BAYERISCHE AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN
MATHEMATISCH-NATURWISSENSCHAFTLICHE KLASSE

SITZUNGSBERICHTE

JAHRGANG

1984

MÜNCHEN 1985

VERLAG DER BAYERISCHEN AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN
In Kommission bei der C. H. Beck'schen Verlagsbuchhandlung München

Über die ordnungshomogenen Teile von Räumen, Flächen und Kurven

Von **Otto Haupt** und **Georg Nöbeling**

Sitzung vom 25. Februar 1984

Ersterer hat 1937[1] mit einem Verteilungssatz gezeigt, wie ein topologischer Raum – bis auf einen nirgends dichten Rest – aus paarweise fremden, offenen Teilmengen zusammengesetzt ist, welche bezüglich eines vorgegebenen Ordnungsbegriffes homogen sind. In Teil A der vorliegenden Mitteilung wird dieser Satz auf Vereine (teilweise geordnete Mengen) verallgemeinert. Dies bewirkt eine Erweiterung der Anwendungsmöglichkeiten der Ordnungstheorie. So ergibt sich in Teil B, daß jeder topologische Raum – bis auf einen nirgends dichten Rest – aus Stücken $\overline{G}$ zusammengesetzt ist, welche bzgl. der Überdeckungsdimension global homogen sind (d. h. für jedes Stück $\overline{G}' \subseteqq \overline{G}$ ist $\dim(\overline{G}') = \dim(G)$). Im Teil C werden für die geometrische Ordnung von Mannigfaltigkeiten in einem euklidischen Raum an Hand bereits bekannter Ergebnisse Probleme aufgezeigt und Vermutungen ausgesprochen.

A. Ordnungsfunktionen auf einem abstrakten Verein

I. Es liege vor

erstens ein *Verein* $\mathfrak{V}$;[2]

zweitens eine *teilweise wohlgeordnete* Menge $\mathfrak{W}$, d. h. eine teilweise geordnete Menge mit folgender Eigenschaft:

---

[1] Mh. Math. Phys. **46**, 84–92. – O. Haupt u. H. Künneth, Geometrische Ordnungen, Springer-Verlag Berlin Heidelberg New York 1967, 34–37. – Für metrische Räume: F. K. Schmidt, Math. Ann. **106**, 457–472 (1931).

[2] Ein Verein ist eine teilweise geordnete Menge $\mathfrak{V}$; ihre Elemente nennen wir Somen und bezeichnen sie mit großen lateinischen Buchstaben. Ein Soma V heißt die Vereinigung einer Somenfamilie $\{A_i\}_{i \in I}$, wenn V das kleinste Soma $\geqq A_i$ für alle i; in Zeichen $V = \vee A_i$. Ein Soma D heißt der Durchschnitt von $\{A_i\}$, wenn D das größte Soma $\leqq A_i$ für alle i; in Zeichen $D = \wedge A_i$. Ein Soma O heißt Null-

(1) jede strikt fallende Folge $\ldots < w_2 < w_1$ in $\mathfrak{W}$ ist endlich;

drittens eine mit ord bezeichnete *Abbildung von* $\mathfrak{V}$ *in* $\mathfrak{W}$:

$$\text{ord}: \mathfrak{V} \to \mathfrak{W};$$

sie sei isoton, d. h. für alle $A_1, A_2 \in \mathfrak{V}$ gelte:

(2) $A_1 \leqq A_2 \Rightarrow \text{ord}(A_1) \leqq \text{ord}(A_2)$;

wir nennen eine solche Abbildung ord eine Ordnungsfunktion auf $\mathfrak{V}$ und $w := \text{ord}(A)$ den Ordnungswert von A.[1,3]

$\mathfrak{V}$, als bloße Menge betrachtet, wird durch ord trivialerweise zerlegt:

$$\mathfrak{V} = \bigcup_{w \in \mathfrak{W}} \text{ord}^{-1}(w);$$

dabei ist $\text{ord}^{-1}(w)$ die Menge aller Somen $A \in \mathfrak{V}$ mit $\text{ord}(A) = w$, also jedes $\text{ord}^{-1}(w)$ eine maximale Teil*menge* von $\mathfrak{V}$, auf welcher ord konstant ist. Uns interessiert im Folgenden, wie diese Zerlegung der Menge $\mathfrak{V}$ mit der Vereinsstruktur von $\mathfrak{V}$ zusammenhängt; insbesondere fragen wir nach den *Somen* A $(\neq O)$ in $\mathfrak{V}$, auf denen ord konstant ist, d. h. für welche gilt:

$$\text{ord}(B_1) = \text{ord}(B_2) \text{ für je zwei Somen } B_1, B_2 \text{ mit } (O \neq)\, B_1, B_2 \leqq A.$$

Wir werden solche Somen A global homogen nennen und zeigen, daß sie in $\mathfrak{V}$ dicht verteilt sind (Satz 3).

