Sitzungsberichte

der

mathematisch-naturwissenschaftlichen Klasse

der

Bayerischen Akademie der Wissenschaften zu München

Jahrgang 1947

München 1949

Verlag der Bayerischen Akademie der Wissenschaften

In Kommission beim Biederstein Verlag München

Druck der C. H. Beck'schen Buchdruckerei in Nördlingen

Betrachtungen über Flächenabbildungen.

VI. Gerade Abbildungen mit Nebenbedingungen.

Von Frank Löbell in München.

Vorgelegt am 5. Dezember 1947.

Die folgenden Ausführungen bilden eine Ergänzung zu einer früheren Note,[1] in der gezeigt wurde, wie zu einer gegebenen Fläche $\mathfrak{x}(u, v)$ alle Flächen $\mathfrak{y}(u, v)$ bestimmt werden können, die ihr derart entsprechen, daß die Schiefe J des Flächenpaares $\mathfrak{x} \rightarrow \mathfrak{y}$ einer gegebenen Funktion gleich wird; es soll nämlich die Aufgabe, zunächst für den Fall des Verschwindens von J, so gelöst werden, daß außerdem noch gewisse Bedingungen erfüllt werden.

1. Es wird sich zu dem Zweck als wertvoll erweisen, den gegenüber der Gruppe der Parametertransformationen der Fläche $\mathfrak{x}$ invarianten, distributiven Differentialoperator[2]

$$\mathfrak{D} = \frac{1}{\mathfrak{c}\,\mathfrak{x}_u\,\mathfrak{x}_v}\left(\mathfrak{x}_v \frac{\partial}{\partial u} - \mathfrak{x}_u \frac{\partial}{\partial v}\right) \tag{1}$$

– hier bedeute $\mathfrak{c}$ den Einheitsvektor der positiven Normalen von $\mathfrak{x}$ – heranzuziehen.

Der Grund, weshalb seine Verwendung hier naheliegt, ist das Bestehen der Beziehung

$$J = -\mathfrak{D}\,\mathfrak{y}. \tag{2}$$

Im Hinblick auf das folgende sei vor allem aus der großen Menge der flächentheoretischen Anwendungen des Operators eine kleine Auswahl gegeben:

---

[1] Sitz.-Ber. d. Bayer. Ak. d. Wiss., Math.-nat. Kl., 1947, S. 77–80.

[2] Auf ihn wurde schon bei anderen Gelegenheiten aufmerksam gemacht; vgl. Jahresber. d. DMV 39 (1930), 2. Abt. S. 71, auch Sitz.-Ber. d. Bayer. Ak. d. Wiss., Math.-nat. Abt., 1944, S. 132.

Ein ähnlicher Operator wird viel gebraucht von C. E. Weatherburn in seinem Buch Differential Geometry, II, Cambridge 1930.

Daß die Funktionen, auf die der Operator angewandt werden soll, stetige erste Ableitungen besitzen müssen, sei hier ein für alle Mal gesagt.

a) Führt man auf der Fläche $\mathfrak{x}$ ein orthogonales Koordinatennetz p, q ein und bezeichnet die Einheitsvektoren der Tangenten der Koordinatenlinien mit $\mathfrak{t}_1$ und $\mathfrak{t}_2$, so zwar, daß $\mathfrak{t}_1 \times \mathfrak{t}_2 = \mathfrak{c}$ wird, bedeutet ferner $\frac{\partial}{\partial s_i}$ die Ableitung nach der Bogenlänge in der Richtung $\mathfrak{t}_i$, so läßt sich der Operator in der Form schreiben

$$\mathfrak{D} = \mathfrak{t}_2 \frac{\partial}{\partial s_1} - \mathfrak{t}_1 \frac{\partial}{\partial s_2}; \tag{1'}$$

das ergibt sich unmittelbar aus (1), wenn man lokale Koordinaten einführt, für die die partiellen Ableitungen von $\mathfrak{x}$ an der betrachteten Stelle zueinander senkrechte Einheitsvektoren werden.

