit ist die Möglichkeit gegeben, in einer Punktreihe von einem Punkt aus zwei Seiten zu unterscheiden:

4. Erklärung. *Sind O, A, B drei Punkte einer Punktreihe, dann liegen A und B „auf der gleichen Seite von O", wenn O nicht zwischen A und B liegt, „auf verschiedenen Seiten von O", wenn AOB gilt. Die Punkte auf der gleichen Seite von O bilden eine von O ausgehende „Halb-punktreihe".*

Nach dem soeben Gesagten gilt der

Satz 16. Eine Punktreihe wird durch jeden ihrer Punkte in zwei Halb-punktreihen zerlegt.

Zu irgend zwei Punkten gibt es nach Satz 3 mindestens einen Punkt, der mit ihnen nicht in einer Punktreihe liegt (nach Satz 15 sogar unendlich viele). Man kann daher die folgende Erklärung aussprechen:

5. Erklärung. *Drei Punkte A, B, C, die miteinander in keiner zwischen-Beziehung stehen, bestimmen ein „Dreieck", „$\triangle\ ABC$". Die drei Punkte heißen dessen „Ecken". Die Punkte der Strecke AB heißen „innere Punkte der Gegenseite von C", diese Punkte sowie A und B heißen „Punkte der Gegenseite von C".*

Da auch die Punkte B, C, A in keiner zwischen-Beziehung stehen usw., ist nach dem ersten Satze dieser Erklärung $\triangle ABC$ gleichbedeutend mit $\triangle BCA$, $\triangle CAB$, $\triangle CBA$, $\triangle BAC$, $\triangle ACB$. Daher erhält man aus dem letzten Satze der Erklärung auch die Punkte der Gegenseite von A und der von B durch zyklische Vertauschung der Buchstaben.

18. In $\triangle ABC$ liege D so, daß ADB gilt, und E so, daß ECA gilt. Im $\triangle ADE$ liegt dann B außerhalb der Strecke AD, während C innerer Punkt der Strecke AE ist, daher ist nach A 6 der Punkt F Punkt der Strecke DE, daher gilt EFD. Das ist der

Satz 17. Trifft eine Punktreihe die Seiten AB und BC eines Dreiecks ABC in den inneren Punkten D und F und die Punktreihe AC in einem Punkt E mit ECA, dann gilt EFD.

Angenommen, die Seiten eines $\triangle ABC$ würden von einer Punktreihe a in den Punkten E, F, D getroffen. Einer dieser Punkte liegt zwischen den beiden anderen, z. B. E zwischen F und D, so daß (1) FED gilt. D, E, F mögen der Reihe nach auf den Seiten AB, BC, CA liegen, es wäre demnach (2) ADB, (3) BEC, (4) CFA. Die Punktreihe BE träfe $\triangle AFD$ in den Punkten B, E, C, und wegen (2) und (1) müßte nach Axiom A 6 (Nr. 12) die Beziehung FCA bestehen, im Gegensatze zu (4). Das ist der Beweis für den

Satz 18. Nimmt man in jeder der Seiten eines Dreiecks einen inneren Punkt, dann können diese drei Punkte nicht der gleichen Punktreihe angehören.

§ 5.

Das Punktfeld.

19. Das Punktfeld wird nun eingeführt durch die

6. Erklärung. *Es sei ein $\triangle ABC$ gegeben. Die Punkte derjenigen Punktreihen, welche irgendeinen Eckpunkt des Dreiecks und einen Punkt der zugehörigen Gegenseite enthalten, bilden das „Punktfeld ABC". Punktfelder werden auch mit kleinen, griechischen Buchstaben bezeichnet.*

Es soll nun schrittweise folgendes gezeigt werden: sind U, V, W irgend drei Punkte des Punktfeldes ABC, die nicht zur gleichen Punktreihe gehören, dann besteht das Punktfeld UVW aus denselben Punkten wie das Punktfeld ABC.

20. D sei ein von A und B verschiedener Punkt der Punktreihe AB. Dann sind die drei Fälle möglich

1) DAB, 2) ADB, 3) ABD.

Die Punkte des Feldes ABC, die zugleich Punkte einer der Punktreihen AB oder BC sind, gehören dann, wie unmittelbar klar ist, auch zum Punktfelde DBC, ebenso die Punkte der Punktreihe CA im Falle 1). Die Punktreihe CA in den Fällen 2) und 3) wird in Nr. 24 behandelt werden.

P sei ein von A verschiedener Punkt in einer Punktreihe durch A und nicht Punkt einer der Punktreihen AB, BC, CA. Dann haben die Punktreihe AP und die Strecke BC einen Punkt E gemeinsam, und es können drei Unterfälle eintreten, nämlich

a) AEP, b) APE, c) PAE.

Oder P sei ein Punkt einer Punktreihe durch B, und F sei der gemeinsame Punkt der Punktreihe BP und der Strecke AC. Dann erhält man die Unterfälle

d) BFP, e) BPF, f) PBF.

Endlich sei P Punkt einer Punktreihe durch C und es sei G der Punktreihe CP und der Strecke AB gemeinsam. Dann können die Unterfälle auftreten

g) CGP, h) CPG, i) PCG.

Das liefert im ganzen die 27 Fälle 1a), 1b), ..., 3i), die nun zu betrachten sind.

21. Es sei DAB vorausgesetzt. Wir untersuchen nun die hier auftretenden 9 Unterfälle.

Der Fall 1a). Das $\triangle\, APD$[1] wird von der Punktreihe BE in dem Punkte B der Punktreihe AD und in dem Punkt E der

[1] Die zu den 27 Fällen gehörenden Figuren sind nach dem Gesagten ohne weiteres zu zeichnen und im folgenden weggelassen.

