Sitzungsberichte

der

mathematisch-naturwissenschaftlichen Abteilung

der

Bayerischen Akademie der Wissenschaften zu München

1939. Heft I und II

Sitzungen Januar–Juli

München 1939

Verlag der Bayerischen Akademie der Wissenschaften

In Kommission bei der C. H. Beck'schen Verlagsbuchhandlung

Zur Theorie der konformen Abbildung.[1]

Von F. Lindemann †.

Vorgelegt in der Sitzung vom 14. Januar 1939.

Inhalt.

Schon seit Jahren beschäftigte mich der Gedanke, daß es möglich sein müsse, von der Christoffelschen Lösung des Problems für ein geradliniges Polygon durch Grenzübergang zu der Lösung für ein Gebiet zu gelangen, das von einer stetig verlaufenden Kurve begrenzt wird; aber erst in neuerer Zeit ist es mir gelungen, die fehlende Verbindung herzustellen, und zwar wesentlich durch die geometrische Deutung, die Pochhammer für die Grundeigenschaft des von Schottky und Schwarz eingeführten Differentialausdrucks gegeben hat.

Das Resultat ist von überraschender Einfachheit; vgl. § 2. Die folgenden Paragraphen sind den Anwendungen der allgemeinen Theorie und der Ableitung der bekannten Beispiele aus ihr gewidmet, zunächst Kreis und Ellipse. Bei letzterer entstand eine Schwierigkeit, die schließlich dadurch überwunden wurde, daß in der Schwarzschen Lösung sich eine wesentliche Lücke findet (vgl. § 5). Für den Fall, daß die Randkurve aus mehreren Teilstücken besteht, die gegeneinander Winkel bilden, konnte auch der allgemeine Ansatz gegeben werden (§ 6), so daß nur

[1] Der Verfasser ist während der Korrektur gestorben. Ohne seine Hilfe war es nicht mehr möglich, die in die Bogen hineingekommenen Unstimmigkeiten vollständig zu beseitigen.

noch die Bestimmung einer endlichen Anzahl von Konstanten zu leisten ist, in einigen Fällen aber ergänzende Betrachtungen nötig werden. Für die Kreisbogen-Sichel und das Kreisbogen-Dreieck ergeben sich die bekannten Resultate, für das n-Eck ein allgemeiner Ansatz.

Will man für höhere Kurven Differentialgleichungen aufstellen, so müßte man auf die Arbeiten von Sylvester über sogenannte Reziprokanten und über Differentialgleichungen algebraischer Kurven (Collected mathematical Papers vol. IV) und von Halphen über Differentialinvarianten zurückgehen und die betreffenden Gleichungen für die Variabeln $x+iy$ und $x-iy$ umformen, wie ich es für Kegelschnitte getan habe: „Konforme Abbildung der Halbebene auf ein von beliebigen Parabeln begrenztes Gebiet", Sitzungsberichte der Bayer. Akad. der Wissenschaften, Jg. 1912; und „Abbildung auf ein von beliebigen Kegelschnitten begrenztes Polygon", ibid.; ferner: „Über konforme Abbildung von Kegelschnitten", ibid., Jg. 1923.

§ 1. Der Satz von Pochhammer.

Es seien ξ, η die Koordinaten eines Punktes einer geschlossenen Kurve und als Funktionen eines reellen Parameters t gegeben; ξ', η' mögen ihre Differentialquotienten nach t bedeuten.

Dann ist

$$\begin{aligned} \frac{d \log(\xi' + i\eta')}{dt} &= \frac{\xi'\xi'' + \eta'\eta'' + i(\eta''\xi' - \eta'\xi'')}{\xi'^2 + \eta'^2} \\ (1) \qquad &= \frac{d}{dt}\log\frac{ds}{dt} + i\frac{d}{dt}\operatorname{arc\,tg}\frac{d\eta}{d\xi} \\ &= \frac{d}{dt}\log\frac{ds}{dt} + i\frac{d\omega}{dt}, \end{aligned}$$

wenn ds das Bogenelement und ω den Winkel des Radiusvektors gegen die ξ-Achse bezeichnet. Ist ε der Winkel der Tangente gegen diese Achse, so hat man $\varepsilon = \omega + \frac{1}{2}\pi$, also $d\varepsilon = d\omega$, und es bedeutet $d\varepsilon$ den Kontingenzwinkel. Wählt man $t = \varepsilon$, so ergibt sich:

Der imaginäre Teil der linken Seite der Gleichung (1) ist gleich der imaginären Einheit, wenn der zum Kontingenzwinkel $d\varepsilon$ gehörige Winkel ε als Parameter eingeführt wird.[1]

Vertauscht man i mit $-i$, so wird also:

$$(2) \qquad \frac{d \log (\xi' - i\eta')}{d\varepsilon} = \frac{d \log \frac{ds}{d\varepsilon}}{d\varepsilon} - i,$$

wo das erste Glied der rechten Seite den Differentialquotienten des Krümmungsradius darstellt. Diese Gleichung wird für unsere spätere Entwicklung von Wichtigkeit werden.

§ 2. Das durch eine stetig gekrümmte Kurve begrenzte Flächenstück.

Die konforme Abbildung eines geradlinigen Polygons auf die Halbebene ist bekanntlich von Christoffel durchgeführt. Bezeichnet $z = x + iy$ einen Punkt im Innern des Polygons und $Z = X + iY$ einen Punkt der Halbebene $Y > 0$, sind ferner $a_1, a_2, \ldots a_n$ die Ecken des Polygons, α_i die zugehörigen Winkel, A_i die entsprechenden Punkte der Achse $Y = 0$, endlich z_0 und Z_0 Konstante, so hat man:

$$(1) \quad z - z_0 = C \int_{Z_0}^{Z} (Z - A_1)^{\lambda_1 - 1} (Z - A_2)^{\lambda_2 - 1} \ldots (Z - A_n)^{\lambda_n - 1} \, dZ,$$

worin $\lambda_i \pi = \alpha_i$ gesetzt ist. Der Zusammenhang zwischen den Größen a_i und A_i wird durch die Gleichungen

$$(2) \qquad a_{k+1} - a_k = C \int_{A_k}^{A_{k+1}} (Z - A_1)^{\lambda_1 - 1} \ldots (Z - A_n)^{\lambda_n - 1} \, dZ$$

vermittelt; C bedeutet eine Konstante. Über die Möglichkeit dieser Konstantenbestimmung vgl. Schwarz, Zur Theorie der Abbildung, Gesammelte Abhandlungen, Bd. 2.

[1] Die hierauf beruhende Herleitung Pochhammers für die Schwarzsche Differentialgleichung dritter Ordnung (Crelles Journal Bd. 76, 1873) habe ich in meinen Vorlesungen immer gern zur Einführung in die Theorie der konformen Abbildung der Kreisbogendreiecke zugrunde gelegt.

