BAYERISCHE AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN

MATHEMATISCH-NATURWISSENSCHAFTLICHE KLASSE

SITZUNGSBERICHTE

JAHRGANG

1977

MÜNCHEN 1978

VERLAG DER BAYERISCHEN AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN

In Kommission bei der C. H. Beck'schen Verlagsbuchhandlung München

Katastrophentheorie auf Verbänden.

Von G. Aumann in München

Die von mir kürzlich in [1] betrachtete Katastrophentheorie in topologischen Räumen X (= „topologisches Modell", kurz T-Modell) wird hier zum „verbandstheoretischen Modell" (= V-Modell) verallgemeinert. Diese Verallgemeinerung und die damit verbundene Unterscheidung erweist sich als sinnvoll und fruchtbar. Einerseits hat sich nämlich gezeigt, daß im T-Modell das Katastrophisch- bzw. Nicht-katastrophischsein eines Elementes $x \in X$ identisch ist mit der gewöhnlichen Unstetigkeit bzw. Stetigkeit an der Stelle x von einer gewissen Abbildung von X in einen topologischen Raum A, der sogenannten „Strukturabbildung". Katastrophentheorie im T-Modell ist damit nichts anderes als eine spezielle Anwendung der Topologie. Im übrigen deckt bereits das T-Modell alle in der Praxis vorkommenden Fälle von Katastrophenstrukturen. Andererseits eröffnet das Studium des V-Modells ein völlig neues Kapitel der Verbandstheorie; auch hier steht eine „Standardabbildung" als beherrschendes Instrument im Vordergrund; sie wird hier formal etwas anders definiert als in [1], wodurch es möglich wird, das V-Modell zur Selbstdualität zu ergänzen. Nebenbei wird hier das in [1] der Herleitung des T-Modells dienende „dynamische System" axiomatisch erfaßt, was eine ausführliche Diskussion verschiedener Realisationen erleichtert. Auf die Verbindung mit dem G. Thomschen Katastrophenbegriff wird hingewiesen; die in der Thomschen Theorie schon weitgehend geglückte Klassifizierung oder Typisierung seiner Modelle ist in dem hier doch sehr allgemeinen verbandstheoretischen Rahmen ein noch völlig offenes Problem.

1. Die verbandstheoretische Formulierung.

Die Einfachheit des V-Modells erlaubt es, die beiden maßgeblichen Definitionen an den Anfang zu stellen:

Unter einer *Katastrophenstruktur* (*$\varkappa$-Struktur*) verstehen wir jedes Tripel (V, k, h) worin $(V, \leqslant)$ einen vollständigen Verband,

k bzw. h einen Kern- bzw. Hüllenoperator auf V bezeichnen; ein Element y von V heißt *κ-stabil* (oder auch *nicht-katastrophisch*) (bezüglich k und h), wenn

$$(1) \qquad y \leqslant k(h(y)).$$

Auf Folgerungen aus diesen Definitionen gehen wir weiter unten ein. Zunächst soll der Sinn und die Zweckmäßigkeit dieser Definitionen an einem allgemeinen Modell erläutert werden.

2. Ein allgemeines dynamisches Modell.

Es bezeichne $X = \{x, \ldots\}$ eine Menge, deren Elemente x wir „Zustände" nennen wollen, und die im Laufe der Zeit gewissen Übergängen unterworfen sind.

a) Kenntnis vom Mechanismus dieser Übergänge wird nicht vorausgesetzt; jedoch sei bekannt, welche Übergänge von einem Zustand x in einen Zustand x' im Zeitintervall $(0; \tau) = \{t : 0 < t < \tau\}$ als möglich zu gelten haben, d. h. es sei eine Abbildung $E : X \times \boldsymbol{R}^+ \to \mathfrak{P}X$ gegeben ($\boldsymbol{R}^+$ ist die Menge der positiven reellen Zahlen, $\mathfrak{P}X$ die Potenzmenge von X), so daß $x' \in E(x, \tau)$ die mathematische Aussage dafür ist, daß im Zeitintervall $(0; \tau)$ ein Übergang von x nach x' zu erwarten (oder zu befürchten) ist. Wir nennen E die *Erwartungsfunktion* des Systems; sinngemäß ist von E zu verlangen, daß $E(x, t)$ bei festem x mit wachsendem t nicht abnimmt (vgl. die Eigenschaft (E_3) unten).

