BAYERISCHE AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN
MATHEMATISCH-NATURWISSENSCHAFTLICHE KLASSE

SITZUNGSBERICHTE

JAHRGANG

1978

MÜNCHEN 1979

VERLAG DER BAYERISCHEN AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN
In Kommission bei der C. H. Beck'schen Verlagsbuchhandlung München

Katastrophentheorie auf Verbänden (2. Mitteilung).

Von G. Aumann in München

In einer Katastrophenstruktur (s. [1]), d. h. einem Tripel (V, k, h), worin V einen vollständigen Verband und k bzw. h einen Kern- bzw. Hüllenoperator auf V bezeichnen, heißt ein Element $x \in V$ $\varkappa$-stabil (bzgl. (k, h)), wenn $x \leq k(h(x))$. Das *Problem der Stabilisierung* stellt sich folgendermaßen: Gegeben sind V und h und eine Teilmenge $W \subset V$; gesucht wird ein „*Stabilisator*" *von* W, d. h. ein Kernoperator k, so daß *alle Elemente von* W *$\varkappa$-stabil* sind *bzgl.* (k, h). Das Problem besitzt Lösungen; z. B. ist der größte Kernoperator, nämlich id (die Identität), ein Stabilisator, da ja $x \leq h(x)$ sogar für alle $x \in V$ gilt. Desgleichen erkennt man sofort, daß mit jedem Stabilisator k auch jeder größere Kernoperator k' ein Stabilisator von W ist. Für die *Gesamtheit* $\mathfrak{S}(W)$ *aller Stabilisatoren von* W geben wir 3 Kennzeichnungen und eine einfache Konstruktion. Es zeigt sich, daß im allgemeinen kein kleinster Stabilisator von W existiert, es aber minimale Stabilisatoren geben kann, und daß zwei Stabilisatoren nicht immer vergleichbar sein müssen.

1. Zunächst sei auf einige Eigenschaften der Kernoperatoren auf V hingewiesen.

1.1. Die Fixelementmenge $\mathfrak{F}_k$ eines Kernoperators k auf V ist ein S-System in V, d. h. eine Teilmenge von V, welche gegenüber V-sup-Bildung geschlossen ist. Der umkehrbar eindeutige Zusammenhang von k und $\mathfrak{F}_k$ ist gegeben durch den Satz:

Ist $\mathfrak{F}$ *ein* S-*System in* V *und* k *ein Kernoperator auf* V, *so gilt* $\mathfrak{F}_k = \mathfrak{F}$ *genau dann, wenn für alle* $x \in V$

$$k(x) = V\text{-sup}\,\{y : y \in \mathfrak{F} \wedge y \leq x\}.$$

1.2. Das System $\mathfrak{K}$ aller Kernoperatoren auf V ist ein vollständiger Verband, wobei die Ordnung auf $\mathfrak{K}$ erklärt ist durch

$$k_1 \leq k_2 :\Leftrightarrow \bigwedge_{x \in V} k_1(x) \leq k_2(x) \Leftrightarrow \mathfrak{F}_{k_1} \subset \mathfrak{F}_{k_2}.$$

[1] München Ak. Sb. 1978

Hinsichtlich $\mathfrak{K}$-inf und $\mathfrak{K}$-sup gilt: Wenn $\mathfrak{K}' \subset \mathfrak{K}$, so ist
$\mathfrak{K}\text{-inf } \mathfrak{K}' = k \;\Longleftrightarrow\; \mathfrak{F}_k = \bigcap \{\mathfrak{F}_{k'} : k' \in \mathfrak{K}'\}$ und
$\mathfrak{K}\text{-sup } \mathfrak{K}' = \mathfrak{K}\text{-inf } \{k'' : k'' \in \mathfrak{K} \wedge \bigwedge_{k' \in \mathfrak{K}'} k'' \geq k'\}$,
wozu noch zu bemerken ist, daß für u_+ bzw. u^+, mit
$u_+(x) := V\text{-inf } \{k'(x) : k' \in \mathfrak{K}'\}$ bzw. $u^+(x) := V\text{-sup } \{k'(x) : k' \in \mathfrak{K}'\}$ für $x \in V$, gilt:
$\mathfrak{K}\text{-inf } \mathfrak{K}' \leq u_+$ bzw. $\mathfrak{K}\text{-sup } \mathfrak{K}' = u^+$.