Die Gleichung (1) kann man in folgender Form schreiben

$$\log \frac{dz}{dZ} = \frac{1}{\pi} \sum_i (\alpha_1 - \pi) \log (Z - A_i) + \log C, \tag{3}$$

wenn wieder $\alpha_i = \lambda_i \pi$ die Winkel bezeichnen. Läßt man jetzt die Seiten des Polygons unendlich klein werden und die Winkel sich mehr und mehr strecken, so entsteht aus dem Polygon eine stetig gekrümmte Kurve; in der rechts stehenden Summe werden die Differenzen $\alpha_i - \pi$ unendlich klein, und aus der Summe wird ein Integral. Der Winkel α_i ist unendlich wenig von π verschieden, $\alpha_i - \pi$ also negativ. Es bezeichnet $d\varepsilon$ den Kontingenzwinkel, d. i. den Zuwachs des Winkels der Tangente mit der Achse; dieser wächst bei positivem Umlauf über den Rand des Ovals von $\frac{\pi}{2}$ bis $\frac{\pi}{2} + 2\pi$, so daß $d\varepsilon$ zu Anfang positiv ist, dann für $\varepsilon > \pi$ aber negativ wird. Da $\alpha_i - \pi$ negativ ist, so ist $\alpha_i - \pi = -d\varepsilon$ zu setzen, und durch den Grenzübergang erhält man

$$\log \frac{dz}{dZ} = \frac{-1}{\pi} \int \log (T - Z)\, d\varepsilon + C', \tag{4}$$

wo C' eine Constante ist, und wo T den Punkt bezeichnet, der aus den Punkten A_i der Achse $Y = 0$ hervorgeht, der also dem Punkte $\xi + i\eta$ der Randkurve entspricht. Diesen Punkt kann man als Funktion $\varphi(\varepsilon)$ der Größe ε auffassen, durch die andererseits der entsprechende Punkt der Randkurve bestimmt wird. Stellt man ε als Funktion von $\xi + i\eta$ dar, und $\xi + i\eta$ als Funktion von T, so wird das Integral auf der rechten Seite von (4) in ein Integral über die Begrenzung der Halbebene $Y > 0$ verwandelt, d. h. in ein Integral nach T von $T = -\infty$ bis $T = +\infty$. Die konforme Abbildung geschieht demnach durch die Gleichung

$$\log \frac{dz}{dZ} = \frac{-1}{\pi} \int \log \big(\varphi(\varepsilon) - Z\big)\, d\varepsilon + C', \tag{5}$$

falls die Funktion $\varphi(\varepsilon)$ entsprechend bestimmt wird. Die nochmalige Differentiation von (5) ergibt:

$$\frac{d}{dZ} \log \frac{dz}{dZ} = \frac{+1}{\pi} \int \frac{d\varepsilon}{\varphi(\varepsilon) - Z}, \tag{6}$$

wo nun das Integral über den Rand des gegebenen Flächenstückes in positiver Richtung zu erstrecken ist.

Um $\varphi(\varepsilon)$ zu bestimmen, gehe ich von dem Cauchy'schen Integrale aus, nämlich:

$$\frac{d}{dZ}\log\frac{dz}{dZ}=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{d\log\frac{d\zeta}{dT}}{dT}\cdot\frac{dT}{T-Z}, \tag{7}$$

wo wieder $\zeta=\xi+i\eta$ einen Punkt auf dem Rande des abzubildenden Flächenstückes bezeichnet und T den entsprechenden Punkt des Randes der Halbebene, d. h. der Achse $Y=0$. Es ist also T eine Funktion von ζ, und wenn ξ, η als Funktionen eines reellen Parameters t gedacht werden, so ist T eine Funktion von t, die wir $\varphi(t)$ nennen. Setzt man $T=\varphi(t)$, so ist bekanntlich:

$$\frac{d}{dT}\log\frac{d\zeta}{dT}=\frac{1}{\varphi'(t)}\left(\frac{d\log\frac{d\zeta}{dt}}{dt}-\frac{\varphi''(t)}{\varphi'(t)}\right). \tag{8}$$

Um die Gleichung (7) mit (6) in Übereinstimmung zu bringen, muß man $t=\varepsilon$ nehmen, wo $d\varepsilon$ wieder den Kontingenzwinkel bezeichnet; dann ergibt sich (da $dT=\varphi'(\varepsilon)d\varepsilon$ wird):

$$\frac{d\log\frac{d\zeta}{d\varepsilon}}{d\varepsilon}-\frac{\varphi''(\varepsilon)}{\varphi'(\varepsilon)}=+2i=+2\sqrt{-1}.$$

Nach § 1 ist das erste Glied der linken Seite gleich $\dfrac{d\log\frac{ds}{d\varepsilon}}{d\varepsilon}+i$;

für die Funktion $\varphi(\varepsilon)$ findet man somit die Differentialgleichung:

$$\frac{\varphi''(\varepsilon)}{\varphi'(\varepsilon)}=\frac{d\log\frac{ds}{d\varepsilon}}{d\varepsilon}-i$$

$$=\frac{d\log\frac{d(\xi-i\eta)}{d\varepsilon}}{d\varepsilon}\quad\text{nach (2) § 1.}$$

Eine partikuläre Lösung ist also durch den Wert $\varphi(\varepsilon)=\xi-i\eta$ gegeben, wo $\xi-i\eta$ durch die Gleichung der Randkurve als Funktion von $\zeta=\xi+i\eta$ bekannt ist. Sind α und β Konstante, so ist die allgemeine Lösung

$$\varphi(\varepsilon)=\alpha(\xi-i\eta)+\beta=\alpha\int\frac{ds}{d\varepsilon}e^{-i\varepsilon}d\varepsilon+\beta. \tag{9}$$

Setzt man den Wert (9) von $\varphi(\varepsilon)$ in das Integral der rechten Seite von (6) ein, so ist die konforme Abbildung der Halbebene auf das gegebene Flächenstück geleistet, und zwar auf Quadraturen zurückgeführt. Es ist:

$$(10)\qquad \frac{d}{dZ}\log\frac{dz}{dZ} = \frac{1}{\pi}\int\frac{d\varepsilon}{\alpha(\xi - i\eta) + \beta - Z}.$$

Hierbei kann der Rand aus verschiedenen Kurvenstücken bestehen, für die je eine andere Gleichung zwischen $\xi + i\eta$ und $\xi - i\eta$ besteht. Für jedes solche Kurvenstück hat dann die Funktion $\varphi(\varepsilon)$ einen anderen Wert, der von den Konstanten abhängen wird, die in sämtlichen Teilstücken der Begrenzung vorkommen; und darin liegt eine Schwierigkeit. Es müssen die Kurvenbögen sich stetig (d. h. ohne Winkelbildung) aneinander anschließen; vgl. jedoch unten § 6.

Auf das Verhalten des Punktes $Z = \infty$ komme ich sofort in § 3 zurück.

§ 3. Der Kreis.