Strecke AP, demnach zufolge A 6 auch in einem Punkt X der Strecke DP getroffen. Aus $\triangle$ APD folgt nach Satz 17 die Beziehung BEX. Nach der 4. Erklärung liegen demnach E und X auf derselben Seite von B, und wegen BEC liegt C auf der gleichen Seite. Daher gilt entweder BXC oder BCX. Im ersten Fall ist P auch Punkt des Punktfeldes DBC. Im Falle BCX folgt aus $\triangle$ DXB und der Beziehung DXP nach A 6 ein Punkt Y der Punktreihe PC mit DYB, die Punktreihe YC gehört aber zum Punktfelde DBC.

Der Fall 1 b). Es gilt (1) BEC, (2) DAB, (3) APE. Aus $\triangle$ ACE, (1) und (3) folgt nach A 6 ein Punkt X der Punktreihe BP mit (4) AXC und aus $\triangle DAC$, (2) und (4) ein Punkt Y mit DYC. Demnach liegt P auf BY, ist daher ein Punkt des Feldes DBC.

Der Fall 1 c). Aus $\triangle$ PCE folgt in der Punktreihe BA ein Punkt X mit PXC, dabei gilt Satz 16 zufolge BAX. Aus BAX und BAD folgt nach Satz 8 non XAD, so daß nur die Fälle AXD und ADX übrig bleiben. Gilt AXD, dann liegt P auf CX und daher im Punktfelde DBC, gilt aber ADX, dann folgt aus $\triangle$ XCB ein gemeinsamer Punkt Y der Punktreihe PD und der Strecke BC, so daß auch hier P zum Punktfelde DBC gehört.

Der Fall 1 d). Aus $\triangle$ DAC und BF folgt X in der Strecke DC und P in BX. Ebenso 1 e) und 1 f).

Der Fall 1 g). Der Punkt G liegt in AB, daher auch in BD. Ebenso 1 h) und 1 i).

22. Wir kommen nun zur Annahme 2) ADB.

Der Fall 2a). Aus $\triangle$ ADP und der Punktreihe BE folgt vermöge A 6 und Satz 17 der gemeinsame Punkt X der Strecken DP und BE, so daß P zur Punktreihe DX gehört.

Der Fall 2b). Aus $\triangle$ ACE und Punktreihe BP folgt der Punkt X dieser Punktreihe mit AXC, aus $\triangle$ ACD ergibt sich der Punkt Y der Punktreihe BX in der Strecke DC. Demnach liegt P in der Punktreihe BY.

Der Fall 2c). Aus $\triangle$ AEB und der Punktreihe PD folgt der Punkt X in der Punktreihe PD mit BXE. Vermöge BXE und BEC ergibt sich, Satz 9 zufolge, BXC, und P gehört zur Punktreihe DX.

Der Fall 2d). Das $\triangle\, ACD$ wird von der Punktreihe BF in einem Punkt X mit DXC getroffen, P liegt auf BX. Ebenso 2e) und 2f).

Der Fall 2g). Es gilt (1) ADB, (2) AGP und (3) CGP. Die Punkte G und D gehören zur Strecke AB, also ist entweder (4) $D \equiv G$, oder es gilt nach Satz 11 eine der beiden Beziehungen (5) AGD, (6) ADG. Wenn (4) vorliegt, ist P Punkt von CD. Liegt (5) vor, dann wird $\triangle\, GCB$ von der Punktreihe PD im Punkt X der Strecke BC getroffen. Im Falle (6) liegt G in der Strecke DB. Daher gehört in diesen drei Fällen P zum Punktfelde DBC.

Der Fall 2h). Es treten wieder die drei Unterfälle wie in 2g) auf, nämlich (4), (5), (6). Gilt (4), so ist P Punkt von CD, im Falle (5) wird $\triangle\, CGD$ von der Punktreihe BP im Punkt X der Seite CD getroffen, im Falle (6) ist CG auch für $\triangle\, DBC$ gültig.

Der Fall 2i). Auch hier hat man die gleichen drei Unterfälle (4), (5), (6). Fall (4) ist wieder ohne weiteres klar, im Falle (5) hat $\triangle\, GCB$ mit der Punktreihe DP einen Punkt X der Strecke BC gemeinsam, im Falle (6) liegt P in der Punktreihe CG, die auch für $\triangle\, DBC$ gilt.

23. Es ist noch die Annahme 3) ABD zu erledigen.

Der Fall 3a). Nun gilt ABD, BEC, AEP. Aus $\triangle\, AED$ folgt der Punkt X der Punktreihe PB mit EXD, aus $\triangle\, CED$ der Punkt Y der Punktreihe BX mit CYD, Punkt P liegt in der Punktreihe BY.

Der Fall 3b). Es gilt APE. Aus $\triangle\, AEB$ folgt der Punkt X der Punktreihe PD mit BXE, und nach Satz 9 gilt wegen BXE und BEC auch BXC. Der Punkt P gehört zur Punktreihe DX.

Der Fall 3c). Wegen PAE folgt aus $\triangle\, AED$ der Punkt X der Punktreihe PB mit EXD, aus $\triangle\, CED$ der Punkt Y der Punktreihe BX mit DYC. Der Punkt P ist Punkt der Punktreihe BY.

Der Fall 3d). Aus BFP und $\triangle\, BPD$ ergibt sich der Punkt X der Punktreihe AF mit der Beziehung PXD, und nach Satz 17 gilt AFX. Wegen AFX und AFC ergibt sich aus Satz 8 die Lage non XFC, daher kann nur (1) FXC oder (2) FCX gelten. Im Fall (1) folgt aus $\triangle\, ACB$, daß die Punktreihe XD die Strecke BC in einem Punkt Y trifft, und P liegt in der Punktreihe DY.