b) Zur Beurteilung des Überganges von x nach x' im Sinne einer „Zumutbarkeit" (oder „Erträglichkeit") diene eine vorgegebene Abbildung $Z : X \to \mathfrak{P}X$, so daß also $x' \in Z(x)$ besagt, daß der Übergang von x nach x' *zumutbar* ist. Z heißt die *Zumutbarkeitsfunktion* des Systems.

c) Im „dynamischen System" (X, E, Z) nennen wir einen Zustand x *κ-stabil*, wenn

$$(2) \qquad \curlyvee_{t>0}\, E(x, t) \subset Z(x),$$

d. h. *wenn das in allernächster Zukunft zu Erwartende zumutbar ist.*

2.1. Um von (2) aus zu (1) zu gelangen, müssen wir von E und Z einige Eigenschaften verlangen, welche wohl als natürlich zu bezeichnen sind.

a′) Von E verlangen wir über die schon erwähnte Monotonieeigenschaft hinaus (für alle $x, x', x'' \in X$ und $t, t' \in \boldsymbol{R}^+$):

(E_1) $x \in E(x,t)$ (Ruhe ist eine „mögliche Veränderung“);

(E_2) Wenn $x' \in E(x,t)$ und $x'' \in E(x' t')$, dann $x'' \in E(x, t+t')$ (Transitivität);

(E_3) $E(x,t) = \bigcup_{t' \in (0;t)} E(x,t')$ (Stetigkeit, Monotonie).

b′) Von Z verlangen wir:

(Z_1) $x \in Z(x)$ (Ruhe ist zumutbar);

(Z_2) $Z(x) \ni x' \wedge Z(x') \ni x'' \succ Z(x) \ni x''$ (Wenn der Übergang von x nach x' und der von x' nach x'' zumutbar, so auch der von x nach x'').

Folgerungen. 1. E mit (E_1), (E_2) und (E_3) macht X zu einem topologischen Raum, wobei jedes $E(x,t)$ mit $t > 0$ eine offene, x enthaltende Menge ist.

2. Zu Z mit (Z_1) und (Z_2) existiert mindestens ein Hüllenoperator $h \mid \mathfrak{P}X$, so daß $\bigwedge_{x \in X} h(\{x\}) = Z(x)$. (Die Beweise seien dem Leser überlassen).

2.2. Mit den Folgerungen 1. und 2. von 2.1 und der Bezeichnung k für die *Bildung des offenen Kernes* bzgl. der in X durch E erzeugten Topologie kann man für (2) auch schreiben:

(2′) $$\{x\} \subset k(h(\{x\})).$$

Indem wir diese Aussage nicht nur für die einelementigen Mengen $\{x\}$ sondern für beliebige Teilmengen Y von X betrachten, gelangen wir zur Definition der $\varkappa$-stabilen Teilmengen Y im System (X, Z, E):

(2″) $Y(\subset X)$ heißt *$\varkappa$-stabil* (*bezgl. k, h*), wenn $Y \subset k(h(Y))$.

Setzen wir $(V, \leqslant) = (\mathfrak{P}X, \subset)$, so stimmen die Definitionen (1) und (2″) überein; $(\mathfrak{P}X, k, h)$ mit den oben erklärten Kern- bzw. Hüllenoperatoren k bzw. h ist eine $\varkappa$-Struktur (mit (2″) als Definition der $\varkappa$-Stabilität). Wir nennen jedes Tripel $(\mathfrak{P}X, k, h)$ eine *topologische $\varkappa$-Struktur*, wenn X irgend einen topologischen Raum, $k|\mathfrak{P}X$ den zugehörigen Operator zur Bildung des offenen Kerns und $h|\mathfrak{P}X$ irgend einen Hüllenoperator bezeichnen.