Der Mittelpunkt des Kreises liege im Anfangspunkte, der Radius sei r; seine Gleichung ist dann

$$(1)\qquad (\xi + i\eta)(\xi - i\eta) = r^2.$$

Bezeichnet ω den Winkel des Radiusvektors gegen die X-Achse, so ist $\varepsilon = \omega + \frac{1}{2}\pi$ und

$$(2)\qquad \zeta = \xi + i\eta = re^{i\omega} = -ire^{i\varepsilon}.$$

Die Gleichung (10) § 2 gibt also

$$(3)\qquad \frac{d}{dZ}\log\frac{dz}{dZ} = \frac{1}{\pi}\int\frac{d\varepsilon}{\alpha ire^{-i\varepsilon} + (\beta - Z)}$$

$$= \frac{-i}{\pi(\beta - Z)}\left[i\varepsilon + \log(\beta - Z + \alpha ire^{-i\varepsilon})\right].$$

Bei der Integration läuft ε von $\frac{\pi}{2}$ über π, $\frac{3}{2}\pi$, 2π bis $\frac{1}{2}\pi + 2\pi$.

Es wird also

(4) $$\frac{d}{dZ}\log\frac{dz}{dZ} = \frac{-2}{Z-\beta}, \text{ und durch Integration } \frac{dz}{dZ} = \frac{C}{(Z-\beta)^2},$$

wenn C eine Konstante bedeutet. Nimmt man z. B. $\beta = -i$, $C = 2i$, so erhält man die bekannte Relation

(5) $$z = \frac{Z-i}{Z+i}.$$

Die Konstanten α, β müssen so bestimmt werden, daß das Argument des Logarithmus in (3) im Innern der Halbebene $Y > 0$ keinen Nullpunkt hat. Setzt man $\beta = \beta_1 + i\beta_2$, $Z = X + iY$, so wäre für einen solchen Nullpunkt:

(6) $$(X-\beta_1)^2 + (Y-\beta_2)^2 = r^2\,\alpha'^2,$$

wo α' den absoluten Betrag von α bezeichnet. Auf diesem Kreise liegen alle Punkte Z, für die das Argument des Logarithmus verschwindet. Man braucht also nur β_2 negativ und $\alpha' <$ abs β_2 zu wählen, um zu erreichen daß der ganze Kreis (6) in der Halbebene $Y < 0$ liegt.

Es bleibt zu untersuchen, ob der Punkt $Z = \infty$ störend einwirken kann. Durch die Transformation $Z = T^{-1}$ geht er in den Punkt $T = 0$ der Achse $Y = 0$ über, der nicht weiter ausgezeichnet ist. Auf der rechten Seite von (3) oder von (10) § 2 hat man

$$\frac{T\,d\varepsilon}{\varphi(\varepsilon)\,T-1}\quad\frac{dT}{T^2}.$$

Die Integration liefert also ein Glied mit $\log T$ für den Ausdruck $\log\frac{dz}{dZ}$, das beim Übergange von den Logarithmen zu den Zahlen einen rationalen Beitrag liefert. Der Nenner $\varphi(\varepsilon)\,T-1$ hat nach Obigem keinen Nullpunkt im Innern der Halbebene $Y > 0$ und (da $T = 0$ ein ganz beliebiger Punkt des Randes sein kann) auch nicht auf dem Rande. Der Punkt $Z = \infty$ verursacht demnach keine Störung.

Statt des Parameters ε kann man den Randpunkt ζ als Variable einführen, um das Integral (3) über die Randkurve zu führen. Nach (2) ist beim Kreise:

$$d\zeta = re^{i\varepsilon}\, d\varepsilon, \qquad \text{also } d\varepsilon = \frac{d\zeta}{re^{i\varepsilon}} = \frac{d\zeta}{i\zeta}.$$

Unter Benutzung von (1) wird das Integral (3)

$$(7) \quad \frac{1}{\pi}\int \frac{d\zeta}{\zeta\,[\alpha(\xi - i\eta) + (\beta - Z)]} = \frac{1}{\pi i}\int \frac{d\zeta}{[\alpha r^2 + (\beta - Z)\zeta]}$$
$$= \frac{1}{\pi i(\beta - Z)} \log\,[\alpha r^2 + (\beta - Z)\,\zeta].$$

Ersetzt man $\xi - i\eta$ durch $\frac{1}{\xi + i\eta} = \frac{1}{\zeta}$, so muß der Nullpunkt des Ausdruckes $\alpha r^2 + (\beta - Z)\,\zeta$, der mit ζ_0 bezeichnet sei, sich außerhalb des Kreises (1) befinden. Das Integral wird gleich

$$\frac{1}{\pi i(Z - \beta)}\,[\log(\zeta - \zeta_0) + \log(\beta - Z)],$$

und wenn das Integral über den Rand geführt wird, gleich dem in (2) angegebenen Werte.

Um für das Beispiel der Gleichung (8) die Funktion $\varphi(\varepsilon)$ zu bestimmen, sei

$$x + iy = \frac{X + iY - i}{X + iY + i}, \qquad \text{also } x^2 + y^2 = \frac{X^2 + (Y - 1)^2}{X^2 + (Y + 1)^2} = 1$$
$$\text{für } Y = 0$$

und

$$\frac{y}{x} = \frac{-2X}{X^2 + Y^2 - 1} = \frac{-2X}{X^2 - 1} \quad \text{für } Y = 0.$$

Hieraus

$$X = -\frac{x}{y} \pm \sqrt{1 + \frac{x^2}{y^2}},$$

oder wenn man $\frac{y}{x} = \operatorname{tg}\varphi$ setzt:

$$X = \frac{\cos\varphi \pm 1}{\sin\varphi} = \operatorname{tg}\frac{\varphi}{2} \quad \text{oder} \quad \operatorname{cotg}\frac{\varphi}{2}.$$

Da $\varepsilon = \varphi + \frac{\pi}{2}$ ist, so wird $\varphi(\varepsilon) = \frac{t-1}{t+1}$ für $t = \operatorname{tg}\frac{\varphi}{2}$. Überträgt man diesen Wert mittels (5) auf den Rand des Kreises, so wird der zugehörige Wert von z gleich

$$\frac{\operatorname{tg}\frac{\varphi}{2} - i}{\operatorname{tg}\frac{\varphi}{2} + i} = \left(\cos\frac{\varphi}{2} - i\sin\frac{\varphi}{2}\right)^2 = \cos\varphi - i\sin\varphi = x - iy,$$

wie es nach dem allgemeinen Resultate von § 2 sein muß. Der Wert von Z auf dem Rande des Kreises ist reell, und zwar gleich $\operatorname{tg}\frac{\varphi}{2}$; der Wert von $\varphi(\varepsilon)$ aber ist eine komplexe Zahl $(x - iy)$.

§ 4. Die Ellipse.