Im Falle (2) ergibt sich aus $\triangle\ BFX$ ein Punkt Y der Punktreihe PC, für den BYX gilt, und aus $\triangle\ BXD$ ein Punkt Z der Punktreihe PY mit der Beziehung BZD; in der Punktreihe CZ liegt P.

Der Fall 3e). Zufolge BPF wird $\triangle\ AFB$ von der Punktreihe PD in einem Punkt X mit der Beziehung AXF getroffen, aus der wegen AFC vermöge des Satzes 9 die Beziehung AXC folgt. Aus $\triangle\ ABC$ und der Punktreihe DX ergibt sich ein Punkt Y dieser Punktreihe mit BYC. Auf DY liegt P.

Der Fall 3f). Es gilt PBF. Aus $\triangle\ FCP$ folgt ein Punkt X der Punktreihe AB, für den CXP gilt. Aus dem gleichen Dreiecke folgt wegen AFC nach Satz 17 auch ABX, so daß wegen ABD entweder (1) BXD oder (2) BDX richtig ist. Im ersten Falle liegt P auf CX. Im zweiten Falle wird $\triangle\ CBX$ von der Punktreihe PD in einem Punkt Y der Seite BC getroffen.

Der Fall 3g). Wegen AGB und ABD gilt, Satz 7 zufolge, GBD. Das $\triangle\ CGD$ wird daher von der Punktreihe PB in einem Punkt X getroffen, für den CXD gilt. P liegt in der Punktreihe BX.

Der Fall 3h). Wie im vorigen Falle gilt GBD. Das $\triangle\ GBC$ wird von der Punktreihe DP in einem Punkt X getroffen, für den BXC gilt. P gehört zur Punktreihe DX.

Der Fall 3i). Es gilt wieder GBD. Aus $\triangle\ GCD$ folgt ein Punkt X der Punktreihe PB, für den CXD gilt. P ist Punkt der Punktreihe BX.

24. Es sind nach dem 2. Absatze von Nr. 20 noch die Punkte der Punktreihe CA in den Fällen 2) und 3) zu betrachten.

Im Falle 2) sind drei Möglichkeiten α) ACP, β) APC, γ) PAC zu unterscheiden.

Fall α). Das $\triangle\ ABC$ hat mit der Punktreihe DP einen Punkt X gemeinsam, für den BXC gilt. P liegt auf DX.

Fall β). Das $\triangle\ ADC$ hat mit der Punktreihe BP einen Punkt X gemeinsam, für den CXD gilt. P liegt auf BX.

Fall γ) wie Fall α).

Wir kommen zum Falle 3) und unterscheiden wieder die drei Möglichkeiten α)–γ).

Fall α). Wörtlich wie oben Fall β).

Fall β). Wörtlich wie oben Fall α).

Fall γ). Wörtlich wie oben Fall β).

25. Aus den Nrn. 20–24 folgt, daß ein Punktfeld ABC identisch ist mit dem Punktfelde BCD, wobei D irgendein von A und B verschiedener Punkt der Punktreihe AB ist. Hat man nun irgendein $\triangle\ A_1B_1C_1$ des Punktfeldes ABC, dann liegt A_1 in einer Punktreihe, die eine Ecke des $\triangle\ ABC$, z. B. A und einen Punkt $\bar{A}$ der Gegenseite von A enthält. $\triangle\ AB\bar{A}$ oder $\triangle\ AC\bar{A}$ – wenn A_1 zur Punktreihe AB oder AC gehört, nur eines dieser beiden Dreiecke – liefert nun wieder das Punktfeld ABC. Das Punktfeld $AB\bar{A}$ ist aber nach dem soeben abgeleiteten Ergebnisse dasselbe wie das Punktfeld ABA_1. Durch zweimalige Wiederholung dieses Verfahrens erhält man als Punktfeld $A_1B_1C_1$ das Punktfeld ABC. D. h.

Satz 19. In der 6. Erklärung kann man an die Stelle des $\triangle$ ABC irgendein Dreieck des Punktfeldes, dessen Eckpunkte und deren Gegenseiten setzen.

26. Daraus ergibt sich unmittelbar der

Satz 20. Haben zwei Punktfelder drei nicht zur gleichen Punktreihe gehörende Punkte gemeinsam, dann haben sie alle Punkte gemeinsam.

Eine Fassung der gleichen Tatsache in etwas anderer Form ist der

Satz 21. Ein Punktfeld ist durch irgend drei seiner Punkte, die nicht zur gleichen Punktreihe gehören, eindeutig bestimmt.

Wenn zwei Punkte einer Punktreihe in einem Punktfelde liegen, dann kann man zwei Ecken eines das Punktfeld bestimmenden Dreiecks in diese Punktreihe legen, und es ergibt sich der

Satz 22. Hat eine Punktreihe mit einem Punktfelde zwei Punkte gemeinsam, dann liegen alle Punkte der Punktreihe in dem Punktfelde.

Es sei β ein Punktfeld, a eine Punktreihe in ihm, X einer ihrer Punkte, A ein Punkt von β außerhalb a, Fig. 4. Die Punktreihe

AX gehört nach Satz 22 zu β, es gibt nach A 2 (Nr. 9) in ihr einen Punkt B mit AXB, und dieser kann nach Satz 4 (Nr. 11) nicht zu a gehören. Ebenso liefert ein weiterer Punkt Y von a einen Punkt C von β außerhalb a und es gilt AYC. Die Strecke