Ist nun $\mathfrak{t}$ irgendein die Fläche $\mathfrak{x}$ im Punkte (p, q) berührender Einheitsvektor, so kann man mit Hilfe von $\mathfrak{D}$ die Ableitung jeder stetig differenzierbaren Ortsfunktion auf der Fläche $\mathfrak{x}$ nach der Bogenlänge s in der Richtung $\mathfrak{t}$ folgendermaßen ausdrücken: Nach (1') wird, weil $\mathfrak{t}_1 \mathfrak{t}_2 = 0$ ist, $\mathfrak{t}_2 \mathfrak{D} = \frac{\partial}{\partial s_1}$; da aber $\mathfrak{t}_1$ in der Berührebene von $\mathfrak{x}$ im Punkt (p, q) jede beliebige Richtung haben kann und $\mathfrak{t}_2 = \mathfrak{c} \times \mathfrak{t}_1$ ist, so wird allgemein

$$\frac{\partial}{\partial s} = \mathfrak{c}\, \mathfrak{t}\, \mathfrak{D} = \mathfrak{t}^* \mathfrak{D}, \tag{3}$$

wenn $\mathfrak{t}^* = \mathfrak{c} \times \mathfrak{t}$ gesetzt wird.

b) Ist $\mathfrak{t}$ ein Feld von stetig differenzierbaren Einheitsvektoren in $\mathfrak{x}$, so kann man die Feldlinien als eine Schar von Parameterlinien wählen. Nach (1') wird nun $\mathfrak{D}\, \mathfrak{t}_1 = \mathfrak{t}_2 \frac{\partial \mathfrak{t}_1}{\partial s_1} - \mathfrak{t}_1 \frac{\partial \mathfrak{t}_1}{\partial s_2}$. Wegen $\mathfrak{t}_1^2 = 1$ verschwindet das zweite Glied. Das erste aber berechnen wir nach der bekannten kinematischen Grundformel der Flächentheorie

$$\frac{d\mathfrak{q}}{ds} = \mathfrak{d} \times \mathfrak{q}, \tag{4}$$

in der $\mathfrak{d}$ den Darboux-Cesaroschen Krümmungsvektor einer Flächenkurve mit dem Tangentenvektor $\mathfrak{t}$, $\mathfrak{q}$ aber irgend einen mit dem begleitenden Dreibein der Flächenkurve fest verbundenen Vektor bedeutet; $\mathfrak{d}$ kann in seine in die Berührebene fallende Komponente $\mathfrak{g}$ und in seine durch die geodätische Krümmung g der Feldlinien auszudrückende Normalkomponente $g\,\mathfrak{c}$ zerlegt werden:

$$\mathfrak{d} = \mathfrak{g} + g\,\mathfrak{c}. \tag{4'}$$

Hiernach wird

$$\mathfrak{t}_2 \frac{\partial \mathfrak{t}_1}{\partial s_1} = \mathfrak{t}_2\, \mathfrak{d}_1\, \mathfrak{t}_1 = (\mathfrak{g}_1 + g_1\, \mathfrak{c})\, \mathfrak{t}_1\, \mathfrak{t}_2 = g_1\, \mathfrak{c}\, \mathfrak{t}_1\, \mathfrak{t}_2 = g_1,$$

wo der Index 1 die auf die erste Schar der Parameterlinien bezüglichen Größen kennzeichnet. Allgemein gilt somit:[3]

$$\mathfrak{D}\,\mathfrak{t} = g. \tag{5}$$

2. Nach diesen Vorbereitungen stellen wir uns die Aufgabe, eine der gegebenen Fläche $\mathfrak{x}$ „gerade" entsprechende Fläche $\mathfrak{y}$ dadurch zu finden, daß wir an jeden Punkt $\mathfrak{x}(p, q)$ den Vektor $\mathfrak{z}(p, q)$ anfügen, der zum Punkt $\mathfrak{y}(p, q)$ führt:

$$\mathfrak{y} = \mathfrak{x} + \mathfrak{z}. \tag{6a}$$

Es wird dann, da $\mathfrak{D}(\mathfrak{x} + \mathfrak{z}) = \mathfrak{D}\,\mathfrak{x} + \mathfrak{D}\,\mathfrak{z}$ und $\mathfrak{D}\,\mathfrak{x} \equiv 0$ ist, nach (2)