II. Existiert zu einem Soma A $(\neq O)$ aus $\mathfrak{V}$ ein $w \in \mathfrak{W}$ derart, daß gilt:

(3) Jedes Soma B mit $(O \neq)\, B \leqq A$ ist darstellbar als Vereinigung $B = \bigvee B_i$ von (endlich oder unendlichen vielen) Somen B_i $(\neq O)$ mit $\text{ord}(B_i) = w$,

---

soma, wenn $O \leqq A$ ist für alle Somen A. Es ist, ebenso wie V und D, falls vorhanden, eindeutig bestimmt. $A (\neq O)$ bedeute: $A \neq O$, falls O existiert. Zwei Somen A_1 und A_2 heißen fremd, wenn kein Soma $A (\neq O)$ existiert mit $A \leqq A_1$ und $A \leqq A_2$. – Ein Verein heißt Mengenverein, wenn seine Somen Mengen sind und die Relation $\leqq$ die Inklusion $\subseteq$ ist (dann brauchen Vereinigung und Durchschnitt noch nicht die mengentheoretische Bedeutung zu haben.) Vgl. G. Nöbeling, Grundlagen der Analytischen Topologie, Springer-Verlag Berlin Göttingen Heidelberg 1954.

[3] Beispiel: $\mathfrak{V}$ der Mengenverein aller Punktmengen M eines topologischen Raumes E; $\mathfrak{W}$ die Menge aller Kardinalzahlen $\leqq \mathfrak{m}(E)$ (:= Mächtigkeit von E): ord $(M) := \mathfrak{m}(M)$. Vgl. hierzu F. K. Schmidt, l. c.[1]

so bezeichnen wir das Soma A als *w-homogen* oder kurz als *homogen*, wenn es uns auf das w nicht ankommt. (Dabei muß nicht auch $\operatorname{ord}(A) = w$ sein.)

Dieses w ist dann eindeutig bestimmt. Denn sei A auch w'-homogen. Dann ist jedes B_i, weil $\leqq A$, die Vereinigung von Somen B_{ij} $(\neq O)$ mit $\operatorname{ord}(B_{ij}) = w'$. Aus $B_{ij} \leqq B_i$ folgt $w' \leqq w$ nach (2). Analog ist $w \leqq w'$.

Aus (3) folgt trivialerweise:

(4) Ist A w-homogen, so ist jedes B mit $(O \neq)$ $B \leqq A$ ebenfalls w-homogen (mit demselben w).

Weiter folgt aus der eindeutigen Bestimmtheit von w und aus (4):

Ist A_1 w_1-homogen, A_2 w_2-homogen und ist $w_1 \neq w_2$, so sind A_1 und A_2 fremd.

Schließlich gilt:

(6) Zu jedem A $(\neq O)$ aus $\mathfrak{V}$ existieren (mindestens) ein B in $\mathfrak{V}$ mit $(O \neq)$ $B \leqq A$ und ein w in $\mathfrak{W}$ derart, daß B w-homogen ist.

Denn wegen (1) existiert unter den Somen B mit $(O \neq)$ $B \leqq A$ (mindestens ein B_0 mit $\operatorname{ord}(B) = \operatorname{ord}(B_0)$ für alle B mit $(O \neq)$ $B \leqq B_0$. Jedes solche B_0 und $w_0 := \operatorname{ord}(B_0)$ leisten das Verlangte.

Die Bezeichnung „homogen" wird gerechtfertigt durch folgende Bemerkung. Ist der Verein atomar, so ist ein Soma A $(\neq O)$ aus $\mathfrak{V}$ homogen genau dann, wenn für je zwei Atome $P_1, P_2 \leqq A$ gilt $\operatorname{ord}(P_1) = \operatorname{ord}(P_2)$.

Dies folgt unmittelbar aus (3) und (4).

III. Ein Soma A $(\neq O)$ aus $\mathfrak{V}$ heiße *global (w-)homogen*, wenn A w-homogen und außerdem $\operatorname{ord}(A) = w$ ist.

(7) Ein Soma A $(\neq O)$ ist global w-homogen genau dann, wenn $\operatorname{ord}(B) = w$ ist für jedes Soma B mit $(O \neq)$ $B \leqq A$.

Denn sei A global w-homogen und $(O \neq)$ $B \leqq A$; aus (3) folgt dann $w = \operatorname{ord}(B_i) \leqq \operatorname{ord}(B) \leqq \operatorname{ord}(A) = w$, also $\operatorname{ord}(B) = w$. Ist umgekehrt $\operatorname{ord}(B) = w$ für jedes B mit $(O \neq)$ $B \leqq A$, so gilt (3) mit $B_i := B$; also ist A global w-homogen.