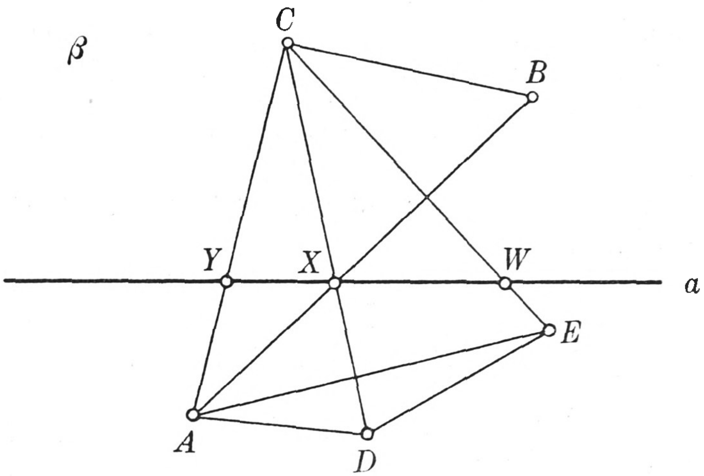

Fig. 4

CB kann nach Satz 18 keinen Punkt von a enthalten. Gilt CXD, dann kann ebenso die Strecke AD keinen Punkt von a enthalten. Ist W ein weiterer Punkt von a und gilt CWE, dann enthalten auch die Strecken AE und DE nach demselben Schlusse keinen Punkt von a. Das ist der Beweis für den

Satz 23. Ist a eine Punktreihe eines Punktfeldes β, dann verteilen sich die nicht auf a liegenden Punkte von β auf zwei Halbfelder derart, daß zwei Punkte dann zum gleichen Halb-feld gehören, wenn zwischen ihnen kein Punkt von a liegt, zu verschiedenen Halb-feldern, wenn zwischen ihnen ein Punkt von a liegt.

7. Erklärung. *Eine Punktreihe zerlegt ein Punktfeld, dem sie angehört, in zwei „Halb-felder". Die Punktreihe gehört zu keinem der beiden Halb-felder.*

27. Es sei ein △ ABC in einem Punktfelde β gegeben und eine Punktreihe a, welche einen Punkt P der Strecke AB enthält und nicht durch C läuft. Nach Satz 23 teilt a das Punktfeld β in zwei Hälften, wobei wegen APB die Punkte A und B auf verschiedenen Seiten von a liegen. Wenn nun C auf der gleichen Seite wie A (wie B) liegt, enthält die Seite BC (AC) des Dreiecks nach Satz 23 einen Punkt von a. *Damit ist D. Hilberts Axiom II 4 bewiesen.*

Ein $\triangle\, ABC$ möge in der Seite BC einen Punkt P, in der Seite AC einen Punkt Q enthalten. *Dann haben die Strecken AP und BQ einen Punkt gemeinsam*, wie man ohne weiteres erkennt, wenn man Axiom A 6 (Nr. 12) auf $\triangle\, ACP$ und die Punktreihe BQ anwendet, ebenso auf $\triangle\, BCQ$ und AP, unter Berücksichtigung von Satz 17.

§ 6.

Die Dimensionsaxiome. Folgerungen.

28. Aus den Hilbertschen Axiomen der Axiomgruppe I werden nun noch die beiden Axiome I 8 und I 7 verwendet, sie bilden die nächste Axiomgruppe. Kraft des ersten dieser beiden Axiome hat der Raum mindestens, kraft des zweiten genau drei Dimensionen.

B. Dimensionsaxiome.

B. 1. Es gibt einen Punkt $\bar{U}$, der nicht zum Punktfeld $\bar{R}\bar{S}\bar{T}$ gehört.

B. 2. Haben zwei Punktfelder einen Punkt gemeinsam, dann haben sie noch einen Punkt gemeinsam.

Aus B 2 folgt nach Satz 20, daß die beiden Punktfelder dann eine ganze Punktreihe gemeinsam haben.

Es seien α ein Punktfeld, X und Y zwei seiner Punkte, A ein Punkt außerhalb α, ferner D und E Punkte mit AXD und AYE. Das Punktfeld ADE trifft α in der Punktreihe XY, die nach Satz 18 wegen des $\triangle\, ADE$ keinen Punkt der Strecke DE enthalten kann, d. h. die Strecke DE enthält keinen Punkt von α. Nimmt man einen Punkt B mit DEB, dann kann aus demselben Grunde die Strecke AB keinen Punkt von α enthalten, und wenn man einen weiteren Punkt C so annimmt, daß die Strecke AC keinen

Punkt von α enthält, gilt dasselbe wegen II 4 (Nr. 27) auch für BC. Das Punktfeld ACD hat mit α wegen des Punktes X und wegen B 2 eine Punktreihe gemeinsam, die wegen II 4 einen Punkt der Strecke CD enthalten muß. Das ist der Beweis für

Satz 24. Der Punktraum wird durch jedes Punktfeld in zwei Halb-räume zerlegt. Die Verbindungsstrecke zweier außerhalb des Punktfeldes liegender Punkte hat keinen oder einen Punkt mit dem Punktfelde gemeinsam, je nachdem die beiden Punkte im gleichen Halb-raum oder in verschiedenen Halb-räumen liegen.

29. Die hier eingeführten Axiome unterscheiden sich von solchen bei O. Veblen a. a. O.[1] teilweise nur durch die Formulierung oder durch die Reihenfolge: seine Axiome I und VII entsprechen unserem A 1, Axiom V ist unser A 2, Axiom II unser A 3, Axiom III unser A 4, Axiom VI unser A 5, Axiom VIII unser A 6, Axiom IX unser B 1, Axiom X entspricht unserem B 2, Axiom XII ist das Euklidische Parallelenaxiom. O. Veblen fährt nun so fort, daß er, lediglich seine 12 Axiome voraussetzend, den Euklidischen Raum in den reellen, projektiven Raum einbettet und dann durch Spezialisierung unter Auszeichnung uneigentlicher Elemente daraus in bekannter Weise die Tatsachen der Euklidischen Kongruenz gewinnt und damit D. Hilberts Axiome der Gruppe III als Sätze.