$$J = -\mathfrak{D}\,\mathfrak{z}. \tag{2'}$$

Nun kann man $\mathfrak{z}$ stets eindeutig in eine in die Berührebene fallende Komponente $\mathfrak{v}$ und in eine Normalkomponente $\lambda\,\mathfrak{c}$ zerlegen:

$$\mathfrak{z} = \mathfrak{v} + \lambda\,\mathfrak{c}. \tag{6b}$$

Ganz allgemein gilt aber, wie leicht zu sehen, für eine skalare Ortsfunktion f und eine vektorielle Ortsfunktion $\mathfrak{f}$

$$\mathfrak{D}(f\,\mathfrak{f}) = f\,\mathfrak{D}\,\mathfrak{f} + \mathfrak{f}\,\mathfrak{D}\,f. \tag{7}$$

Da $\mathfrak{D}\,\lambda$ ein $\mathfrak{x}$ an der betrachteten Stelle berührender Vektor ist, wird $\mathfrak{c}\,\mathfrak{D}\,\lambda = 0$; ferner ist $\mathfrak{c}\,\mathfrak{x}_u\,\mathfrak{x}_v \cdot \mathfrak{D}\,\mathfrak{c} = \mathfrak{x}_v\,\mathfrak{c}_u - \mathfrak{x}_u\,\mathfrak{c}_v = 0,$

---

[3] Der bekannte Ausdruck für die geodätische Krümmung $g = \mathfrak{c}\,\mathfrak{t}\,\mathfrak{t}'$ (wo der Strich die Ableitung nach dem Bogen bedeutet), der sich aus der auf $\mathfrak{q} = \mathfrak{t}$ angewandten Formel (4) unter Berücksichtigung von (4') unmittelbar durch skalare Multiplikation mit $\mathfrak{c} \times \mathfrak{t}$ ergibt, ist mit $\mathfrak{D}\,\mathfrak{t}$ nahe verwandt, wie der erste Term in der Zeile unter (4') zeigt, wenn man berücksichtigt, daß $\mathfrak{t}_2 = \mathfrak{c} \times \mathfrak{t}_1$ ist.

weil aus $\mathfrak{x}_u \mathfrak{c} = 0 = \mathfrak{x}_v \mathfrak{c}$ folgt: $\mathfrak{x}_{uv} \mathfrak{c} + \mathfrak{x}_u \mathfrak{c}_v = 0 = \mathfrak{x}_{vu} \mathfrak{c} + \mathfrak{x}_v \mathfrak{c}_u$. Hiernach ergibt sich gemäß (7)

$$\mathfrak{D}(\lambda \mathfrak{c}) = 0, \tag{8}$$

mithin aus (6b) und (2′)

$$J = -\mathfrak{D}\mathfrak{v}. \tag{2''}$$

Um die anfangs gestellte Aufgabe zu lösen, haben wir also die Differentialgleichung

$$\mathfrak{D}\mathfrak{v} = 0 \tag{9}$$

für die unbekannte Vektorfunktion $\mathfrak{v}(p, q)$ in der Fläche $\mathfrak{x}$ aufzulösen. Zu dem Zwecke setzen wir

$$\mathfrak{v} = \psi \mathfrak{t}, \tag{10}$$

wobei $\mathfrak{t}$ die gleiche Bedeutung wie in (5) habe. Dann wird nach (7) und (9)

$$\psi \mathfrak{D} \mathfrak{t} + \mathfrak{t} \mathfrak{D} \psi = 0,$$

also nach (5) und (3)

$$g \psi - \frac{\partial \psi}{\partial s^*} = 0; \tag{9'}$$

hier bezeichnet $\frac{\partial}{\partial s^*}$ die Ableitung nach der Bogenlänge in der Richtung $\mathfrak{c} \times \mathfrak{t} = \mathfrak{t}^*$.

Bemerkenswert ist, daß die Beziehung (9′) ersichtlich biegungsinvariant ist; es folgt daraus der Satz:

Wird von zwei einander „gerade" entsprechenden Flächen $\mathfrak{x}$ und $\mathfrak{y}$ die eine verbogen und läßt man den starr an ihre Berührebene geheftet gedachten Verbindungsvektor $\mathfrak{y} - \mathfrak{x}$ an der Verbiegung teilnehmen, so bleiben die Flächen nach dieser Transformation gerade aufeinander bezogen.