Aus (7) folgt unmittelbar:

(8) Ist A $(\neq O)$ global w-homogen, so ist jedes B mit $(O \neq)$ $B \leqq A$ ebenfalls global w-homogen (mit demselben w).

Weiter gilt in Verschärfung von (6):

(9) Zu jedem A $(\neq O)$ existiert (mindestens) ein B mit $(O \neq)$ $B \leqq A$ und ein $w \in \mathfrak{W}$ derart, daß B global w-homogen ist.

Die im Beweis von (6) angegebenen B_0 und w_0 leisten das Verlangte.

Satz 1. *Jedes w-homogene Soma A ist die Vereinigung aller global w-homogenen Somen $\leqq A$ (mit demselben w).*

Beweis. Da A w-homogen ist, gilt (3) auch für A statt B. Also ist $A = \bigvee A_i$ mit $\operatorname{ord}(A_i) = w$. Nach (4) ist jedes A_i außerdem w-homogen. Also ist jedes A_i global w-homogen.

Wir nennen eine Menge $\mathfrak{B}$ von Somen B bzw. ein Soma B mit $(O \neq)$ $B \leqq A$ *dicht* in A, wenn kein Soma B' mit $(O \neq)$ $B' \leqq A$ fremd ist zu allen $B \in \mathfrak{B}$ bzw. zu B.

Satz 2. *Zu jedem w-homogenen Soma A existiert (mindestens) eine Menge von paarweise fremden, globalen w-homogenen Somen $\leqq A$ (mit demselben w), welche dicht ist in A.*

Beweis. Wir numerieren die Somen B mit $(O \neq)$ $B \leqq A$ mittels Ordinalzahlen: $B^0, B^1, \ldots, B^\alpha, \ldots$. Nach Satz 1 existieren global w-homogene Somen $\leqq B^0$; eines von ihnen bezeichnen wir mit A^0. Induktionsvoraussetzung: Sei α eine Ordinalzahl > 0; für jedes $\beta < \alpha$ sei bereits ein oder kein Soma A^β $(\neq O)$ definiert. Ist B^α zu mindestens einem A^β nicht fremd, so definieren wir A^α nicht. Andernfalls bezeichnen wir eines der (nach Satz 1 existierenden) global w-homogenen Somen $\leqq B^\alpha$ mit A^α. Die Menge aller so definierter Somen $A^0, A^1, \ldots, A^\alpha, \ldots$ leistet das Verlangte.

Verzichten wir auf die Gleichheit der Ordnungswerte w, so erhalten wir folgendes **Hauptresultat:**

Satz 3. *Zu jedem Soma A $(\neq O)$ existiert (mindestens) eine Menge von paarweise fremden, global homogenen Somen $\leqq A$, welche dicht ist in A.*

Beweis analog wie für den Satz 2, nur mit „(9)“ statt „Satz 1“ und „global homogen“ statt „global w-homogen“.

IV. Nun gelte:

(10) In $\mathfrak{V}$ existiert für jede Somenfamilie $\{A_i\}_{i \in I}$ die Vereinigung $\bigvee A_i$, für je zwei Somen A, A' auch der Durchschnitt $A \bigvee A'$ und es gilt das Distributivgesetz $A \wedge \bigvee A_i = \bigvee (A \wedge A_i)$ für beliebige A und beliebige (endliche oder unendliche) $\{A_i\}$.

Insbesondere existiert dann das Einssoma $E :=$ Vereinigung aller Somen.

Für jedes $w \in \mathfrak{W}$, für welches in $\mathfrak{V}$ (mindestens) ein w-homogenes Soma A existiert, ist dann die Vereinigung A^w aller w-homogenen Somen das größte w-homogene Soma in $\mathfrak{V}$. Nach (4) ist ein Soma $B (\neq O)$ genau dann w-homogen, wenn $B \leqq A^w$ ist.

Satz 4. *Die größten w-homogenen Somen A^w ($w \in \mathfrak{W}$) sind paarweise fremd. Ihre Vereinigung ist dicht in E.*

Beweis. Die erste Behauptung folgt aus (5), die zweite aus (6).

Gilt nun auch noch:

Für jede Kette $\{A_i\}_{i \in I}$ in $\mathfrak{V}$ mit $\operatorname{ord}(A_i) = w$ für alle i ist auch $\operatorname{ord}(\bigvee A_i) = w$ (mit demselben w),

so gilt der

Satz 5. *Sei A ein Soma ($\neq O$)* und *A^0 ein global w-homogenes Soma $< A$. Dann existiert (mindestens) ein größtes global w-homogenes Soma A^+ (mit demselben w) derart, daß $A^0 \leqq A^+ \leqq A$ ist.*

Beweis. Das Zornsche Lemma, angewandt auf den aus allen global w-homogenen Somen B mit $A^0 \leqq B \leqq A$ bestehenden Unterverein von $\mathfrak{V}$, liefert die Behauptung.