Daraus folgt natürlich nicht, daß D. Hilberts Axiome der Gruppe III aus den genannten 12 Axiomen beweisbar sind: so wird z. B. in § 11 der „Grundlagen" gezeigt, daß Axiom III 5 nicht aus allen übrigen Axiomen folgt, daher erst recht nicht aus den Axiomen der Gruppen I, II, IV, V. Bei O. Veblen wird ein Axiomensystem in den projektiven Raum eingebettet, doch muß die Erweiterung nicht gerade in dieser Weise erfolgen. Wenn

[1] Bei O. Veblen, a. a. O. S. 345, sind bei der Numerierung der Definitionen Def. 3 und Def. 4 übersprungen, in Def. 6 tritt das Wort „collinear" ohne vorhergehende Erklärung auf. Die Definition der Ebene entspricht der unseres Punktfeldes insofern, als auch ein Dreieck benützt wird, jedoch wird dort jeder Punkt einer Dreiecksseite mit jedem Punkt einer anderen Dreiecksseite durch eine Punktreihe verbunden, so daß jeder Punkt des Punktfeldes unendlich oft auftritt, während bei uns die Punkte außerhalb des Dreiecks nur je einmal auftreten, die Punkte im Innern des Dreiecks je dreimal. Die bei uns in § 3 gebrachten Beweise stimmen vielfach mit solchen bei O. Veblen überein.

man z. B. die Axiome der absoluten Geometrie in der bekannten Weise innerhalb einer Einheitskugel deutet, dann kann man aus dieser Deutung auf das Nichteuklidische Parallelenaxiom schließen, obwohl es nicht aus den übrigen Axiomen beweisbar ist, während man aus einer Einbettung in den Euklidischen Raum entsprechend auf das Euklidische Parallelenaxiom schließen würde.

Daher ist nur gezeigt, daß O. Veblens Axiome mit der Euklidischen Geometrie verträglich sind, nicht etwa, daß sie für diese genügend sind.

Anders liegt die Sache, wenn das Axiomensystem nicht, wie das O. Veblens, polymorph, sondern monomorph ist. Hier kann man auch aus einer speziellen Deutung Schlüsse ziehen.[1]

30. Bisher wurden bei uns 8 Axiome eingeführt, während nach der Zählung von Nr. 3 D. Hilberts beide erste Axiomgruppen 14 Axiome enthalten. Ordnet man, wie in der projektiven Geometrie, der Punktreihe eine „Gerade" als Träger zu, dem Punktfeld eine „Ebene", dann kann man das hier gebrachte Axiomensystem mit dem D. Hilberts vergleichen. Es sind jetzt alle Hilbertschen Axiome der Axiomgruppen I und II durch die hier eingeführten Erklärungen und Axiome beweisbar:

Axiom I 1 folgt aus der 2. Erklärung (Nr. 10) und aus Satz 2 (Nr. 11); Axiom I 2 ergibt sich aus A 5 (Nr. 9) und Satz 5 (Nr. 11); Axiom I 3a folgt aus Satz 1 (Nr. 10); Axiom I 3b folgt aus A 1 (Nr. 9); die Axiome I 4a und I 4b ergeben sich aus der 6. Erklärung (Nr. 18), während Axiom I 5 mit Satz 18 (Nr. 25) und Axiom I 6 mit Satz 20 (Nr. 25) übereinstimmt. Die Axiome I 7 und I 8 sind mit den Axiomen B 2 und B 1 gleichwertig. Nachdem in der 2. Erklärung (Nr. 10) die Punktreihe eingeführt ist, sind die Axiome II 1, II 2, II 3 der Reihe nach übereinstimmend mit A 3 (Nr. 9), A 2 (Nr. 9), A 4 (Nr. 9), während II 4 ganz eng mit A 6 zusammenhängt (Nr. 27).

Damit sind, nach der Zählung von Nr. 3, von Hilberts Axiomen der ersten Axiomgruppe 6 Axiome eingespart, nämlich I 1, I 3a, I 4a, I 4b, I 5, I 6, während die übrigen 8 Axiome dieser und der

[1] Vgl. „A. G. I", Nr. 12.

zweiten Axiomgruppe mit geringen Abänderungen unsere Axiome der beiden ersten Gruppen liefern, nämlich I 3b, II 2, II 1, II 3, I 2, II 4, I 8, I 7 der Reihe nach die Axiome A 1, A 2, A 3, A 4, A 5, A 6, B 1, B 2.

§ 7.

Die Kongruenzaxiome.

31. Bei den weiteren Axiomen D. Hilberts werden keine Einsparungen gemacht, von der Beschränkung auf Einzelfälle abgesehen, von der schon in Nr. 2 die Rede war.

Als nächste Axiomgruppe wird jetzt D. Hilberts Axiomgruppe III eingeführt, wobei D. Hilberts Axiom III 4 zerspalten wird. Die Fassung der Axiome wird etwas abgeändert.[1]

8. Erklärung. *Strecken können in einer Beziehung stehen, die durch das Wort „kongruent" bezeichnet wird.*

C. Kongruenzaxiome.

C 1. Ist eine Strecke AB gegeben, ferner ein Punkt A', dann kann man in jeder Punktreihe, zu der A' gehört, mindestens zwei Punkte B', B'_1 derart angeben,[2] daß $B'A'B'_1$ gilt und daß die Strecke AB den Strecken $A'B'$ und $A'B'_1$ kongruent ist, in Zeichen $AB \equiv A'B'$, $AB \equiv A'B'_1$.

Daß statt des in diesem Axiom geforderten „mindestens" das Wort „genau" gilt, folgt im Anschluß an Axiom C 6, Nr. 33.

Da AB und BA nach der 3. Erklärung (Nr. 12) dieselbe Strecke bezeichnen, gelten zufolge Axiom C 1 auch die Beziehungen $BA \equiv A'B'$, $AB \equiv B'A'$, $BA \equiv B'A'$ und die sich daraus ergebenden, wenn man B' durch B'_1 ersetzt.