3. Weiterhin unterscheiden wir zwei Möglichkeiten:

Es sei entweder

I) das Feld der Einheitsvektoren $\mathfrak{t}(p, q)$ in der Fläche $\mathfrak{x}$ gegeben, also die skalare Ortsfunktion $\psi(p, q)$ auf $\mathfrak{x}$ gesucht, oder

II) die skalare Längenfunktion $\psi(p, q)$ auf $\mathfrak{x}$ gegeben und die vektorielle Ortsfunktion $\mathfrak{t}(p, q)$ in $\mathfrak{x}$ gesucht.

Ad I): Wenn $\mathfrak{t}(p, q)$ gegeben ist, so ist nach (5) auch $g(p, q)$ als bekannt anzusehen. Danach ist ψ durch Integration längs der orthogonalen Trajektorien des Vektorfeldes $\mathfrak{t}$ zu berechnen, die zunächst zu bestimmen wären. Am besten wird aber ψ auf dem folgenden Wege ermittelt:

Da $\mathfrak{t}$ mit Hilfe des Winkels φ zwischen $\mathfrak{t}_1$ und $\mathfrak{t}$ in der Form

$$\mathfrak{t} = \mathfrak{t}_1 \cos\varphi + \mathfrak{t}_2 \sin\varphi \tag{11}$$

ausgedrückt werden kann, so ist mit $\mathfrak{t}$ auch φ gegeben und umgekehrt. Aus (3) in Verbindung mit (1′) folgt nun

$$\begin{aligned}\frac{\partial\psi}{\partial s^*} &= -(\mathfrak{t}_1 \cos\varphi + \mathfrak{t}_2 \sin\varphi)\left(\mathfrak{t}_2 \frac{\partial\psi}{\partial s_1} - \mathfrak{t}_1 \frac{\partial\psi}{\partial s_2}\right)\\ &= -\sin\varphi \frac{\partial\psi}{\partial s_1} + \cos\varphi \frac{\partial\psi}{\partial s_2},\end{aligned} \tag{12}$$

also aus (9′) für die Funktion

$$\Psi = ln\,\psi, \tag{13}$$

die wir einführen können, wenn wir die triviale Lösung $\psi = 0$ ausschließen,

$$-\sin\varphi \frac{\partial\Psi}{\partial s_1} + \cos\varphi \frac{\partial\Psi}{\partial s_2} = g. \tag{13′}$$

Demnach kann die Funktion Ψ als Integral einer linearen partiellen Differentialgleichung 1.O. so bestimmt werden, daß sie längs einer beliebigen, nicht zu den Vektoren $\mathfrak{t}$ senkrechten Kurve vorgeschriebene Werte annimmt. Die Fläche

$$\mathfrak{y} = \mathfrak{x} + e^{\Psi}\,\mathfrak{t} + \lambda\,\mathfrak{c}, \tag{6c}$$

wo λ eine willkürliche Funktion von p und q sei, entspricht dann der Fläche $\mathfrak{x}$ in der gewünschten Weise gerade.

Sind die Vektoren $\mathfrak{t}$ die berührenden Einheitsvektoren einer Schar geodätischer Linien auf $\mathfrak{x}$, so ergibt sich als eine mögliche Lösung $\Psi = \text{const.}$ Bedenkt man die bekannte Tatsache, daß die Tangenten dieser Geodätischen die Normalen einer Flächenschar sind, so erkennt man den Zusammenhang unseres Ergebnisses mit dem allgemeineren Satz:

Eine Strahlenkongruenz ist dann und nur dann ein Normalensystem, wenn die Abbildung irgendeiner ihrer Leitflächen auf die Kugel mittels der den Strahlen parallelen Radien gerade ist.