B. Ordnungsfunktionen auf topologischen Vereinen

V. Es sei E ein topologischer Raum. Im Mengenverein $\mathfrak{V}$ aller offenen Mengen $G \subseteqq E$ haben Vereinigung und Durchschnitt die mengentheoretische Bedeutung. Daher sind in ihm die Bedingungen (10) erfüllt. Für jede Ordnungsfunktion ord auf $\mathfrak{B}$ gilt daher (neben den Sätzen 1–3) der Satz 4. Bezeichnen wir für jedes $w \in \mathfrak{W}$, für welches w-homogene Mengen $G \in \mathfrak{B}$ existieren, mit G^w die Vereinigung aller dieser Mengen, also die größte w-homogene, offene Menge in $\mathfrak{B}$, so können wir den Satz 4 unter den vorliegenden Voraussetzungen folgendermaßen formulieren:

$$(11)\quad G^{w_1} \cap G^{w_2} = \emptyset \text{ für } w_1 \neq w_2 \text{ und } \overline{\bigcup G^w} = E.$$

(Dies ist in Kurzfassung der Verteilungs- bzw. Darstellungssatz l. c.[1])

Ist x ein Punkt von E, so gibt es wegen (1) unter den x enthaltenden Mengen $G \in \mathfrak{B}$ (mindestens) ein G_x derart, daß für alle $G'_x \subseteq G_x$ gilt $\operatorname{ord}(G'_x) = \operatorname{ord}(G_x)$. Sei dann $w := \operatorname{ord}(G_x)$. Wir schreiben: $\operatorname{ord}(x, E) = w$.

Satz 6. *Eine offene Menge $G \neq \emptyset$ ist genau dann w-homogen, wenn* $\operatorname{ord}(x, E) = w$ *ist für alle $x \in G$.*

Beweis. Sei einerseits $\operatorname{ord}(x, E) = w$ für alle $x \in G$, ist dann $\emptyset \neq G' \subseteq G$, G' offen, so existiert für jedes $x \in G'$ ein offenes G'_x mit $x \in G'_x \subseteq G'$ und $\operatorname{ord}(G'_x) = w$; dann ist $G' = \bigcup G'_x$; also ist G w-homogen. Ist andererseits G w-homogen und $x \in G$, so folgt $\operatorname{ord}(x, E) = w$ aus (3).

VI. Wieder sei E ein topologischer Raum. Man nennt für jede offene Menge $G \subseteq E$ die abgeschlossene Hülle $S = \overline{G}$ ein *Stück* (von E).[4] Es sei $\overline{\mathfrak{B}}$ der Mengenverein aller Stücke. In ihm haben Vereinigungen und Durchschnitte i. a. nicht die mengentheoretische Bedeutung. Trotzdem sind, wie wir jetzt zeigen wollen, in ihm die Bedingungen (10) erfüllt.

Erstens sei $\{\overline{G_i}\}_{i \in I}$ eine Familie von Stücken. Einerseits ist $G_{i_0} \subseteq \bigcup G_i$, also $\overline{G}_{i_0} \subseteq \overline{\bigcup G_i}$ für alle $i_0 \in I$. Ist anderseits $\overline{G}_i \subseteq \overline{G}$ für alle $i \in I$, so ist $G_i \subseteq \overline{G}$ für alle i, also $\bigcup G_i \subseteq \overline{G}$ und somit $\overline{\bigcup G_i} \subseteq \overline{G}$. Also ist $\overline{\bigcup G_i}$ die Vereinigung in $\overline{\mathfrak{B}}$ aller $\overline{G}_i$, in Zeichen $\overline{\bigcup G_i} = \bigvee \overline{G}_i$.

Zweitens seien $\overline{G}$ und $\overline{G'}$ zwei Stücke. Einerseits ist $G \cap G' \subseteq G$ und $G \cap G' \subseteq G'$, also $\overline{G \cap G'} \subseteq \overline{G}$ und $\overline{G \cap G'} \subseteq \overline{G'}$. Anderseits sei

[4] K. Menger, Dimensionstheorie, Verlag Teubner Leipzig 1928, 30.

$\overline{G}_0$ ein Stück mit $\overline{G}_0 \subseteqq \overline{G}$ und $\overline{G}_0 \subseteqq \overline{G'}$. Wir behaupten $\overline{G}_0 \subseteqq \overline{G \cap G'}$. Hierfür genügt es, die Existenz einer offenen Menge G_2 mit $G_2 \subseteqq G \cap G'$ und $\overline{G}_2 = \overline{G}_0$ zu beweisen. Zunächst betrachten wir die offene Menge $G_1 := G_0 \cap G$. Dann ist $G_1 \subseteqq G_0$, also $\overline{G}_1 \subseteqq \overline{G}_0$. Angenommen es wäre $\overline{G}_0$ nicht $\subseteqq \overline{G}_1$. Dann ist auch G_0 nicht $\subseteqq \overline{G}_1$. Also ist einerseits die offene Menge $D := G_0 \setminus \overline{G}_1$ nicht leer. Anderseits ist $D \cap G = (G_0 \setminus \overline{G}_1) \cap G = (G_0 \cap G) \setminus (\overline{G}_1 \cap G) = G_1 \setminus (\overline{G}_1 \cap G) = G_1 \setminus (G_1 \cap G) = G_1 \setminus G = \emptyset$, und daher, weil D offen ist, auch $D \cap \overline{G} = \emptyset$.