Eine Ellipse mit den Halbachsen a, b sei durch die Gleichungen

(1) $$\xi = a\cos u, \quad \eta = b\sin u$$

dargestellt, wo u die exzentrische Anomalie bedeutet. Setzt man

(2) $$\zeta = \xi + i\eta, \quad \zeta_1 = \xi - i\eta,$$

so ist die Gleichung der Ellipse

(3) $$b^2(\zeta + \zeta_1)^2 - a^2(\zeta - \zeta_1)^2 = 4a^2b^2.$$

Bedeutet ω den Winkel des vom Anfangspunkte auf die Tangente des Punktes ξ, η gefällten Lotes gegen die ξ-Axe, so ist

$$\cos\omega = \frac{\xi}{a^2}\frac{1}{\sqrt{M}}, \quad \sin\omega = \frac{\eta}{b^2}\frac{1}{\sqrt{M}}, \quad M = \frac{\xi^2}{a^4} + \frac{\eta^2}{b^4},$$

ferner:

$$\frac{\eta}{\xi} = \frac{b}{a}\operatorname{tg} u = \frac{b^2}{a^2}\operatorname{tg}\omega, \quad \operatorname{tg} u = \frac{b}{a}\operatorname{tg}\omega = -\frac{b}{a}\operatorname{cotg}\varepsilon,$$

wenn ε den Winkel der Tangente gegen die x-Achse, also $d\varepsilon$ den Kontingenzwinkel bedeutet. Durch ε ausgedrückt, ergibt sich:

$$\xi = \frac{-a^2 \sin \varepsilon}{\sqrt{a^2 \sin^2 \varepsilon + b^2 \cos^2 \varepsilon}}, \qquad \eta = \frac{-b^2 \cos \varepsilon}{\sqrt{a^2 \sin^2 \varepsilon + b^2 \cos^2 \varepsilon}},$$

(4)

$$\zeta = \xi + i\eta = -\frac{a^2 \operatorname{tg} \varepsilon + i b^2}{\sqrt{a^2 \operatorname{tg}^2 \varepsilon + b^2}},$$

und hieraus

$$\operatorname{tg} \varepsilon = \frac{i b^2}{\zeta^2 - a^2} \pm \frac{i b \zeta \sqrt{\xi^2 - e^2}}{a(\xi^2 - a^2)}, \quad \text{wo } e^2 = a^2 - b^2.$$

Nach (9) § 2 wird

$$(5) \qquad \frac{d}{dZ} \log \frac{dz}{dZ} = \int \frac{\sqrt{a^2 \operatorname{tg}^2 \varepsilon + b^2} \cdot d\varepsilon}{(Z - \beta)\sqrt{a^2 \operatorname{tg}^2 \varepsilon + b^2} + \alpha(a^2 \operatorname{tg} \varepsilon - i b^2)}$$

das Integral über den Rand der Ellipse geführt von $\varepsilon = \frac{\pi}{2}$ bis $\varepsilon = \frac{\pi}{2} + 2\pi$.

Zur Auswertung des Integrals setzen wir:

$$U = \sqrt{a^2 t^2 + b^2}, \quad \text{wo } t = \operatorname{tg} \varepsilon.$$

Dann wird (e = Exzentrizität):

$$t = \frac{1}{a}\sqrt{U^2 - b^2}, \quad 1 + t^2 = \frac{U^2 + e^2}{a^2}$$

(6)

$$d\varepsilon = \frac{dt}{1 + t^2} = \frac{a}{U^2 + e^2} \cdot \frac{U\,dU}{\sqrt{U^2 - b^2}}.$$

Unter dem Integralzeichen steht also der Ausdruck:

$$\frac{1}{a(U^2 + e^2)\left[(Z - \beta) a U + \alpha a^2 \sqrt{U^2 - b^2} - i \alpha a b^2\right]} \frac{U^2\,dU}{\sqrt{U^2 - b^2}}.$$

Multipliziert man in Zähler und Nenner mit dem Ausdrucke, der aus der Klammer des Nenners entsteht, wenn man das Vorzeichen der Quadratwurzel ändert, so erhält man die Summe zweier Differentiale dI_1 und dI_2, deren eines rational ist, nämlich

$$dI_1 = \frac{-i\alpha b^2 \cdot U^2\,dU}{(U^2 + e^2)(pU^2 + qU + r)},$$

wo
$$p = a^2 (Z - \beta)^2 - \alpha^2 a^2 b^4 - \alpha^2 a^4,$$
$$q = -2 i \alpha a^2 b^2 (Z - \beta), \qquad r = -\alpha^2 a^2 b^2 e^2.$$

Das irrationale Differential ist

$$d I_2 = \frac{(Z - \beta) U - i \alpha b^2}{(U^2 + e^2)(p U^2 + q U + r)} \frac{U^3 \, dU}{\sqrt{U^2 - b^2}}.$$

Zerlegt man die in $d I_1$ enthaltene rationale Funktion in Partialbrüche, so handelt es sich um Integrale der Form

$$\text{(6a)} \quad \int \frac{dU}{U - U_0} = \log (U - U_0) = \log (\sqrt{a^2 t^2 + b^2} - U_0),$$

wo U_0 eine der vier Wurzeln des Nenners bezeichnet. Bei der Integration läuft der Punkt ζ von $\zeta = a$ über $\zeta = bi$ nach $\zeta = -a$, und entsprechend ε von $\frac{\pi}{2}$ über o nach $-\frac{\pi}{2}$ und tg ε von $+\infty$ über o zu $-\infty$. Hier springt tg ε von $-\infty$ auf $+\infty$, um dann auf der andern Hälfte der Ellipse über o bei $\zeta = a$ zu $-\infty$ zurückzukehren, wo wieder der Sprung von $-\infty$ auf $+\infty$ stattfindet. Schreibt man t' für $+\infty$ und t'' für $-\infty$, so ist

$$\int\limits_{t=\infty}^{t=-\infty} \frac{dU}{U - U_0} = \log \frac{\sqrt{a^2 t'^2 + b^2}}{\sqrt{a^2 t''^2 + b^2}} = 0 \qquad \text{für } t' = -t'' = \infty.$$

Das Integral I_1 gibt daher keinen Beitrag zur Auswertung des Integrals (5). Die vier Wurzeln des Nenners von $d I_1$ sind

$$i e, \quad -i e, \quad U_1, \quad U_2, \quad \text{wo}$$

$$\left.\begin{matrix} U_1 \\ U_2 \end{matrix}\right\} = \frac{\alpha i b^2 (Z - \beta)}{(Z - \beta)^2 - \alpha^2 e^2} \pm \frac{\sqrt{\alpha^2 b^2 e^2 [(Z - \beta)^2 - a^2] - \alpha^2 b^4 (Z - \beta)^2}}{(Z - \beta)^2 - \alpha^2 e^2}.$$

Für den Kreis ($a = b$, $e = 0$) wird $U_2 = 0$. Die Forderung des Verschwindens der Diskriminante von $p U^2 + q U + r$ lehrt, daß durch passende Wahl von α und β stets erreicht werden kann, daß der entsprechende Wert von Z in der Halbebene $Y < 0$ liege.

Entwickelt man auch den rationalen Teil von dI_2 in Partialbrüche, so kommt es an auf Integrale der Form

$$\int \frac{dU}{(U-U_0\sqrt{U^2-b^2}} =$$

$$-\frac{1}{\sqrt{U_0^2-b^2}} \log \left[\frac{U U_0 - b^2 + \sqrt{U_0^2-b^2}\sqrt{U^2-b^2}}{U-U_0}\right].$$

Unter Benutzung der Gleichung (7) wird das Argument des Logarithmus

$$\frac{U_0\sqrt{a^2t^2+b^2}-b^2+\sqrt{U_0^2-b^2}-at}{\sqrt{a^2t^2+b^2}-U_0} = \frac{U_0+\sqrt{U_0^2-b^2}-\dfrac{at}{\sqrt{a^2t^2+b^2}}}{1}$$

für $t = \infty$.