C 2. Aus $A'B' \equiv AB$ und $A''B'' \equiv AB$ folgt $A'B' \equiv A''B''$.

Aus $AB \equiv A'B'$, $AB \equiv A'B'$ folgt hiernach $AB \equiv AB$, d. h. jede Strecke ist sich selbst kongruent. Wegen $AB \equiv AB$ und

---

[1] Vgl. dazu auch „A. G. IV", S. 154.

[2] Ob A' in der Punktreihe AB liegt oder nicht, ob die Punktreihe $A'B'$ dieselbe ist wie die Punktreihe AB oder nicht, ist dabei gleichgültig.

$A'B' \equiv AB$ ist nach C 2 auch $AB \equiv A'B'$, d. h. die Streckenkongruenz ist symmetrisch, und hieraus folgt die Transitivität, denn ist (1) $AB \equiv A'B'$ und (2) $A'B' \equiv A''B''$, so folgt aus (2) wegen der Symmetrie (3) $A''B'' \equiv A'B'$ und aus (1) und (3) vermöge C 2 die Kongruenz $AB \equiv A''B''$.[1] Daher kann man sagen: zwei Strecken sind „untereinander kongruent".

C 3. Ist B Punkt einer Strecke AC und B' Punkt einer Strecke $A'C'$, *ist überdies* $AB \equiv A'B'$ *sowie* $BC \equiv B'C'$, *dann ist* $AC \equiv A'C'$.

C 1, C 2, C 3 sind gleichbedeutend mit D. Hilberts Axiomen III 1, III 2, III 3. Die Formulierung von C 1 setzt nicht, wie die von III 1, die Teilung einer Punktreihe durch einen ihrer Punkte voraus, die wesentlich von A 6 abhängt.

32. Die nächsten beiden Axiome handeln von der Kongruenz der Winkel; sie sind bei D. Hilbert im Axiom III 4 vereinigt.

9. Erklärung. *Das System zweier von einem Punkt O ausgehenden Halb-punktreihen h, k, die nicht zu derselben Punktreihe gehören, nennt man, ohne Rücksicht auf ihre Reihenfolge, „Winkel" und bezeichnet es mit „$\sphericalangle (h, k)$" oder „$\sphericalangle (k, h)$". h und k heißen die „Schenkel" des Winkels, O heißt dessen „Scheitel". Ist A ein Punkt von h und B ein Punkt von k,*[2] *dann bezeichnet man den Winkel auch mit „$\sphericalangle AOB$" oder „$\sphericalangle BOA$".*

Sind $\bar{h}$ *und* $\bar{k}$ *die Punktreihen, deren Halb-punktreihen h und k sind, dann bildet die Gesamtheit der Punkte des Punktfeldes AOB, welche zugleich demselben von* $\bar{h}$ *begrenzten Halb-felde wie die Punkte von k und demselben von* $\bar{k}$ *begrenzten Halb-felde wie die Punkte von h angehören, das „Innere" des Winkels. Die übrigen von O verschiedenen und nicht zu h oder k gehörenden Punkte des Punktfeldes bilden das „Äußere" des Winkels.*

Aus dieser Erklärung folgt, daß es nur *hohle* Winkel gibt, keine gestreckten oder erhabenen. Zwischen zwei Punkten des Winkelinnern kann kein Punkt eines Winkelschenkels liegen.

---

[1] Symmetrie und Transitivität sind entsprechend bewiesen wie in D. Hilberts „Grundlagen", S. 12.

[2] *A* und *B* sind nach der 4. Erklärung (Nr. 17) von *O* verschieden.

10. Erklärung. *Winkel können in einer Beziehung stehen, die durch das Wort „kongruent" bezeichnet wird.*

C 4. Es sei $\sphericalangle (h, k)$ *gegeben sowie in einem Punktfeld eines der beiden Halb-felder* α', *in die eine gegebene Punktreihe* a' *des Feldes dieses zerlegt;* h' *sei eine Halb-punktreihe von* a'. *Dann gibt es genau eine Halb-punktreihe* k' *so, daß* $\sphericalangle (h, k)$ *dem* $\sphericalangle (h', k')$ *kongruent ist und zugleich ein Punkt von* k' *zu* α' *gehört, in Zeichen* $\sphericalangle (h, k) \equiv \sphericalangle (h', k')$.[1]

C 5. $\sphericalangle (h, k) \equiv \sphericalangle (h, k)$.[2]

Man beweist nun leicht unter Verwendung der vor der 10. Erklärung erwähnten Tatsache, daß jeder Punkt des Winkelinnern von $\sphericalangle (h', k')$ zu α' gehört.

33. Das letzte Kongruenzaxiom entspricht dem Axiom III 5 D. Hilberts:

C 6. Es seien $\triangle ABC$ *und* $\triangle A'B'C'$ *mit den Kongruenzen* $AB \equiv A'B'$, $AC \equiv A'C'$, $\sphericalangle BAC \equiv \sphericalangle B'A'C'$ *gegeben, dann ist auch* $\sphericalangle ABC \equiv \sphericalangle A'B'C'$.

Hieraus folgt nach „Grundlagen", S. 15, daß statt des im Axiome C 1 geforderten „mindestens" das Wort „genau" gilt. Über weitere Folgerungen, zu denen auch gehört, daß man aus $\sphericalangle (h, k) \equiv \sphericalangle (h', k')$ auf $\sphericalangle (h', k') \equiv \sphericalangle (h, k)$ schließen kann, siehe „Grundlagen", § 6.