Aus $\emptyset \neq D \subseteqq G_0 \subseteqq \overline{G}_0$ und $D \cup \overline{G} = \emptyset$ folgt ein Widerspruch zu $\overline{G}_0 \subseteqq \overline{G}$. Also ist $G_1 \subseteqq G$ und $\overline{G}_1 = \overline{G}_0$. Analog ergibt sich für die offene Menge $G_2 := G_1 \cap G'$, daß $G_2 \subseteqq G'$ (also auch $G_2 \subseteqq G_1 \subseteqq G$) und $\overline{G}_2 = \overline{G}_1$ (also auch $\overline{G}_2 = \overline{G}_0$) ist. Die Menge G_2 leistet also das Verlangte. – Damit ist gezeigt, daß $\overline{G \cap G'}$ der Durchschnitt in $\mathfrak{V}$ von G und G' ist, in Zeichen $\overline{G \cap G'} = \overline{G} \wedge \overline{G'}$.

Drittens ist nach dem Bewiesenen $\overline{G} \wedge \bigvee \overline{G}_i = \overline{G} \wedge \overline{\bigcup G_i}$ und $\bigvee (\overline{G} \wedge \overline{G}_i) = \bigvee \overline{G \cap G_i} = \overline{\bigcup (G \cap G_i)}$, also $\overline{G} \wedge \bigvee \overline{G}_i = \bigvee (\overline{G} \wedge \overline{G}_i)$.

Da, wie hiermit bewiesen, in $\mathfrak{V}$ die Bedingungen (10) erfüllt sind, gilt für jede Ordnungsfunktion ord auf $\mathfrak{V}$ (neben den Sätzen 1–3) der Satz 4. Bezeichnen wir für jedes $w \in \mathfrak{W}$, für welches w-homogene Stücke $\overline{G}$ in $\mathfrak{V}$ existieren, mit $\overline{G^w}$ die Vereinigunge aller dieser Stücke, also das größte w-homogene Stück S^w in $\mathfrak{V}$, so können wir unter den jetzt vorliegenden Voraussetzungen den Satz 4 wieder in der Gestalt (11) formulieren.

Beispiel. Für jede Punktmenge M des topologischen Raumes E sei $\dim(M)$ die *Überdeckungsdimension* von M.[5] Für je zwei abgeschlossene Mengen M_1, M_2 mit $M_1 \subseteqq M_2$ ist $\dim(M_1) \leqq \dim(M_2)$. Also ist dim auf $\mathfrak{V}$ eine Ordnungsfunktion ord mit dem Wertebereich $\mathfrak{W} :=$ Menge aller ganzen Zahlen m mit $-1 \leqq m \leqq +\infty$.

Zur Illustration betrachten wir in einer euklidischen Ebene eine Strecke S und eine dazu fremde, beschränkte, abzählbare Menge T derart, daß S die Menge aller Häufungspunkte von T ist. Wir setzen $S \cup T =: E$. Es ist T offen in E. Weiter ist $\dim(E) = 1$. Es ist E das (einzige) größte 0-homogene Stück von E. Die endlichen Teilmengen sind die global

---

[5] Vgl. A R. Pears, Dimension Theory of General Spaces, Cambridge University Press 1975.

0-homogenen Stücke von E. (Trotz $\dim(E) = 1$ besitzt also E keine 1-homogenen Stücke.)

VII. Nun sei der topologische Raum E regulär. Wir betrachten beide Mengenvereine $\mathfrak{V}$ und $\overline{\mathfrak{V}}$. Auf beiden liege eine Ordnungsfunktion ord vor (mit demselben Wertebereich $\mathfrak{W}$). Dabei gelte (2) für je zwei Mengen A_1, A_2 aus $\mathfrak{V} \cup \overline{\mathfrak{V}}$.