Haben t' und t'' die frühere Bedeutung, so ist $\sqrt{a^2t'^2+b^2} = \sqrt{a^2t''^2+b^2}$, aber $t' = -t''$; es wird daher

$$\int_{t=\infty}^{t=-\infty} \frac{dU}{(U-U_0)\sqrt{U^2-b^2}} = -\frac{1}{\sqrt{U_0^2-b^2}} \log \frac{U_0 - a\sqrt{U_0^2-b^2}}{U_0 + a\sqrt{U_0^2-b^2}}$$

$$= -\frac{1}{\sqrt{U_0^2-b^2}} \log \frac{\sqrt{a^2t_0^2+b^2}-at_0}{\sqrt{a^2t_0^2+b^2}+at_0}$$

$$= -\frac{2}{at_0} \log \frac{\sqrt{a^2t_0^2+b^2}-at_0}{b},$$

wenn t_0 den zur Wurzel U_0 gehörigen Wert von t bedeutet, so daß $U_0^2 = a^2t_0^2+b^2$. Ist z. B. $U_0 = i$, oder $U_0 = -i$, so wird das Integral

$$\frac{2i}{a} \log \frac{i\sqrt{(a^2-b^2)}-ai}{b} \quad \text{oder} \quad \frac{-2i}{a} \log \frac{i\sqrt{a^2-b^2}+ai}{b}.$$

Das Integral über die ganze Ellipse ist das doppelte des über dem ersten und zweiten Quadranten der Ellipse genommenen Integrals.

Das Integral der rechten Seite von Gleichung (10), § 2 wird also für die Ellipse, indem es sich, entsprechend den vier Gliedern der obigen Partialbruchzerlegung, als Summe von vier Integralen darstellt:

$$
(8)\qquad \begin{aligned}
&\frac{1}{ap\pi}\Bigg[M_1\frac{2i}{a}\log\frac{i(e-a)}{b}-M_2\frac{2i}{a}\log\frac{i(e+a)}{b}\\
&\quad -M_3\frac{1}{\sqrt{U_1^2-b^2}}\log\frac{U_1-a\sqrt{U_1^2-b^2}}{U_1+a\sqrt{U_1^2-b^2}}\\
&\quad -M_4\frac{1}{\sqrt{U_2^2-b^2}}\log\frac{U_2-a\sqrt{U_2^2-b^2}}{U_2+a\sqrt{U_2^2-b^2}}\Bigg],
\end{aligned}
$$

wo e, U_1, U_2 die frühere Bedeutung haben; und hier ist:

$$
(9)\qquad \begin{aligned}
M_1 &= i\,\frac{(Z-\beta)e+\alpha b^2}{2\,ie(ie-U_1)(ie-U_2)},\\
M_2 &= i\,\frac{(Z-\beta)e-\alpha b^2}{(-2\,ie)(-ie-U_1)(-ie-U_2)},\\
M_3 &= \frac{[(Z-\beta)U_1-i\alpha b^2]\,U_1^2}{(U_1-ie)(U_1+ie)(U_1-U_2)},\\
M_4 &= \frac{[(Z-\beta)U_2-i\alpha b^2]\,U_2^2}{(U_2-ie)(U_2+ie)(U_2-U_1)}.
\end{aligned}
$$

Nach Gleichung (5) muß der Ausdruck (8) nach Z integriert werden, um $\log\frac{dz}{dZ}$ zu finden. Die Variable Z kommt in den Ausdrücken für U_1, U_2 teils rational vor, teils irrational in einem quadratischen Ausdrucke unter einer Quadratwurzel. Die Integrale der beiden ersten Glieder auf der rechten Seite von (8) können elementar vollkommen ausgewertet werden.

Im dritten und vierten Gliede von (8) kommt in den Argumenten der Logarithmen neben rationalen Ausdrücken in $Z-\beta$ auch die Irrationalität $\sqrt{T}$ vor, wenn mit T die in U_1 und U_2 unter den Wurzelzeichen stehende quadratische Funktion bezeichnet wird. Es kommt aber $\sqrt{T}$ in $\sqrt{U_1^2-b^2}$ und $\sqrt{U_2^2-b^2}$ selbst noch unter der Quadratwurzel vor, und zwar nicht nur im Argument der Logarithmen, sondern auch im Faktor vor den Logarithmen. Die Integration des dritten und vierten Gliedes kann daher nicht auf elementar bekannte Funktionen zurückgeführt werden.

Eine nochmalige Integration nach Z liefert endlich die konforme Abbildung des Innern der Ellipse auf die Halbebene $Y > 0$.

In § 3 wurde an dem Beispiele des Kreises gezeigt, welche Bedingungen an die Konstanten α und β zu stellen sind. Entsprechendes gilt bei beliebiger Randkurve: Es darf für keinen Punkt Z der Halbebene der Ausdruck $Z - \beta - \alpha\,(\xi - i\eta)$ verschwinden, wenn $\xi + i\eta\ (= \zeta)$ einen Punkt des Randes bezeichnet. Es sei $r^2 = \xi^2 + \eta^2$, also r die Entfernung des Punktes $\xi + i\eta$ vom (übrigens willkürlichen und durch einen beliebigen anderen Punkt zu ersetzenden) Anfangspunkte, so darf für keinen Punkt $Z = X + iY$ die Gleichung

$$(X - \beta_1)^2 + (Y - \beta_2)^2 = r^2\alpha'^2 \tag{10}$$

bestehen, wo α', β_1, β_2 die frühere Bedeutung haben. Dies ist die Gleichung eines Kreises, der wandert, wenn der Punkt ζ den Rand durchläuft. Dabei ist r immer endlich, hat also einen größten Wert; sei r_0 dieser größte Wert, so liegen alle Kreise (10) mit demselben Mittelpunkte $\beta_1 + i\beta_2$ innerhalb des dem Wert $r = r_0$ entsprechenden Kreises. Wird also β_2 negativ und absolut kleiner als r_0 genommen, so bleiben alle diese Kreise innerhalb der Halbebene $Y < 0$, und keiner erreicht die Achse $Y = 0$. Etwaige Nullpunkte des Ausdruckes $Z - \beta - \alpha\,(\xi - i\eta)$ liegen sonach auch in der Halbebene $Y < 0$ und stören die Konformität der Abbildung nicht.

Die Möglichkeit passender Wahl von β_2 hängt wesentlich von der Lage des Punktes $\xi = 0$, $\eta = 0$ ab. Ändert man diese Lage, so kann der Punkt β in Richtung senkrecht zur X-Achse beliebig verschoben werden.

Besteht der Rand aus mehreren verschiedenen Kurvenstücken, so kann für jedes Teilstück ein Punkt β bestimmt werden und sodann ein für alle Teilstücke gemeinsam gültiger Punkt β als Mittelpunkt eines ganz in der Halbebene $Y < 0$ gelegenen Kreises.