11. Erklärung. *Zwei Punktreihen desselben Punktfeldes, welche keinen Punkt gemeinsam haben, heißen zueinander „parallel".*

Daß es parallele Punktreihen gibt, folgt aus dem Satze, den man aus den bisherigen Axiomen in bekannter Weise ableitet:[3]

---

[1] Die Fassung des letzten Satzes ist etwas enger als in den „Grundlagen", S. 14.

[2] Hier ist III 4 in die zwei Axiome C 4 und C 5 zerlegt. Im Anschluß an Nr. 3 müßte man eigentlich C 4 in zwei Axiome zerlegen, die im übrigen gleich lauten, nur müßte es statt „genau eine" bei dem ersten der Axiome „mindestens eine" und bei dem zweiten „höchstens eine" heißen. Diese Zerlegung wurde hier unterlassen, weil in dem hier eingeführten Axiomensystem sonst nirgends eine solche auftritt und weil sie sprachlich recht umfangreich wäre.

[3] Z. B. in „N. G.", Nr. 24.

Satz 25. In einem Punktfelde gibt es zu jeder Punktreihe durch jeden ihr nicht angehörenden Punkt mindestens eine parallele Punktreihe.[1]

§ 8.

Die Axiome des Messens.

34. Nach Nr. 2 genügt es, hier das Archimedische Axiom[2] nur für eine einzige Strecke und ihre Teilstrecken auszusprechen.

D. Axiome des Messens.

D 1. Es gibt eine Strecke AB einer Punktreihe a von folgender Art:[3] *A_1 sei ein beliebiger Punkt in der Strecke; in a gibt es dann n–1 Punkte $A_2, A_3, \ldots, A_n$, so daß die Strecken AA_1, $A_1A_2, \ldots, A_{n-1}A_n$ einander kongruent sind und B zwischen A_{n-1} und A_n liegt.*

Nach „A.G. III", Nrn. 5 und 6, kann man nun zeigen, daß sich jeder Winkel zu jedem seiner Teilwinkel Archimedisch verhält und jede Strecke zu ihren Teilstrecken. Die letzte Tatsache ist die von D. Hilbert in V 1 geforderte.

35. Während das Archimedische Axiom für jede Strecke nach Annahme einer Einheitsstrecke eine Zahl als Streckenlänge gewährleistet, sorgt in bekannter Weise das nun folgende Cantorsche Axiom dafür, daß auch alle reellen Zahlen als Streckenlängen auftreten. Auch dieses Axiom kann man nach Nr. 2 nur für eine einzige Strecke aussprechen und kann dafür eine Form wählen, die nur Anordnungstatsachen voraussetzt, nämlich

---

[1] Daß es nur eine gibt, folgt aus den bisherigen Axiomen bekanntlich noch nicht.

[2] Wir behalten diese vielfach eingeführte, auch von D. Hilbert gebrauchte Bezeichnung bei, trotzdem „Axiom des Eudoxus" richtiger wäre; vgl. z. B. F. Enriques, „Prinzipien der Geometrie", Enz. d. math. Wiss. III 1. 1 (1907) S. 34, Anm. 64. Doch findet man auch die Bezeichnung „Axiom des Eudoxus", z. B. in dem Enzyklopädieartikel von M. Zacharias „Elementargeometrie und elementare nicht-euklidische Geometrie in synthetischer Behandlung", III 1. 2 (1913) S. 1170.

[3] Man könnte z. B. als Strecke AB die Strecke $\overline{RS}$ von A 1 nehmen, ebenso im folgenden Axiom D 2 als Strecke A_1B_1.

D 2. Es gibt eine Strecke A_1B_1 folgender Art: $A_\nu B_\nu$, $\nu = 2, 3, \ldots$ sei eine Folge von Strecken derart, daß die Endpunkte der ν-ten Strecke in der $\nu-1$-ten liegen und daß es keine Strecke gibt, deren Endpunkte in allen Strecken $A_\nu B_\nu$ liegen;[1] *dann gibt es einen Punkt, der in allen Strecken $A_\nu B_\nu$ liegt.*

Der Beweis dafür, daß die Form des Cantorschen Axioms als reines Anordnungsaxiom mit der üblichen metrischen äquivalent ist, findet sich in „A.G. III", S. 11.[2] Daß es genügt, auch hier nur für *eine* Strecke, A_1B_1, das Axiom zu fordern, ergibt sich ohne weiteres: man braucht nur, um es für eine beliebige Strecke PQ anwenden zu können, an A_1, und zwar nicht in der Punktreihe A_1B_1, eine Strecke $A_1C \equiv PQ$ abzutragen und von einem Punkte der Punktreihe B_1C aus, der von B_1 und C verschieden ist, die Streckenfolge in A_1C in eine solche in AB_1 zu projizieren.

Daß die Aussage des Cantorschen Axioms nicht nur für Streckenfolgen, sondern auch für Folgen von ineinanderliegenden Winkeln mit gemeinsamem Scheitel gilt, erkennt man ohne weiteres, wenn man die Winkelfolge mit einer Punktreihe schneidet.

Die bisher eingeführten Axiome der Gruppen A–D bilden ein Axiomensystem der absoluten Geometrie. Aus ihnen ergeben sich D. Hilberts Axiom der linearen Vollständigkeit und der Vollständigkeitssatz als Sätze der absoluten Geometrie.[3]

§ 9.

Das Euklidische Parallelenaxiom.

36. Den Schluß unseres Axiomensystems der Euklidischen Geometrie bildet

E. Das Euklidische Parallelenaxiom.

Es gibt ein Punktfeld α, in diesem eine Punktreihe a und einen ihr nicht angehörenden Punkt A derart, daß in α höchstens eine Punktreihe, welche A enthält, zu a parallel ist.

---

[1] Die Folge ist demnach unendlich.

[2] In der vorletzten Zeile ist dort besser statt „Archimedischen Geometrie" zu setzen „Geometrie, welche die Axiome der Gruppen I–III und das Archimedische Axiom erfüllt".