Bemerkungen. (a) Das hier mittels E erklärte „dynamische System" ist im Vergleich zu dem in [1] beschriebenen einer allgemeineren Interpretation zugänglich, indem nämlich auch psychologische Effekte einbezogen sein können. In $E(x,t)$ können auch Zustände x' enthalten sein, deren Eintreten innerhalb des Zeitintervalls $(0; t)$ „befürchtet" wird, aber vom Mechanismus des Systems her gesehen – soferne ein solcher überhaupt vorliegt – gar nicht möglich ist. – (b) Einen topologischen Raum X mit einer Basis $\{E(x,t) : x \in X \wedge t \in \boldsymbol{R}^+\}$, wobei E eine Erwartungsfunktion mit (E_1)–(E_3) bezeichnet, nennen wir einen *Emmissionsraum* ($E(x,t)$ heißt dann die „Emmission" von x im Zeitintervall $(0; t)$). Jeder metrische Raum X ist ein Emmissionsraum; man setze, wenn r die Abstandsfunktion bezeichnet,

$$E(x,t) := \{y : y \in X \wedge r(y,x) < t\}.$$

Nicht jeder Emmissionsraum ist metrisch. Beispiel: $X := \boldsymbol{R}$ mit $E(x,t) := \{y : y \in \boldsymbol{R} \wedge 0 \leqslant y - x < t\}$ ist nicht metrisch.

2.3. Auch im Falle, daß X ein allgemeiner topologischer Raum ist, d. h. durch ein beliebiges (d, S)-System $\mathfrak{G}$ von offenen Mengen G beschrieben ist, läßt sich eine *verallgemeinerte Erwartungsfunktion* $E : X \times T \to \mathfrak{P}X$ erklären, so daß $\varkappa$-Stabilität eines Elementes x wieder in der (2) entsprechenden Form

$$(2^*) \qquad \curlyvee_{t \in T} E(x,t) \subset Z(x)$$

erklärt werden kann.

Hierzu seien einige Definitionen und ein Satz bewiesen.

Ist X eine Menge und $(T, \leqslant)$ ein „nach unten gerichteter Raster" (d. h. T ist nicht leer und mittels $\leqslant$ teilweise geordnet, wobei

$$\curlywedge_{t,t' \in T} \curlyvee_{t'' \in T} t'' \leqslant t \wedge t'' \leqslant t'),$$

so heißt (X, T) ein *quasi-uniformer Raum*, wenn eine Abbildung

$$E : X \times T \to \mathfrak{P}X$$

erklärt ist, so daß gilt:

(U_1) $\quad \bigwedge_{x \in X} x \in E(x, t);$

(U_2) $\quad \bigwedge_{x \in X;\, t, t' \in T} t \leqslant t' \succ E(x, t) \subset E(x, t');$

(U_2) $\quad \bigwedge_{x, x' \in X;\, t \in T} x' \in E(x, t) \succ \bigvee_{t' \in T} E(x', t') \subset E(x, t).$

Beispiel: Jeder Emmissionsraum (X, E) ist quasi-uniform mit demselben E). In der Tat, (U_2) folgt aus (E_3), und wenn $x' \in E(x, t)$ so ist auch $x' \in E(x, t')$ mit einem $t' < t$. Alsdann ist nach (E_2) aber $E(x', t - t') \subset E(x, t)$.

Nun gilt der

Satz. *Jeder quasi-uniforme Raum ist topologisch, und umgekehrt.*

Beweis. 1. Es sei (X, E) quasi-uniform, d. h. E erfülle (U_1)–(U_3). Wir definieren: $G (\subset X)$ heißt u-*offen*, wenn $\bigwedge_{x \in G} \bigvee_{E(x,t)} E(x, t) \subset G$. Die u-offenen Mengen bilden ein (d, S)-System $\mathfrak{G}'$ in $\mathfrak{P}X$, definieren also einen topologischen Raum, und zwar sind die $E(x, t)$ u-offen und bilden eine Basis dieses Raumes. In der Tat, sind G_1 und G_2 u-offen und $x \in G_1 \cap G_2$, so gibt es $E(x, t_i)$ mit $x \in E(x, t_i) \subset G_i$, $i = 1, 2$, so daß mit einem $t_3 \leqslant t_1, t_2$ (Rastereigenschaft!) wegen (U_2) $E(x, t_3) \subset E(x, t_1) \cap E(x, t_2)$, also $E(x, t_3) \subset G_1 \cap G_2$, d. h. dieser Durchschnitt ist u-offen. Ferner, wenn für ein beliebiges System $(G_v)_v$ von u-offenen Mengen G_v der Punkt x in $\bigcup_v G_v$ enthalten ist, so gilt $x \in G_{v'}$, also $E(x, t') \subset G_{v'}$ und damit $E(x, t') \subset \bigcup_v G_v$, d. h. auch $\bigcup_v G_v$ ist u-offen. Schließlich bilden wegen (U_1) und (U_3) die $E(x, t)$ eine Basis offener Mengen.