In der Tat ist das übliche Kriterium dafür, daß die Kongruenz $\mathfrak{x}(u, v) + w\, \mathfrak{e}(u, v)$, wo $\mathfrak{e}^2 = 1$ ist, Orthogonalflächen besitzt – nämlich $\mathfrak{e}_v\, \mathfrak{x}_u = \mathfrak{e}_u\, \mathfrak{x}_v$ –, gleichbedeutend mit

$$\mathfrak{D}\mathfrak{e} = 0. \tag{14}$$

Übrigens leistet manchmal eine Bedingungsgleichung bessere Dienste, die man mit Hilfe des für die Einheitskugel $\mathfrak{e}$ gebildeten Operators

$$\mathfrak{D}' = \frac{1}{\mathfrak{e}\,\mathfrak{e}_u\,\mathfrak{e}_v} \cdot \left(\mathfrak{e}_v \frac{\partial}{\partial u} - \mathfrak{e}_u \frac{\partial}{\partial v}\right)$$

erhält:

$$\mathfrak{D}'\, \mathfrak{x} = 0; \tag{14'}$$

sie ist deshalb vorzuziehen, weil sie wegen $\mathfrak{D}'\, \mathfrak{e} \equiv 0$ gleichermaßen für jede Leitfläche $\mathfrak{x} + w\,\mathfrak{e}$ der Kongruenz gilt.

Ad II): Nun seien die Längen $\psi(p, q)$ der Vektoren $\mathfrak{v}$ gegeben, dagegen deren Richtungen gesucht. Dann ist das Vektorfeld $\mathfrak{v}$ dadurch bestimmt, daß nach (9′) an jeder Stelle die geodätische Krümmung g der Feldlinien bekannt ist. Im einzelnen kann diese Bestimmung so vorgenommen werden:

Durch die gesuchte Winkelfunktion $\varphi(p, q)$ drückt sich g nach einer Formel der Flächentheorie[4] folgendermaßen aus:

$$g = g_1 \cos\varphi + g_2 \sin\varphi + \frac{d\varphi}{ds}, \tag{15}$$

wo g_1 und g_2 als die geodätischen Krümmungen der Parameterlinien bekannte Ortsfunktionen auf der Fläche sind. Da man gemäß (3) und (1′) wegen $\mathfrak{t}^*\, \mathfrak{t}_1 = -\sin\varphi$ und $\mathfrak{t}^*\, \mathfrak{t}_2 = \cos\varphi$

$$\frac{d\varphi}{ds} = \cos\varphi \frac{\partial\varphi}{\partial s_1} + \sin\varphi \frac{\partial\varphi}{\partial s_2} \tag{12'}$$

setzen kann, so geht aus (9′) bei Berücksichtigung von (13′) folgende partielle Differentialgleichung 1.O. für φ hervor:

[4] Sie wurde von J. Liouville in der II. Note seiner Ausgabe von G. Monges Application de l'analyse à la géométrie, 5^{me} éd. (Paris 1850), p. 575, angegeben.

$$\left(\frac{\partial \varphi}{\partial s_1} + g_1 - \frac{\partial \Psi}{\partial s_2}\right) \cos\varphi + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial s_2} + g_2 + \frac{\partial \Psi}{\partial s_1}\right) \sin\varphi = 0. \tag{16}$$

Die Aufgabe umfaßt als Sonderfall die der Ermittlung der geodätischen Linien auf $\mathfrak{x}$, wenn nämlich etwa $\Psi = \text{const}$ vorgeschrieben wird. In diesem Falle würde aber die Gleichung dieser Linien mehr interessieren als der Wert der Funktion $\varphi\,(p, q)$; d. h. man würde sich mit der Integration des Systems der gewöhnlichen Differentialgleichungen der Charakteristiken von (16) in einem kartesischen p- q- φ-Bildraum begnügen. Um dieses aufzustellen, führen wir in (16) die wohlbekannten Ausdrücke für g_1 und g_2 ein, die wir für unseren Zweck rasch folgendermaßen herleiten: Wir setzen

$$\mathfrak{x}_p = v_1\, \mathfrak{t}_1, \quad \mathfrak{x}_q = v_2\, \mathfrak{t}_2, \tag{17a, b}$$