Wir wollen zeigen – und damit unsere Bezeichnungsweise rechtfertigen –, daß für jede größte w-homogene offene Menge G^w in $\mathfrak{V}$ die abgeschlossene Hülle $\overline{G^w}$ ein größtes w-homogenes Stück in $\overline{\mathfrak{V}}$ ist (mit demselben w). Genauer beweisen wir, daß für jedes $w \in \mathfrak{W}$ gilt: *Existiert in* $\mathfrak{V}$ (eine w-homogene offene Menge G und damit) *die größte w-homogene offene Menge G^w, so existiert in* $\overline{\mathfrak{V}}$ (ein w-homogenes Stück S und damit) *das größte w-homogene Stück S^w* (mit demselben w) *und ebenso umgekehrt. Es ist dann $\overline{G^w} = S^w$.*

Beweis. Es existiere G^w in $\mathfrak{V}$. Es sei x ein beliebiger Punkt von G^w. Weil G^w w-homogen ist, existieren nach Satz 6 zwei offene Mengen G_1 und G_2 mit $x \in G_1$, $\overline{G}_1 \subseteqq G_2 \subseteqq G^w$ und $\operatorname{ord}(G_1) = \operatorname{ord}(G_2) = w$. Dann ist $w = \operatorname{ord}(G_1) \leqq \operatorname{ord}(\overline{G}_1) \leqq \operatorname{ord}(G_2) = w$, also $\operatorname{ord}(\overline{G}_1) = w$. Also existiert das größte w-homogene Stück S^w in $\overline{\mathfrak{V}}$. Da $x \in G_1 \subseteqq S^w$ gilt und $x \in G^w$ beliebig ist, gilt $G^w \subseteqq S^w$. – Nun existiere S^w in $\overline{\mathfrak{V}}$. Weil S^w w-homogen ist, existieren offene Mengen G_1 und G_2 mit $\overline{G}_1 \subseteqq G_2 \subseteqq S^w$ und $\operatorname{ord}(\overline{G}_1) = \operatorname{ord}(\overline{G}_2) = w$. Dann ist $w = \operatorname{ord}(\overline{G}_1) \leqq \operatorname{ord}(G_2) \leqq \operatorname{ord}(\overline{G}_2) = w$, also $\operatorname{ord}(G_2) = w$. Daher existiert G^w. – Angenommen nun, G^w und S^w existieren, also $G^w \subseteqq S^w$, es wäre aber $\overline{G^w} \neq S^w$. Nun ist S^w ein Stück: $S^w = \overline{G}$ mit offenem G. Dann ist die offene Menge $G \setminus \overline{G^w}$ nicht leer. Folglich existiert eine offene Menge G_2 mit $\emptyset \neq G_2 \subseteqq G \setminus \overline{G^w}$ und $\operatorname{ord}(\overline{G}_2) = w$ und weiter eine offene Menge G_1 mit $\overline{G}_1 \subseteqq G_2$ und $\operatorname{ord}(\overline{G}_1) = w$. Hieraus folgt wieder $\operatorname{ord}(G_2) = w$ und hieraus $G_2 \subseteqq G^w$, im Widerspruch zu $G_2 \subseteqq G \setminus \overline{G^w}$.

C. Geometrische Ordnungen

VIII. Für zwei Systeme $\mathfrak{K}_1$ und $\mathfrak{K}_2$ von Mengen K_1 bzw. K_2 schreiben wir $\mathfrak{K}_1 \leqq \mathfrak{K}_2$, wenn zu jeder Menge $K_1 \in \mathfrak{K}_1$ (mindestens) eine Menge $K_2 \in \mathfrak{K}_2$ mit $K_1 \subseteqq K_2$ existiert.

Nun liege im n-dimensionalen euklidischen Raum R^n ($n \geqq 2$) eine k-Mannigfaltigkeit vor ($1 \leqq k \leqq n-1$).[6] Es sei $\mathfrak{B}$ der Mengenverein aller in M offenen Mengen $G \subseteq M$. Weiter liege für jedes $G \in \mathfrak{B}$ ein System $\mathfrak{K}(G)$ von $(n-k)$-Mannigfaltigkeit K im R vor derart, daß für alle $G_1, G_2 \in \mathfrak{B}$ gilt:

(12) $\quad G_1 \subseteq G_2 \Rightarrow \mathfrak{K}(G_1) \leqq \mathfrak{K}(G_2).$

Sodann sei $\mathfrak{W}$ die Menge aller ganzen Zahlen m mit $0 \leqq m \leqq +\infty$. Endlich definieren wir für jedes $G \in \mathfrak{B}$:

(13) $\quad \operatorname{ord}(G) := \sup_K \mathfrak{m}(G \cap K) \qquad (K \in \mathfrak{K}(G)),$

wobei $\mathfrak{m}(G \cap K)$ die Mächtigkeit $\in \mathfrak{W}$ von $G \cap K$ bedeutet.

Dann gilt (2). Daher ist durch (13) eine Ordnungsfunktion ord auf $\mathfrak{B}$ mit Werten in $\mathfrak{W}$ definiert. Wir nennen sie die *geometrische Ordnung* bzgl. der Charakteristiken K.