2. Es sei $(X, \mathfrak{G})$ topologisch und $\mathfrak{u}(x)$ das System der offenen, x enthaltenden Mengen. Es bezeichne T das System aller Abbildungen $t \mid X$ mit $\bigwedge_{x \in X} t(x) \in \mathfrak{u}(x)$. Wir ordnen t gemäß

$$t \leqslant t' : \bowtie \bigwedge_{x \subset T} t(x) \subset t'(x).$$

Damit ist T ein nach unten gerichteter Raster; denn wenn $t_1, t_2 \in T$, so gilt für jedes $x \in X$

$$x \in t_1(x) \cap t_2(x),$$

also gibt es ein $G(x) \in u(x)$ mit $G(x) \subset t_1(x) \cap t_2(x)$. Setzen wir $t_3(x) := G(x)$, so ist $t_3 \leqslant t_1 \wedge t_3 \leqslant t_2$. Definieren wir nun

$$E(x, t) := t(x),$$

so sind (U_1) – (U_3) erfüllt. Dies ist für die beiden ersten Bedingungen evident. Zum Nachweis von (U_3) sei $x' \in E(x, t)$, also

$x' \in t(x) \in \mathfrak{u}(x)$. Da $t(x)$ offen, so gibt es ein $G \in \mathfrak{u}(x')$ mit $G \subset t(x)$. Wir definieren die Abbildung t' gemäß

$$t'(x) := G \text{ für } x = x' \text{ und } t'(x) = t(x) \text{ sonst.}$$

Alsdann ist $E(x', t') \subset E(x, t)$ also auch (U_3) erfüllt. Damit haben wir X zu einem quasi-uniformen Raum gemacht mit dem System $\mathfrak{G}'$ der u-offenen Mengen (vgl. 1.). Wir zeigen, daß $\mathfrak{G} = \mathfrak{G}'$. In der Tat, wenn $G' \in \mathfrak{G}'$ und $x \in G'$, so gibt es ein $E(x, t) \subset G'$. Da aber $E(x, t) \in \mathfrak{u}(x)$, so ist $G' \in \mathfrak{G}$. Umgekehrt, wenn $x \in G \in \mathfrak{G}$, so gibt es ein t mit $t(x) = G$, so daß $E(x, t) \subset G$, d. h. $G \in \mathfrak{G}'$.

Wir können also auch bei einer beliebigen topologischen $\varkappa$-Struktur $(\mathfrak{P}X, k, h)$ den topologischen Raum X als von einer verallgemeinerten Erwartungsfunktion E (mit (U_1), (U_2), (U_3)) erzeugt betrachten und die $\varkappa$-Stabilität eines Punktes gemäß (2*) $(Z(x) = h(\{x\}))$ definieren.

2.4. In vielen praktischen Fällen einer topologischen $\varkappa$-Struktur ist der „Zumutbarkeitshüllenoperator" h aus einer vorgegebenen Äquivalenzrelation $\sim$ in X abgeleitet:

$$h_{\sim}(Y) := \{x : x \in X \wedge \bigvee_{y \in Y} y \sim x\};$$

offensichtlich ist $h_{\sim}(\{x\})$ die x enthaltende Äquivalenzklasse. In diesem Falle erweist sich die $\varkappa$-Stabilität von y gleichwertig mit der *Stetigkeit der „kanonischen" Abbildung*

$$\bar{h} : X \to A$$

in y, wobei $\bar{h}(x) := h_{\sim}(\{x\})$ und $A := \{h_{\sim}(\{x\}) : x \in X\}$, die Menge der Äquivalenzklassen bezeichnet, auf der die *diskrete Topologie* zu verwenden ist. Hier kann $\varkappa$-Stabilität kurz so umschrieben werden: Ein Zustand x ist nicht-katastrophisch, wenn keine unmittelbare Gefahr besteht, daß die Veränderung von x aus der Äquivalenzklasse herausführt.