(so daß $v_1 = \mathfrak{t}_1 \mathfrak{x}_p$, $v_1^2 = \mathfrak{x}_p^2$ ist); dann wird wegen $\mathfrak{c}\, \mathfrak{x}_p\, \mathfrak{x}_q = v_1\, v_2 \neq 0$ und $\mathfrak{t}_1\; \mathfrak{x}_q = \mathfrak{t}_2\, \mathfrak{x}_p = 0$ nach (3) und (1) (wenn dort u und v durch p und q ersetzt wird)

$$\frac{\partial}{\partial s_1} = \frac{1}{v_1} \frac{\partial}{\partial p}, \quad \frac{\partial}{\partial s_2} = \frac{1}{v_2} \frac{\partial}{\partial q}, \tag{18a, b}$$

also nach (5) bei Beachtung der Tatsache, daß $\mathfrak{t}_1^2 = 1$ und $\mathfrak{t}_1\, \mathfrak{t}_2 = 0$ das Verschwinden von $\mathfrak{t}_1 \frac{\partial \mathfrak{t}_1}{\partial s_2}$ und von $\mathfrak{t}_1 \frac{\partial \mathfrak{t}_2}{\partial s_1} + \mathfrak{t}_2 \frac{\partial \mathfrak{t}_1}{\partial s_1}$ nach sich zieht,

$$g_1 = \mathfrak{D}\, \mathfrak{t}_1 = \mathfrak{t}_2 \frac{\partial \mathfrak{t}_1}{\partial s_1} = -\frac{\mathfrak{x}_p}{v_1} \frac{\partial (\mathfrak{x}_q : v_2)}{\partial s_1} = -\frac{\mathfrak{x}_p}{v_1^2 v_2}\, \mathfrak{x}_{pq} = \frac{-1}{2 v_1^2 v_2} \frac{\partial \mathfrak{x}_p^2}{\partial q},$$

d. h.

$$g_1 = \frac{-1}{v_1 v_2} \frac{\partial v_1}{\partial q} = -\frac{\partial\, ln\, v_1}{\partial s_2}; \tag{19a}$$

und analog

$$g_2 = \frac{1}{v_1 v_2} \frac{\partial v_2}{\partial p} = \frac{\partial\, ln\, v_2}{\partial s_1}. \tag{19b}$$

Auf Grund von (18a, b) geht nun (16) über in

$$\left(\frac{\varphi_p}{v_1} + g_1 - \frac{\Psi_q}{v_2}\right) \cos\varphi + \left(\frac{\varphi_q}{v_2} + g_2 + \frac{\Psi_p}{v_1}\right) \sin\varphi = 0; \tag{16'}$$

danach und nach (13) und (19a, b) gilt für die Charakteristiken

$$dp : dq : d\varphi = \tag{20}$$
$$= v_2 \cos\varphi : v_1 \sin\varphi : \left(v_1 \cos\varphi \frac{\partial\, ln\, (v_1 \psi)}{\partial q} - v_2 \sin\varphi \frac{\partial\, ln\, (v_2 \psi)}{\partial p}\right).$$

Die Gesamtheit der Kurven, aus denen die Schar der Feldlinien des gesuchten Vektorfeldes auszuwählen ist, im speziellen Fall also die geodätischen Linien, kann man demnach als die Menge derjenigen Kurven auf der Fläche $\mathfrak{x}$ erhalten, die den Projektionen der Charakteristiken in die p-q-Ebene des Bildraumes in der Richtung der φ-Achse entsprechen.

Daß aber diese Kurven wirklich, wie gewünscht, die Linien $q =$ const unter dem Richtungswinkel φ schneiden, geht daraus hervor, daß sich für sie als Tangentenvektor $d\mathfrak{x}$ nach (20), mit einem Proportionalitätsfaktor $\rho \neq 0$, $\mathfrak{x}_p dp + \mathfrak{x}_q dq = \rho (\mathfrak{x}_p v_2 \cos\varphi + \mathfrak{x}_q v_1 \sin\varphi)$ ergibt, woraus nach (17a, b) folgt:

$$d\mathfrak{x} = \rho v_1 v_2 (\mathfrak{t}_1 \cos\varphi + \mathfrak{t}_2 \sin\varphi).$$

Die vorstehenden Betrachtungen lassen sich ohne Schwierigkeit auf den allgemeineren Fall ausdehnen, in dem die Schiefenfunktion J in ihrer Abhängigkeit vom Ort auf der Fläche $\mathfrak{x}$ beliebig vorgeschrieben wird. Es ändert sich dann nur der Charakter der Differentialgleichungen (13′) und (16), und zwar der der ersten wesentlicher als der der zweiten, durch Hinzutreten eines Zusatzgliedes.