Bei den folgenden Beispielen ist zumeist $\mathfrak{K}(G_1) = \mathfrak{K}(G_2)$ für alle $G_1, G_2 \in \mathfrak{B}$, also $\mathfrak{K}$ von $G \in \mathfrak{B}$ unabhängig. Ist dies nicht der Fall (vgl. Nr. XI), so heiße ord eine geometrische *Eigen*ordnung.

Für jede geometrische Ordnung ord gilt der Satz 4, weil in $\mathfrak{B}$ die Bedingungen (10) erfüllt sind. Er liefert den

Satz 7. *Die k-Mannigfaltigkeit M ist die (mengentheoretische) Vereinigung der größten m-homogenen k-Mannigfaltigkeiten $G^m \subseteq M$ ($m \in \mathfrak{W}$) – sie sind offen in M – und einer in M nirgends dichten, in M abgeschlossenen Menge $F \subseteq M$.*

(Diese Mengen G^m und F sind paarweise fremd; nicht für jedes $m \in \mathfrak{W}$ muß G^m vorhanden sein; F kann leer sein.)

Sodann liefert der Satz 3 den

Satz 8. *Jedes G^m ist (auf mindestens eine Art) darstellbar als (mengentheoretische) Vereinigung von abzählbar vielen paarweise fremden, global m-homogenen k-Mannigfaltigkeiten G_i^m und einer zu ihnen fremden, in G^m nirgends dichten, in G^m abgeschlossenen (eventuell leeren) Menge F^m.*

---

[6] Wir nennen jede Punktmenge M des euklidischen Raumes R^n mit der Eigenschaft, daß jeder Punkt $x \in M$ eine in M offene Umgebung besitzt, welche homöomorph ist zu einer offenen Menge $\subseteq R$, eine $\mathfrak{l}$-Mannigfaltigkeit ($n \geqq 2$; $1 \leqq \mathfrak{l} \leqq n-1$; $\mathfrak{l} = 1$: Kurve; $\mathfrak{l} = 2$: Fläche; $\mathfrak{l} = n-1$: Hyperfläche.) Jede in M offene Menge $\subseteq M$ ist ebenfalls eine $\mathfrak{l}$-Mannigfaltigkeit und umgekehrt. – Ein Bogen ist das topologische Bild einer abgeschlossenen Strecke.

Diesen abstrakt-analytischen Sätzen steht für jede geometrische Ordnung das folgende, wesentlich schwierigere, konkret-konstruktive *Problem* gegenüber:

Für welche Zahlen m existieren m-homogene k-Mannigfaltigkeiten M im R^n?

Im Folgenden stellen wir einige Ergebnisse zu diesem Problem zusammen.

IX. Lineare Ordnungen. Speziell sei nun $\mathfrak{K}$ das System aller $(n-k)$-Ebenen im R^n und $\mathfrak{K}(G) := \mathfrak{K}$ für jedes $G \in \mathfrak{B}$. Die zugehörige geometrische Ordnung heißt *linear.*

Für sie haben wir folgende

Vermutung. *Außer für $m = +\infty$ existieren global m-homogene k-Mannigfaltigkeiten M für jedes ganze m mit*

(14) $n - k + 1 \leqq m \leqq k(n-k) + 1$

und nur für diese m.

Daß $n - k + 1$ eine Unterschranke ist, folgt trivialerweise daraus, daß je $n - k + 1$ Punkte von M auf (mindestens) einer $(n-k)$-Ebene liegen. Die Oberschranke $k(n-k) + 1$ ist unter gewissen Einschränkungen für M und $\mathfrak{K}$ (darunter Differenzierbarkeitsvoraussetzungen für M) plausibel gemacht und sind algebraische m-homogene k-Mannigfaltigkeiten M für jedes der genannten m angegeben worden.[7]

1. Nun sei speziell $k = n - 1$ (also M eine Hyperfläche und $\mathfrak{K}$ das System der Geraden im R^n).

Dann besagt die Vermutung, daß (außer für $m = +\infty$) es global m-homogene Hyperflächen M im R^n nur für $m = 2, \ldots, n$ gibt.

Dies ist richtig, wenn man nur Hyperflächen M betrachtet, die mit rechtwinkligen, cartesischen Korordinaten $x_1, \ldots, x$ darstellbar sind in der Form $x_n = f(x_1, \ldots, x_{n-1})$ über einem offenen Würfel im R_{n-1}, wobei alle partiellen Ableitungen von f bis zur n-ten Ordnung existieren und stetig sind und alle diese Ableitungen noch gewissen Bedingungen genügen. (Im Fall $n = 3$ können diese Bedingungen mittels differentialgeometrischer Überlegungen stets als erfüllt nachgewiesen werden; im Fall $n > 3$ sind sie schwer zu durchschauen.)[8]

---

[7] O. Haupt, J. reine angew. Math. **176**, 95–111 (1937).