Im ersteren Fall kann tatsächlich das Ungleichheitszeichen eintreten. Hierzu ein *Beispiel:*

Im Verband $([0; 1], \leq)$ seien die Kernoperatoren k_1 bzw. k_2 durch $\mathfrak{F}_{k_1} := \{0, 1/3\}$ bzw. $\mathfrak{F}_{k_2} := \{0, 1/2\}$ erklärt. Hier ist $\mathfrak{K}\text{-inf } \{k_1, k_2\} = 0$ und $V\text{-inf } \{k_1, k_2\} = u_+$ mit $u_+(x) = 0$ bzw. $= 1/3$ für $0 \leq x < 1/2$ bzw. $1/2 \leq x \leq 1$. Es ist u_+ kein Kernoperator. Dagegen ist $\mathfrak{K}\text{-sup } \{k_1, k_2\} = V\text{-sup } \{k_1, k_2\} = u^+$ mit $u^+(x) = 0$ bzw. $1/3$ bzw. $1/2$ für $0 \leq x < 1/3$ bzw. $1/3 \leq x < 1/2$ bzw. $1/2 \leq x \leq 1$, und u^+ ist ein Kernoperator.

2.1. *Erste Kennzeichnung und Konstruktion von Stabilisatoren.*

2.1.1. *Kennzeichnung der $\varkappa$-Stabilität:*

x ist $\varkappa$-stabil genau dann, wenn das Verbandsintervall $[x; h(x)]$ ein Fixelement von k enthält.

In der Tat, wenn x $\varkappa$-stabil, so ist $x \leq k(h(x)) \leq h(x)$ mit $k(h(x)) \in \mathfrak{F}_k$; umgekehrt, wenn $y \in [x; h(x)] \cap \mathfrak{F}_k$, so folgt $x \leq y = k(y) \leq k(h(x))$.

Somit ergibt sich der

Satz 1. $k \in \mathfrak{S}(W) \;\Longleftrightarrow\; \bigwedge_{x \in W} [x; h(x)] \cap \mathfrak{F}_k \neq \emptyset$.

2.1.2. Hieran knüpft sich folgende *Konstruktion von* $\mathfrak{S}(W)$:

1. Jedem $x \in W$ ordne man zu ein Element $y_x \in [x; h(x)]$ und bilde die Menge $Y := \{y_x : x \in W\}$; wir nennen Y *eine zu W gehörige Fixelementeauswahl.* – 2. Man erweitert Y zu einem S-System; z. B. man wähle irgend ein $Z \subset V$ und bilde das kleinste, $Y \cup Z$ enthaltende S-System: $\boldsymbol{S}(Y \cup Z) := \{V\text{-sup } Q : Q \subset Y \cup Z\}$. – 3. Es bezeichne $\boldsymbol{k}(Y \cup Z)$ denjenigen Kernoperator mit $\mathfrak{F}_{\boldsymbol{k}}(Y \cup Z) = \boldsymbol{S}(Y \cup Z)$. – Dann gilt:

Es ist $\boldsymbol{k}(Y \cup Z) \in \mathfrak{S}(W)$ *und jeder Stabilisator von* W *läßt sich als ein* $\boldsymbol{k}(Y \cup Z)$ *darstellen.*

2.2. *Zweite und dritte Kennzeichnung von* $\mathfrak{S}(W)$.

Nach dem Satz von der Standardabbildung $\boldsymbol{K}$ (siehe [1]) ist jedem $k \in \mathfrak{K}$ in eindeutiger Weise zugeordnet der Kernoperator $k^+ := \boldsymbol{K}(k, h)$, so daß die Menge der bzgl. (k, h) $\varkappa$-stabilen Elemente identisch ist mit $\mathfrak{F}_{k^+}$. Damit erhalten wir

Satz 2. $k \in \mathfrak{S}(W) \asymp W \subset \mathfrak{F}_{\boldsymbol{K}(k,h)} \asymp \boldsymbol{K}(k, h) \geq \boldsymbol{k}(W)$.

Wegen $\boldsymbol{S}(\mathfrak{F}_k) = \mathfrak{F}_k$ für jedes $k \in \mathfrak{K}$ ist nämlich $W \subset \mathfrak{F}_{k^+}$ gleichbedeutend mit $\mathfrak{F}_{\boldsymbol{k}(W)} = \boldsymbol{S}(W) \subset \mathfrak{F}_{k^+}$, also mit $k^+ \geq \boldsymbol{k}(W)$.