[3] Vgl. „A. G. I", Nr. 8 und Nr. 16.

Aus Satz 25, Nr. 33, folgt, daß es genau eine Parallele gibt. Daß die Aussage des Parallelenaxioms für jede Punktreihe und jeden Punkt außerhalb der Punktreihe gilt, läßt sich jetzt beweisen,[1] und zwar ohne Verwendung des Cantorschen Axioms D 2.

Die Axiome der absoluten Geometrie kann man, da aus ihnen die Existenz von Parallelen folgt, bekanntlich nur entweder im Euklidischen Parallelenaxiom fortsetzen und erhält damit die Euklidische Geometrie, oder im Nichteuklidischen Parallelenaxiom, in dem im Wortlaut von E „höchstens eine" durch „mindestens zwei" ersetzt ist. Damit hat man ein Axiomensystem der hyperbolischen Geometrie.

Wegen der Untersuchung der Unabhängigkeit der hier eingeführten Axiome voneinander vergleiche man für die Axiome der Gruppe A die in Nr. 8, Anm. 1 genannte Abhandlung von O. Veblen, für die Axiome der übrigen Gruppen D. Hilberts „Grundlagen", zweites Kapitel.

§ 10.

Schlußbemerkungen.

37. Man erhält aus dem vorliegenden Axiomensystem ein solches der Euklidischen Geometrie *im Raume von 4 Dimensionen*, wenn man B 2 wegläßt, entsprechend der 6. Erklärung mittels eines Tetraeders, seiner Kanten und Flächen[2] einen „dreidimensionalen Punktraum" R^3 erklärt, anschließend ein Axiom einführt „Es gibt einen Punkt $\overline{V}$, der nicht zum dreidimensionalen Punktraum $RS\overline{T}\overline{U}$ gehört" und das Axiom anschließt, daß ein ebenes Feld und ein R^3, die einen Punkt gemeinsam haben, noch einen Punkt gemeinsam haben. Die übrigen Axiome bleiben ungeändert.

38. Entsprechend kann man noch zu höheren Euklidischen Räumen gelangen. *Die Euklidische Geometrie im Raume von*

[1] „N. G.", Nr. 37.

[2] Kanten und Flächen sind Seiten und Flächen von Dreiecken, also nicht unendlich ausgedehnt. Das Entsprechende gilt später auch für die höheren Polytope.

abzählbar unendlich vielen Dimensionen erhält man durch folgendes Axiomensystem:

Die Axiome der Gruppen A, C, D, E bleiben wieder ungeändert. Man nennt die Punktreihe „eindimensional", das Punktfeld „zweidimensional". Einen „dreidimensionalen" Punktraum R^3 erhält man dadurch, daß man zwischen 4 Punkten, die nicht zum gleichen zweidimensionalen Raum gehören, die 6 möglichen Strecken und 4 Dreiecke betrachtet, damit hat man die Ecken, Seiten und Flächen eines Tetraeders; die Punkte der Punktreihen, welche eine Ecke und einen Punkt der Gegenfläche des Tetraeders enthalten, bilden einen R^3. Einen „vierdimensionalen" Punktraum R^4 erhält man, indem man 5 Punkte, die nicht zum gleichen R^3 gehören, durch 10 Strecken, 10 Dreiecke, 5 Tetraeder verbindet, als die Gesamtheit der Punkte der Punktreihen, die irgendeinen der 5 Punkte und einen Punkt der Begrenzung oder im Innern des Gegentetraeders enthalten usw. Und nun führt man als einziges Axiom der Gruppe B ein: *„Ist R^n irgendein Punktraum, dann gibt es mindestens einen Punkt, der ihm nicht angehört."*[1]

Führt man mit D. Hilbert im gewöhnlichen Raume Punkte, Gerade, Ebenen als drei Systeme von Dingen ein, dann fordert das Aufsteigen um eine Dimension die Einführung eines neuen Systems von Dingen, so daß man hier unendlich viele Systeme von Dingen einführen müßte.

Ersetzt man das Euklidische Parallelenaxiom durch das Nichteuklidische,[2] während man alle übrigen Axiome unverändert läßt, dann erhält man hier ebenso wie für die Euklidische Geometrie auch *ein Axiomensystem der hyperbolischen Geometrie im Raume von abzählbar unendlich vielen Dimensionen.*

39. Das in den vorhergehenden Paragraphen behandelte Axiomensystem schließt insofern enger an Euklid an als das D. Hilberts, als die Anordnungsaxiome, die bei Euklid als Anschauungstatsachen stillschweigend angenommen werden, also bei

---

[1] Für die komplexe und die reelle projektive Geometrie ist die Sache ähnlich behandelt in „A. k. p. G.", Nr. 46.

[2] Man kann es ebenso eng fassen wie Axiom E, vgl. „N.G.", Nr. 55.

seinen Postulaten und Axiomen vorausgesetzt werden, an erster Stelle, vor den übrigen Axiomen, stehen. Es ist sicher, daß die Inzidenz der Punkte einer Geraden mit der Geraden für Euklid selbstverständlich, d. h. die Gerade als Träger ihrer Punkte gedacht ist, während D. Hilberts Axiomensystem nach Nr. 8 darauf keine Rücksicht nimmt; insofern schließt man mit den Punktreihen enger an Euklid an, wenn auch ohne weiteres zuzugeben ist, daß die Gerade oder Ebene Euklids eine selbständige Bedeutung hat, nicht nur die Gesamtheit ihrer Punkte ist. Das Entscheidende aber ist hier die Möglichkeit, Axiome einzusparen. Daß die große Leistung D. Hilberts dadurch nicht verkleinert werden soll, ist selbstverständlich.

München, im November 1937.