Es ist also nicht etwa $\beta + \alpha(\xi - i\eta)$ der Wert, welchen der Abbildungsfunktion Z auf dem Rande des gegebenen Ovals annimmt, sondern der Wert, der aus der Funktion $\varphi(\varepsilon)$ hervorgeht, wenn man letzteren vermöge der schon bekannten Abbildungsfunktion auf den Rand der Ellipse überträgt. Man kann also nicht etwa die Funktion Z aus dem Cauchyschen Integrale durch ihren Wert $\beta + \alpha(\xi - i\eta)$ auf dem Rande konstruieren wollen.

§ 5. Sonstige Abbildungen der Ellipse.

Das auf die Ellipse bezügliche Resultat steht in Widerspruch zu der von H. A. Schwarz gegebenen Formel für diese Abbildung. Dieselbe lautet:

$$Z = \sin \operatorname{am}\left(\frac{2K}{\pi} \arcsin z\right), \tag{1}$$

wenn Z einen Punkt der Bildkreisfläche, z einen Punkt der Ellipsenfläche bezeichnet. Es ist leicht zu sehen, daß die Funktion Z nicht eindeutig von z abhängen kann, wenn K eine beliebige Konstante bedeutet. Es ist zu untersuchen, ob sich dies ändert, wenn K das ganze elliptische Integral erster Gattung in üblicher Weise bezeichnet, wie es Schwarz voraussetzt.[1]

Zunächst ist die Abbildung der Ellipse auf ein Rechteck mittels der Funktion $\arcsin z$ zu studieren. Schwarz denkt sich dabei die Ellipse längs zweier Stücke der großen Achse aufgeschnitten, so daß die beiden Ufer dieser Schnitte zusammen mit der Ellipse den Rand des zunächst zu betrachtenden Flächenstückes bilden. Die Ellipse habe die beiden Halbachsen a und b, die Exzentrizität sei gleich 1, und die Brennpunkte haben die Koordinaten $x = \pm 1$ und $y = 0$. Die Schnitte gehen von jedem dieser Brennpunkte nach dem nächsten Scheitel, d. h. von $+1$ nach $+a$ und von -1 nach $-a$. Zur leichteren Übersicht stellen wir im folgenden die einander entsprechenden Teile der beiden Flächen einander gegenüber.

[1] Vgl. Schwarz: Über einige Abbildungsaufgaben, Crelles Journal Bd. 70, 1869, oder Annali di matematica, Serie 2 Bd. 3; Gesammelte Abhandlungen Bd. 2 S. 77 u. 102.

$z = x + iy$ in der Ellipse	$\arc \sin z = u + iv$ im Rechteck
1. $0 < x < 1,\ y = 0$	$0 < u < \frac{\pi}{2},\ v = 0$
2. $1 < x < a,\ y = 0$, oberes Ufer	$u = \frac{\pi}{2},\ 0 < v < v_0$
3. $x = a,\ y = 0$	$u = \frac{\pi}{2},\ \frac{\pi}{2} + i\,v_0 = \arc \sin a$
4. $a > x > -a$, y bestimmt durch $\frac{x^2}{\cos^2(iv_0)} - \frac{y^2}{\sin^2(iv_0)} = 1$ Ellipse, in dem $x + iy = \sin(u + iv_0)$	$\frac{\pi}{2} > u > -\frac{\pi}{2},\ v = v_0$ Gerade parallel zu $v = 0$
5. $x = -a,\ y = 0$	$u = -\frac{\pi}{2},\ v = v_0$
6. $-a < x < -1,\ y = 0$	$u = -\frac{\pi}{2},\ v_0 > v > 0$
7. $x = -1,\ y = 0$ und nach Umgang um $x = -1$:	$u = -\frac{\pi}{2},\ v = 0$
8. $-1 > x > -a,\ y = 0$	$-\frac{\pi}{2} < u < -1,\ v = 0$
9. $x = -a,\ y = 0$	$u = -\frac{\pi}{2},\ v = 0$
10. $-a < x < +a$ untere Hälfte der Ellipse	$-\frac{\pi}{2} < u < \frac{\pi}{2},\ v = -v_0$ Parallele zur Linie $v = 0$
11. $a > x > 1$, unteres Ufer	$u = \frac{\pi}{2},\ -v_0 < v < 0$
12. $1 > x > 0,\ y = 0$	$0 < u < \frac{\pi}{2}, v = 0.$

Hiermit ist der ganze Umfang der Ellipse bzw. des Rechteckes durchlaufen, einschließlich der beiden Ufer an jedem der beiden Schnitte; die unter (1) und (12) vermerkten Strecken gehören aber nicht zum Umfange, sie dienen nur dazu, einen Anfangspunkt festzulegen.

Die Abbildung auf eine Kreisfläche, die den näher zu bestimmenden Radius ρ haben möge, geschieht in der Weise, daß aus der Ebene $u + iv$ das Rechteck auf den Kreis der Ebene $Z = X + iY$ übertragen wird, der ebenso wie die Ellipse an zwei Stellen eines Durchmessers aufgeschnitten ist, und zwar an der Strecke $+1 < X < \rho$, $Y = 0$ von $X = 1$ bis $X = \rho$ und an der Strecke $-\rho < X < -1$ von $X = -1$ bis $X = -\rho$. Der Umfang der Ellipse geht dabei in den Umfang des Kreises über; sonst kann die vorstehend gegebene Einteilung des Umfanges der ersteren und des Rechtecks unverändert benutzt werden. Man hat z. B.

$$1.\ 0 < X < 1,\ Y = 0 \,|\ 2.\ 1 < X < \rho,\ Y = 0 \,|\ 3.\ X = \rho, Y = 0 \,|$$
$$4.\ \rho > X > -\rho,\ \text{Kreis } X^2 + Y^2 = \rho^2 \ |,$$

wo nun ρ sich in folgender Weise bestimmt. Zur Abkürzung werde

$$u' = \frac{2K}{\pi} u, \qquad v' = \frac{2K}{\pi} v$$

gesetzt, und

$$\sigma = \sin \operatorname{am} u', \tau = \sin \operatorname{am} (iv_0).$$

Dann ist nach dem Additionstheoreme

$$\rho^2 = X^2 + Y^2 = \sin \operatorname{am} (u' + v').\ \sin \operatorname{am} (u' - v') = \frac{\sigma^2 - \tau^2}{1 - k^2 \sigma^2 \tau^2}.$$

Auf dem Kreise ist $-\frac{\pi}{2} < u < +\frac{\pi}{2}$, aber $v = v_0$ konstant. Vorstehende Gleichung ergibt also

$$\rho^2 (1 - k^2 \sigma^2 \tau^2) = \sigma^2 - \tau^2$$

für eine stetige Folge von Werten u' und $v_1' = v_0'$ konstant. Es wird daher

$$\tau_0^2 = -\rho^2,\ 1 - \rho^4 k^2 = 0$$

oder $\rho = \frac{1}{\sqrt{k}} = i\tau_0$, wo $i\tau_0$ reell ist. Damit ist ρ in Übereinstimmung mit Schwarz gefunden. Bekanntlich ist $\frac{1}{k} = \sin \operatorname{am} (K + iK')$. Dadurch ist v_0 auf das ganze Integral K' zurückgeführt und letzteres auf die Achse a der Ellipse durch die Bemerkung in Nr. 3 der oben gemachten Gegenüberstellung.