3. Zur Beurteilung der Frage nach einem kleinsten Stabilisator von W dient der Satz

Satz 3. Zu $W \subset V$ gibt es einen intensiven, isotonen Operator $u(W): V \to V$, so daß $\mathfrak{S}(W) = \{k : k \in \mathfrak{K} \wedge k \geq u(W)\}$, nämlich

$$u(W)(x) := V\text{-inf}\,\{k(x) : k \in \mathfrak{S}(W)\}, x \in V.$$

Beweis. Nach Definition ist $u := u(W)$ intensiv und isoton, und $u \geq k$ für alle $k \in \mathfrak{S}(W)$. Weiter gilt für alle $x \in W$ und $k \in \mathfrak{S}(W)$

$$x \leq k(h(x)), \text{ also auch } x \leq u(h(x)).$$

Wenn also $k \in \mathfrak{K}$ und $k \geq u$, so folgt $x \leq u(h(x)) \leq k(h(x))$ für alle $x \in W$, d. h. $k \in \mathfrak{S}(W)$.

Bermerkungen. 1. Es gilt die Darstellung

$$u(W)(x) = V\text{-inf}\,\{\boldsymbol{k}(Y)(x) : Y \text{ eine zu } W \text{ passende Fixelementeauswahl}\}.$$

In der Tat, nach 2.1. ist jedes $\boldsymbol{k}(Y)$ ein Stabilisator von W und andererseits gibt es zu jedem $k \in \mathfrak{S}(W)$ ein $\boldsymbol{k}(Y) \leq k$.

2. Im allgemeinen ist $u(W)$ kein Kernoperator, also kein Stabilisator von W. Wenn aber $u(W)$ Kernoperator ist, so ist es der kleinste Stabilisator.

3.1. Wenn W hinreichend groß ist, so ist $u(W)$ der kleinste Stabilisator und kann einfach berechnet werden. Hierzu der

Satz 4. Wenn $\boldsymbol{S}(W) \supset \mathfrak{F}_h$, so ist jeder Stabilisator von W sogar „totaler Stabilisator", d. h. Stabilisator von V, und $u(W) = u(V) = \boldsymbol{k}(\mathfrak{F}_h)$, und $u(W)$ ist der kleinste Stabilisator von W.

Beweis. 1. Es sei $k \in \mathfrak{S}(W)$, also $\bigwedge_{x \in \boldsymbol{S}(W)} x \leq k(h(x))$, insbesondere also für $x := h(y) \in \mathfrak{F}_h \subset \boldsymbol{S}(W)$ sodann $h(y) \leq k(h[h(y)]) = k(h(y))$, woraus $h(y) = k(h(y))$ für alle $y \in V$ folgt. Somit ist $\mathfrak{F}_h \subset \mathfrak{F}_k$. Dies impliziert aber $x \leq h(x) = k(h(x))$ für alle $x \in V$; daher folgt $k \in \mathfrak{S}(V)$, und somit $\mathfrak{S}(W) = \mathfrak{S}(V)$. – 2. Das kleinste Element von $\mathfrak{S}(W)$ ist also das kleinste von $\mathfrak{S}(V)$, und dieses letztere existiert und ist (nach [1], 4.) gleich $q(h) = \boldsymbol{k}(\mathfrak{F}_h)$.

4. Abschließend sei noch ein einfaches *Beispiel* behandelt:

Es sei $(V, \leq) := ([0; 1], \leq)$, h sei durch $\mathfrak{F}_h := \{\frac{1}{2}, 1\}$ und $W := [0; 1/3]$. Für jedes $x \in W$ ist $h(x) = 1/2$, nach Satz 1 daher $k \in \mathfrak{S}(W)$ genau dann, wenn jedes Intervall $[x; 1/2]$, $x \in W$, ein Fixelement von k enthält, oder, was dasselbe ist, wenn $[1/3; 1/2]$ ein Element von $\mathfrak{F}_k$ enthält. Z. B. sind k_1 bzw. k_2 mit $\mathfrak{F}_{k_1} := \{0, 1/3\}$ bzw. $\mathfrak{F}_{k_2} := \{0, 1/2\}$ Stabilisatoren von W, und sie sind beide *minimal*; denn jeder kleinere Kernoperator ist $k_0 = 0$ (d. h. $\mathfrak{F}_{k_0} = \{0\}$), was offensichtlich kein Stabilisator von W ist. Sie sind *nicht vergleichbar*, d. h. es gilt weder $k_1 \leq k_2$ noch $k_2 \leq k_1$. Der Operator $u(W)$ von Satz 3 ist hier gegeben durch V-inf $\{k_1, k_2\}$, also durch

$$u(W)(x) = 0 \text{ bzw. } 1/3 \text{ für } 0 \leq x < 1/2 \text{ bzw. } 1/2 \leq x \leq 1,$$

ist also kein Kernoperator, d. h. es gibt hier keinen keinsten Stabilisator.

Literatur

[1] G. Aumann, Katastrophentheorie auf Verbänden, Sitz. Ber. Bayer. Akad. Wiss. Math. Nat. Kl. 1977, 1–11.