2.5. Als Beispiel eines nicht von einer Äquivalenzrelation in X herrührenden Hüllenoperators $h|\mathfrak{P}X$ sei ein Beispiel aus der Wirtschaftstheorie genannt: Die Zustände x eines Wirtschaftssystems X seien durch Zahlenpaare (e, i) gekennzeichnet, wobei e das mittlere Einkommen ($\geqslant 0$) und i den Inflationsfaktor (> 0) bezeichnet, so daß e/i das „wahre" Einkommen ist. Ein Übergang von (e, i) nach (e', i') heiße „zumutbar", wenn

$e'/i' - e/i \geqslant 0$ ist („Wahrung des Besitzstandes"). Hier ist also $h(\{(e,i)\}) := \{(e',i') : e'/i' \geqslant e/i\}$ und keine Erweiterung von h auf $\mathfrak{P}X$ ist von einer Äquivalenzrelation in X ableitbar.

2.6. Bemerkenswerterweise gilt auch im Falle eines allgemeinen Hüllenoperators h eine analoge Stetigkeitsaussage (vgl. 2.4.): Die $\varkappa$-Stabilität von y ist gleichwertig mit der Stetigkeit der Abbildung $\bar{h} : X \to A$ (mit $A := \{h(\{x\}) : x \in A\}$ und $\bar{h}(x) := h(\{x\}))$ an der Stelle y. $\bar{h}$ heißt jetzt die „Strukturabbildung" und ist im allgemeinen nicht die kanonische. Für die zu diesem Zweck in A einzuführende Topologie heißt $G\ (\subset A)$ offen, wenn mit jedem $h(\{x\}) \in G$ auch $h(\{x'\})$ in G für alle $x' \in h(\{x\})$ (siehe [3]).

Dieser letzte Hinweis lehrt, daß bei jeder topologischen $\varkappa$-Struktur $(\mathfrak{P}X, k, h)$ – wobei es sich im wesentlichen nur um die $\varkappa$-Stabilität von Elementen (und nicht von Teilmengen) handelt – alles auf den gewöhnlichen Stetigkeitsbegriff reduziert ist. Dies erst gibt der verbandstheoretischen Formulierung in 1. den Charakter einer neuartigen Theorie, was die folgenden Betrachtungen auch zeigen.

3. *Folgerungen aus der verbandstheoretischen Formulierung in* 1.

3.1. Wir schicken eine allgemeine Konstruktion von Kern- und Hüllenoperatoren in beliebigen vollständigen Verbänden voraus.

Lemma. Es sei V ein vollständiger Verband und $i : V \to V$ eine isotone Abbildung. Dann ist

$$V_i := \{y : y \in V \wedge y \leqslant i(y)\} \text{ bzw.}$$
$$V^i := \{z : z \in V \wedge z \geqslant i(z)\}$$

sup- bzw. inf-vollständig in V. Daher ist V_i bzw. V^i Fixelementmenge eines Kernoperators i^k bzw. eines Hüllenoperators i^h in V. Ferner gilt: Ist i bereits ein Kern- bzw. Hüllenoperator, so gilt $i^k = i$ bzw, $i^h = i$.

Der Beweis, der das Extensionalitätsprinzip von E. H. Moore (1910) benutzt, sei dem Leser überlassen.