Weiter hat man: 5. $X = -\rho$, $Y = 0$ | 6. $-\rho < X < -1$, $Y = 0$ usf. Die beiden Ufer des Schnittes auf der positiven Halbachse der Ellipse sind in dem Rechteck getrennt in die Linien $u = \frac{\pi}{2}$, $0 < v < v_0$ und $u = \frac{\pi}{2}$, $-v_0 < v < 0$. Durch die Abbildung auf den Kreis werden sie wieder vereinigt, denn es ist an dem einen Ufer:

$$(13) \quad \sin\operatorname{am} \frac{2K}{\pi}\left(\frac{\pi}{2} + iv\right) = \sin\operatorname{am}(K + iv') = \frac{1}{\Delta\operatorname{am}(v', k')}$$

und an dem andern Ufer

$$(13\text{a}) \quad \sin\operatorname{am} \frac{2K}{\pi}\left(\frac{\pi}{2} - iv\right) = \sin\operatorname{am}(K - iv') = \frac{1}{\Delta\operatorname{am}(-v', k')}.$$

Da $\Delta\operatorname{am}$ eine gerade Funktion ist, sind beide Ausdrücke einander gleich. Analoges gilt für den anderen Schnitt der Ellipse. Es ist daher die durch (1) definierte Funktion Z innerhalb der ganzen Ellipsenfläche eine eindeutige Funktion von z.

Um aber die konforme Abbildung zu vermitteln, muß auch $\frac{dZ}{dz}$ für das Innere der Ellipse überall eindeutig sein. Nun ist Z durch Einschaltung der Funktion $\arcsin z$ zur Funktion von z geworden. Wenn zwischen zwei Funktionen f und F die Relation:

$$f(z) = F(\varphi(z))$$

besteht, so folgt durch Differentiation

$$\frac{df}{dz} = \frac{dF}{d\varphi} \cdot \frac{d\varphi}{dz}.$$

Die linke Seite ist also nur dann eine eindeutige Funktion von z,

wenn entweder sowohl F eindeutig von φ als φ eindeutig von z abhängt oder die Mehrdeutigkeit von F aufgehoben wird durch die Mehrdeutigkeit von φ,

und $\frac{df}{dz}$ ist nicht eindeutig, wenn einer der beiden rechtsstehenden Faktoren mehrdeutig, der andere eindeutig von z abhängt.

Das letztere tritt bei der Funktion Z ein, denn es hat arc sin z $(=\varphi(z))$ auf dem einen Ufer der angebrachten Schnitte zwar einen anderen Wert als auf dem anderen, aber durch das Einschalten der Funktion sin am wird dieser Unterschied aufgehoben.

An diesem Schnitte ist nämlich nach (13) und (13a):

$$Z = \sin \operatorname{am} (K + iv') = \sin \operatorname{am} (K - iv') = \frac{1}{\Delta \operatorname{am} (v', k')},$$

wo $v' = \frac{2K}{\pi} v$, und

$$(14) \quad \frac{dZ}{dz} = \frac{dZ}{dv'} \cdot \frac{dv'}{dz} \text{ und } \frac{dZ}{dv'} = i \cos \operatorname{am} (K + iv') \Delta \operatorname{am} (K + iv').$$

Auf der rechten Seite benutzen wir die bekannten Gleichungen:[1]

$$\cos \operatorname{am} (K + iv') = \frac{-ik' \sin \operatorname{am} (v', k')}{\Delta \operatorname{am} (v', k')},$$

$$\Delta \operatorname{am} (K + iv') = \frac{k' \cos \operatorname{am} (v', k')}{\Delta \operatorname{am} (v', k')}.$$

Es wird also

$$(15) \qquad \frac{dZ}{dv'} = \frac{k'^2 \sin \operatorname{am} (v', k') \cos \operatorname{am} (v', k')}{[\Delta \operatorname{am} (v', k')]^2}.$$

Um von dem einen Ufer zum anderen überzugehen, muß man entweder v' durch $-v'$ ersetzen, oder i durch $-i$; wobei im ersteren Fall dv' durch $-dv'$ zu ersetzen ist. Hierbei ändert sich die rechte Seite von (15) nicht, ist also reell. Dasselbe Resultat ergibt sich aus (13), wenn man die rechte Seite nach v' differentiiert, dabei v' durch $-v'$ und dv' durch $-dv'$ ersetzt. Hieraus ist ersichtlich, daß $\frac{dZ}{dv'}$ in der ganzen Ebene der Ellipse eindeutig ist, wie auch Z selbst.

Nun ist nach (13) $\frac{dZ}{dv'}$ mit $\frac{d \operatorname{arc} \sin z}{dz} = \frac{1}{\sqrt{1 - z^2}}$ zu multiplizieren, und $\sqrt{1 - z^2}$ ändert sein Zeichen beim Umgang von z um einen der Brennpunkte der Ellipse. Es ist also $\frac{dZ}{dz}$ nicht eindeutig

[1] Vgl. Jacobi, Fundamenta § 19, oder z. B. Durège, Elliptische Funktionen S. 28; Cayley, Elliptic Functions S. 68.

im ganzen Innern der Ellipse.[1] Deshalb ist die durch (1) gegebene Funktion Z zur Vermittlung der konformen Abbildung des Inneren der Ellipse auf das Innere eines Kreises nicht geeignet.

In Wirklichkeit liefert die Gleichung (1) eine Abbildung, die zwar im allgemeinen in den kleinsten Teilen ähnlich ist, aber mit Ausnahme der Brennpunkte und der von ihnen ausgehenden Schnitte. Wie ich früher gezeigt habe,[2] bildet sie die zweiblättrige Fläche, durch welche $\bar{z} = x - iy$ als Funktion von $z = x + iy$ mittels der Gleichung

$$\left(\frac{z+\bar{z}}{2a}\right)^2 - \left(\frac{z-\bar{z}}{2b}\right)^2 = 1$$

dargestellt wird, auf eine entsprechende zweiblättrige Fläche über dem Einheitskreise (bzw. über der Halbebene) ab, wobei die Brennpunkte als Verzweigungspunkte erhalten bleiben. Die von den Punkten ± 1 nach den Punkten $\pm a$ geführten Schnittlinien sind die Übergangslinien der zweiblättrigen Fläche, die sich über den Rand der Ellipse bei stetiger Fortsetzung erstrecken.

Früher hatte ich die beiden Blätter der Fläche längs der Verbindungslinie der Brennpunkte zusammenhängend gedacht. Die Abbildung der so aufgeschnittenen Ellipse auf einen in gleicher Weise aufgeschnittenen Kreis geschieht durch die Gleichung

$$T = \sin\operatorname{am}(U' - K) = -\frac{\cos\operatorname{am} U'}{\Delta\operatorname{am} U'}, \tag{2}$$

---

[1] Während Schwarz auch für den Differentialquotienten die Eindeutigkeit ausdrücklich in Anspruch nimmt; vgl. z. B. Ges. Abhandlungen Bd. 2 S. 105.