[8] O. Haupt, J. reine angew. Math. **169**, 177–185 (1933).

Im Fall $n = 3$ ist auch bei folgendermaßen definiertem M m-Homogenität nur für $m = 2$ und $= 3$ möglich: Es seien g_1 und g_2 zwei windschiefe Gerade im R^3; dann sei M eine Fläche im R^3 mit der Eigenschaft, daß jeder Punkt von M auf mindestens einer Geraden $g \in M$ liegt, welche g_1 und g_2 trifft; sodann sei $\mathfrak{K}$ das System aller nicht in M liegenden Geraden im R^3.[9]

2. Jetzt sei $k = 1$ und $\mathfrak{K}$ das System aller Hyperebenen im R^n. Dann läuft die Vermutung darauf hinaus, daß (außer für $m = +\infty$) es m-homogene Bogen M im R^n nur für $m = n$ gibt.

Dies ist richtig, wenn man sich auf Bogen M beschränkt, die einer der beiden folgenden Bedingungen a) und b) genügen: a) M ist in jedem Punkt x n-mal stetig differenzierbar[9], b) in jedem Punkt x von M existiert für jedes t mit $1 \leqq t \leqq n - 2$ genau eine t-Schmiegebene an M (Limes einer Folge von t-Ebenen durch $t + 1$ verschiedene Punkte von M, die gegen x konvergieren).[10]

Ohne diese Beschränkung ist die Richtigkeit der Vermutung bewiesen worden für $n = 2$ und zwar nicht nur für die linieare Ordnung, sondern allgemeiner für Ordnungsfunktionen bzgl. Systemen von Charakteristiken K, die durch je zwei ihrer Punkte eindeutig bestimmt sind und von diesen stetig abhängen; die einzigen bzgl. eines solchen Systems $\mathfrak{K}$ global homogenen Bogen sind (außer denen mit der Ordnung $+\infty$) die $\mathfrak{K}$-konvexen Bogen.[11]

X. Nichtlineare Ordnungen. Sei $n = 2$, M ein Bogen in der Ebene R^2 und $\mathfrak{V}$ der Mengenverein aller in M offenen Mengen $G \subseteqq M$. Weiter sei $\mathfrak{K}$ das System aller Kreislinien einschließlich der Geraden; für jedes $G \in \mathfrak{V}$ sei $\mathfrak{K}(G) := \mathfrak{K}$. Die zugehörige geometrische Ordnung heißt *zyklisch*.

Bezüglich dieser Ordnungsfunktion existieren (außer für $m = +\infty$) nur für $m = 3$ global m-homogene Bogen.[12]

Dasselbe gilt für die zu folgendem Charakteristikensystem gehörige *hyperbolische* Ordnung: $\mathfrak{K}$ sei das System, bestehend aus allen nicht aus-

---

[9] O. Haupt, Mh. Math. Phys. **48**, 245–267 (1939).

[10] O. Haupt, Sitz. Ber. Bayer. Akad. Wiss., Math. Phys. Kl. 1977, 167–181.

[11] O. Haupt, J. reine angew. Math. **164**, 50–60 (1931).
(1. Zusatz und 2. Zusatz auf S. 58 sind zu streichen.)

[12] O. Haupt, J. reine angew. Math. **178**, 14–28 (1938); **180**, 44–72 (1939).

gearteten Hyperbeln mit festen Asymptotenrichtungen, weiter aus allen Geradenpaaren dieser Richtungen, sowie schließlich aus allen Geraden.[9]

XI. Eigenordnungen. Wieder sei $n = 2$, M und $\mathfrak{B}$ wie in IX definiert. Für jedes $G \in \mathfrak{B}$, $G \neq \emptyset$, sei $\mathfrak{K}(G)$ das System aller Mengen $K \neq G$, die aus G durch Translationen in R^2 hervorgehen. Dann ist durch (13) die *Translationsordnung* definiert.

Bezüglich dieser Translationsordnung existieren (außer für $m = +\infty$) nur für $m = 1$ global m-homogene Bogen. Es sind dies die konvexen Bogen ohne parallele Stützgeraden (außer eventuell in den Endpunkten).[13]

Mit der Translationsordnung steht die folgende Ordnungsfunktion in engem Zusammenhang. Es sei B die Menge aller Bewegungen β in R^2 mit $\beta(M) \neq M$. Für jedes $G \in \mathfrak{B}$ sei sodann $\mathfrak{K}(G)$ das System der $\beta(G)$ mit $\beta \in B$. Die dann durch (13) definierte Ordnungsfunktion heißt *kinematisch*.[14] Über die bzgl. dieser Ordnung homogenen Bogen M ist uns nichts bekannt.

---

[13] A. Rosenthal, Mh. Math. Phys. **45**, 76–91 (1937).

[14] G. Bol, Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg **11**, 394-408 (1936).