Die Konstruktion liefert offensichtlich alle möglichen Kern- und Hüllenoperatoren auf V, ausgehend von den isotonen Abbildungen $i: V \to V$, die selbst wiederum nach einem ähnlich einfachen Verfahren aus beliebigen Abbildungen $f: V \to$ konstriuerbar sind. Nun erhalten wir den

Satz von der Standardabbildung. *Voraussetzung.* Es sei V ein vollständiger Verband, ferner sei $\mathfrak{K}$ bzw. $\mathfrak{H}$ der vollständige Verband aller Kern- bzw. Hüllenoperatoren auf V. – *Behauptung.* 1. Es gibt eine Abbildung $\boldsymbol{K}: \mathfrak{K} \times \mathfrak{H} \to \mathfrak{K}$ mit der Eigenschaft, daß die $\varkappa$-stabilen Elemente der $\varkappa$-Struktur (V, k, h) übereinstimmen mit den Fixelementen des durch

$$k' := \boldsymbol{K}(k, h)$$

erklärten Kernoperators k', so daß also

$$y \leqslant k\,(h(y)) \Leftrightarrow y = k'(y).$$

Es gilt: $\qquad \boldsymbol{K}(k, h) = (k \circ h)^k.$

2. Die Abbildung $\boldsymbol{K}$ ist surjektiv und in jedem Argument isoton.

3. Für jedes feste $h \in \mathfrak{H}$ ist die Abbildung $\boldsymbol{K}(.\,, h): \mathfrak{K} \to \mathfrak{K}$ ein Hüllenoperator auf $\boldsymbol{K}$; insbesondere gilt also

$k' \geqslant k$ und $\boldsymbol{K}(k', h) = k'$ für $k' = \boldsymbol{K}(k, h)$ und alle $(k, h) \in \mathfrak{K} \times \mathfrak{H}$.

Beweis. *Zu* 1. $k \circ h$ ist isoton, daher nach Lemma die Menge S aller bzgl. (k, h) $\varkappa$-stabilen Elemente V-sup-vollständig, also S gleich der Fixelementmenge $\mathfrak{F}_{k'}$ von $k' = (k \circ h)^k$. Da diese Zuordnung einer V-sup-vollständigen Teilmenge von V zu einem Kernoperator bijektiv ist, ist $\boldsymbol{K}$ einzig. – 2. Bezeichnet j die identische Abbildung von V, so gilt $\boldsymbol{K}(k, j) = k$ für alle $k \in \mathfrak{K}$. Ferner folgt, wenn $k_1 \leqslant k_2$, aus $y \leqslant k_1\,(h(y))$ unmittelbar $y \leqslant k_2\,(h(y))$, also $\mathfrak{F}_{k_1'} \subset \mathfrak{F}_{k_2'}$, und damit $k_1' \leqslant k_2'$. Ähnlich für das zweite Argument von $\boldsymbol{K}$. – 3. Wenn $y = k(y)$ so $y = k(y) \leqslant k\,(h(y))$ (da k isoton und h extensiv ist), also $y = k'(y)$. Schließlich, wenn $y \leqslant k'\,(h(y)) =: z$, so weil $z \in \mathfrak{F}_{k'}$, $z \leqslant k\,(h(z))$, also $y \leqslant z \leqslant k\,(h\,(k'\,(h(y)))) \leqslant k\,(h\,(h(y))) = k\,(h(y))$.

$\boldsymbol{K}$ heißt die *Standardabbildung* der Katastrophentheorie. Hauptaufgabe der hier entwickelten Katastrophentheorie auf Verbänden ist das Studium der Standardabbildung $\boldsymbol{K}$, insbesondere das inverse Problem, d. h. das Studium der Lösungen der Gleichung

$$k' = \boldsymbol{K}(k, h) \tag{3}$$

bei gegebenem $k' \in \mathfrak{K}$.

Im folgenden wird diese Frage für einen einfachen Spezialfall erledigt, nämlich den, daß $k' = j$, die identische Abbildung von V ist.

4. *Totale Stabilität.* In der $\varkappa$-Struktur (V, k, h) herrscht totale Stabilität, wenn jedes Element $\varkappa$-stabil ist, d. h. wenn

$$\bigwedge\nolimits_{x \in V} x \leqslant k\big(h(x)\big). \tag{t}$$

Die Aufgabe, zu gegebenem $h \in \mathfrak{H}$ alle $k \in \mathfrak{K}$ zu finden, welche (t) erfüllen, löst sich in folgender Weise:

Wenn (t) gilt, so folgt für $x := h(y)$ mit $y \in V$ die Ungleichung $h(y) \leqslant k\big(h(y)\big)$, also $h(y) = k\big(h(y)\big)$, d. h. $\mathfrak{F}_h \subset \mathfrak{F}_k$. Diese Inklusion ist aber auch hinreichend für (t) (denn für jedes $x \in V$ folgt aus ihr $x \leqslant h(x) = k\big(h(x)\big)$). Das Problem ist also ein V-sup-vollständiges $\mathfrak{F}_k \subset \mathfrak{F}_h$ zu finden. Das kleinste solche $\mathfrak{F}_k$ ergibt sich unmittelbar als

$$\{V\text{-sup } G : G \subset \mathfrak{F}_h\} =: \mathfrak{F}_q$$

wo q einen Kernoperator bezeichnet, der durch h eindeutig bestimmt ist: $q =: q(h)$.

Es gilt: *q ist die kleinste Lösung $k = q$* von

$$j = \boldsymbol{K}(k, h), \tag{t'}$$

was mit (t) äquivalent ist. Mit der Isotonie von $\boldsymbol{K}$ folgt, daß durch

$$q(h) \leqslant k \leqslant j \qquad \text{mit } k \in \mathfrak{K} \tag{t''}$$

alle Lösungen k von (t) gegeben sind.

5. *Dualität.* Der duale Charakter von (V, k, h) verlangt nach einem dualen Gegenstück zur Standardabbildung $\boldsymbol{K}$.

Satz. Es sei (V, k, h) eine $\varkappa$-Struktur. Dann ist die Menge T aller $t \in V$ mit $t \geqslant h\big(k(t)\big)$ V-inf-vollständig und es gibt einen Hüllenoperator h', der eindeutig durch k und h bestimmt ist,

$$h' = \boldsymbol{H}(k, h) \quad \big(= (h \circ k)^h\big),$$

so daß $t \in T \asymp t = h'(t)$. Die Abbildung

$$\boldsymbol{H}: \mathfrak{K} \times \mathfrak{H} \to \mathfrak{H}$$

ist surjektiv und in jedem Argument isoton; für festes $k \in \mathfrak{K}$ ist die Abbildung $\boldsymbol{H}(k, .): \mathfrak{H} \to \mathfrak{H}$ ein Kernoperator auf $\mathfrak{H}$, also gilt insbesondere $h' \leqslant h$ und $\boldsymbol{H}(k, h') = h'$ für $h' = \boldsymbol{H}(k, h)$.

Verbindet man diesen Satz mit dem obigen Satz von der Standardabbildung, so ergibt sich der allgemeine

Struktursatz. Ist (V, k, h) eine $\varkappa$-Struktur, so ist die Abbildung

$$(\boldsymbol{K}, \boldsymbol{H}): \mathfrak{K} \times \mathfrak{H} \to \mathfrak{K} \times \mathfrak{H}$$

(i) (ex-in-)tensiv (oder „ambitensiv") d. h. $\boldsymbol{K}(., h) \geqslant j_{\mathfrak{K}}$ und $\boldsymbol{H}(k, .) \leqslant j_{\mathfrak{H}}$ für alle $h \in \mathfrak{H}$ und $k \in \mathfrak{K}$, (ii) isoton, (iii) idempotent.

Beweis (für (iii)). Wenn $\boldsymbol{K}(k, h) = k'$ und $\boldsymbol{H}(k, h) = h'$, dann ist $k' \leqslant \boldsymbol{K}(k', h') \leqslant \boldsymbol{K}(k', h) = k'$ (weil $\boldsymbol{K}$ im ersten Argument extensiv, im zweiten isoton und im ersten idempotent ist), so daß $\boldsymbol{K}(k', h') = k'$ (dualer Weise für $\boldsymbol{H}$).

Obwohl bisher eine konkrete Deutung des dualen Parts $\boldsymbol{H}$ im dynamischen Modell von 2. fehlt, dürfte für die allgemeine Theorie der $\varkappa$-Strukturen das Studium des selbstdualen Paares $(\boldsymbol{K}, \boldsymbol{H})$ von größerer Bedeutung sein.

Bemerkung. In der G. Thomschen Theorie der Singularitäten differenzierbarer Mannigfaltigkeiten handelt es sich um topologische $\varkappa$-Strukturen $(\mathfrak{P}X, k, h)$ mit einem aus einer Äquivalenzrelation $\sim$ hervorgehenden Hüllenoperator h, wobei die Relation $\sim$ selbst durch lokale Diffeomorphismen definiert wird [2]. Der dort erreichten Klassifizierung gewisser $\varkappa$-Strukturen steht hier in der allgemeinen Theorie – allgemein topologisch oder verbandstheoretisch – nichts Entsprechendes gegenüber; erst erhebliche Spezialisierungen dürften in dieser Richtung Resultate erwarten lassen.

6. Über die Gesamtheit L der Lösungen k der Gleichung

(5) $$\boldsymbol{K}(k, h) = k'$$

bei festen h und k' gibt Auskunft der folgende

Satz. Besitzt bei festen $h \in \mathfrak{H}$ und $k' \in \mathfrak{K}$ die Gleichung (5) eine Lösung k, so auch eine größte, nämlich k'; ferner existiert ein intensiver, isotoner Operator $u: V \to V$ mit $u \leqslant k'$, so daß die Menge L aller Lösungen k von (5) übereinstimmt mit der Menge aller Kernoperatoren k mit $u \leqslant k \leqslant k'$. Es ist

$$u(p) := V\text{-inf}\, \{k(p) : k \in L\} \text{ für } p \in V.$$

Beweis. Für $k \in L$ gilt $k \leqslant k'$. Da $\boldsymbol{K}(k', h), = k'$, so ist k' größte Lösung. Für $k \in L$ ist kennzeichnend $\bigwedge_{p \in V} p \leqslant k(h(p)) \asymp p = k'(p)$. Für u gilt dann ebenfalls $\bigwedge_{p \in V} p \leqslant u(h(p)) \asymp p = k'(p)$; denn „$\prec$" folgt aus der Größteigenschaft von u, und umgekehrt folgt aus $p \leqslant u(h(p))$, daß $p \leqslant k(h(p))$ für ein (sogar für jedes) $k \in L$, also $p = k'(p)$. Aus der Definition von u und L ergibt sich nun $u \leqslant k \leqslant k'$ für $k \in L$. Wenn umgekehrt $k_1 \in L$ und $u \leqslant k_1 \leqslant k'$, so gilt $\bigwedge_{p \in V} p = k'(p) \succ p \leqslant u(h(p)) \leqslant k_1(h(p))$; andererseits erhalten wir $p \leqslant k_1(h(p)) \succ p \leqslant k'(h(p)) \succ p = k'(p)$, also $\boldsymbol{K}(k_1, h) = k'$.

Bemerkungen. 1. Das V-inf einer Menge von Kernoperatoren ist zwar ein intensiver und isotoner Operator, aber im allgemeinen kein Kernoperator. Beispiele hierfür lassen sich leicht im vollständigen Verband ($[0; 1]$, $\leqslant$) konstruieren. – 2. Der Satz besagt, daß die Konstanzmengen der Abbildung $\boldsymbol{K}(., h): \mathfrak{K} \to \mathfrak{K}$ (bei festem h) Intervalle in $\mathfrak{K}$ sind; *man kann daher* $\boldsymbol{K}(., h)$ *einen „Intervallhüllenoperator" nennen.* Solche Operatoren sind etwas allgemeiner als die sogenannten „id-konvexen" Hüllenoperatoren der allgemeinen Konvexitätstheorie (s. G. Aumann, Konstruktion allgemeiner Konvexitäten, Sitz. Ber. Bayer. Akad. Wiss., Math. Nat. Kl. 1974, 73–81).

Literatur

[1] G. Aumann, Kontaktrelationen (4. Mitteilung), Sitz. Ber. Bayer. Akad. Wiss. Math. Nat. Kl. 1976, 17–12.

[2] Th. Bröcker, Differentiable Germs and Catastrophes, London Math. Soc. Lecture Note Series 17 (1975).

[3] G. Aumann, Bemerkungen zur Katastrophentheorie. J. f. reine u. angew. Math., erscheint 1977.