[2] Die analytische Fortsetzung derjenigen Funktionen, welche das Innere eines Kegelschnittes konform auf die Halbebene abbilden; Sitzungsberichte der Bayer. Akad. der Wissenschaften, math.-phys. Kl., Bd. XXVI, 1896. In bezug auf die Brennpunkte im Innern von Polygonen, die von Kegelschnitten begrenzt werden, sei bemerkt, daß sie nicht notwendig (wie aus obigem § 4 und dem folgenden § 6 hervorgeht) als singuläre Punkte auftreten, wie ich früher (gestützt auf das Schwarzsche Beispiel) annahm. Auch in meinen drei eingangs erwähnten Abhandlungen aus den Jahren 1912 und 1923 über Abbildung von Kegelschnitt-Polygonen wäre es nicht nötig gewesen, die Brennpunkte als singuläre Punkte der betreffenden Differentialgleichung (zusammen mit den Winkeln an den Ecken des Polygons) einzuführen.

wo $U' = \frac{2K}{\pi} U$ und $U = \text{arc} \sin z = \frac{1}{i} \log (iz + \sqrt{1 - z^2})$

$$= \frac{\pi}{2} + \frac{1}{i} \log (z - i \sqrt{1 - z i})$$

$$= \frac{\pi}{2} - \omega \qquad \text{für } z = \cos \omega.$$

Für $z = \pm 1$ wird $T = \pm 1 \left(\omega = \frac{\pi}{2}\right)$ und allgemein

$$T = \sin \text{am} \left[\frac{2K}{\pi} \left(\frac{\pi}{2} - \omega\right) - K\right] = - \sin \text{am} \left(\frac{2K}{\pi} \omega\right).$$

Macht z einen Umgang um ± 1, so ändert $\sin \omega = \sqrt{1 - z^2}$, und somit auch ω sein Zeichen; es folgt also

$$T = - T^*,$$

wenn mit dem Stern der Wert nach dem Umgange bezeichnet wird. Die Funktion T ist demnach im Innern der Ellipse nicht eindeutig (und für die konforme Abbildung nicht zu verwenden). Um den Differentialquotienten nach z zu bilden, hat man $\frac{dT}{d\omega} = - \frac{dT^*}{d\omega}$ zu multiplizieren mit $\frac{d\omega}{dz}$. Es ist aber

$$\frac{dz}{d\omega} = - \sin \omega = - \sqrt{1 - z^2},$$

ändert also sein Zeichen beim Umgange von ± 1, und es folgt

$$\frac{dT}{dz} = \frac{dT^*}{dz}.$$

Die Funktion T verhält sich also umgekehrt wie Z. Sie ist nicht eindeutig im Innern der Ellipse, wohl aber ihr Differentialquotient. Der Radius des Bildkreises ergibt sich wieder gleich $\frac{1}{\sqrt{k}}$.

Beide Funktionen dienen zur Abbildung des Innern der Ellipse auf das Innere eines Kreises, und zwar der zugehörigen zweiblättrigen Fläche. Zwischen beiden Funktionen muß daher eine einfache Beziehung bestehen. Diese ist sofort aus obiger Gleichung (2) zu entnehmen. Es ergibt sich

$$T^2 = \frac{1 - Z^2}{1 - k^2 Z^2} \text{ oder aufgelöst } Z^2 = \frac{1 - T^2}{1 - k^2 T^2}.$$

Die Nullpunkte des Nenners $Z = k^{-1}$ wirken nicht störend, denn für $k < 1$ liegen sie außerhalb des Kreises mit dem Radius $\frac{1}{\sqrt{k}}$.

§ 6. Zulassung von Ecken in der Begrenzung.

Schon in § 2 bei Gleichung (10) wurde darauf hingewiesen, daß die Randkurve aus verschiedenen Stücken bestehen kann, für die je eine andere Gleichung zwischen $\xi - i\eta$ und $\xi + i\eta$ besteht. Stoßen diese unter einem Winkel aneinander, so bleiben bei dem Grenzübergange aus dem geradlinigen Polygon entsprechende Glieder der Gleichung (11) § 2 unverändert stehen.

Werden die Ecken der Randkurve mit $a_0, a_1, \ldots, a_n$ bezeichnet, wo a_n mit a_0 zusammenfalle, und sind A_i die entsprechenden Punkte der reellen Achse in der Bildebene, ferner $\lambda_i \pi$ die zugehörigen Winkel, so wird jetzt

$$(1) \qquad \frac{d \log \frac{dz}{dZ}}{dZ} = -\frac{1}{\pi} \sum_{i=0}^{i=n-1} \left[\int_{a_i}^{a_{i+1}} \frac{d\varepsilon}{Z - \varphi_i(\varepsilon)} + \frac{\lambda_i - 1}{Z - A_i} \right],$$

wo $\varphi_i(\varepsilon) = \alpha_i (\xi_i - \sqrt{-1}\, \eta_i) + \beta_i$, die der i^{ten} Teilkurve entsprechende Funktion $\varphi(\varepsilon)$ bezeichnet, deren Bestimmung in jedem Falle besonders zu geschehen hat. Es sind ξ_i, η_i die Koordinaten eines Punktes dieser i^{ten} Kurve, die als Funktionen von ε zu denken sind, wenn $d\varepsilon$ den Kontingenzwinkel bezeichnet, und damit auch als Funktionen von ξ gegeben sind. Es treten Schwierigkeiten auf, wie schon am Schluß von § 2 bemerkt wurde, durch die Bestimmung der Konstanten α und β, die für jede Teilkurve von allen anderen Teilkurven abhängen.

Für das erste Teilstück der Randkurve z. B. läuft $Z = X$ von A_0 bis A_1, für das zweite Teilstück von A_1 bis A_2; dabei ändert sich ε stetig von ε_0 bis ε_1 und sodann von ε_1' bis ε_2, wo $\varepsilon_1' - \varepsilon_1$ den Winkel $\lambda_1\pi$ an der Ecke a_1 ergibt, indem hier ε unstetig ist. Der entsprechende Punkt Z der X-Achse aber ändert sich stetig, indem an der Ecke A_1 der Winkel $\lambda_1\pi$ in den Winkel π gestreckt wird, und das geschieht infolge der Hinzufügung des Faktors $Z - A_1$ unter dem Integralzeichen.

Bei Anwendung der Formel (1) ist aber eine Bedingung zu beachten, die bei der Christoffelschen Lösung für das geradlinige Polygon von selbst erfüllt ist. Es darf nämlich der Punkt $Z=\infty$ nicht als singulärer Punkt auftreten, d. h. es muß sich die Funktion im Integral (1) an der Stelle $Z=\infty$ verhalten wie Z^{-2} Beim geradlinigen Polygon wird das dadurch erfüllt, daß die Summe der Winkel gleich $(n-2)\pi$ ist. Macht man den in § 2 besprochenen Grenzübergang, so ist die Summe der Winkel (jeder gleich $d\varepsilon$) gleich 2π; wenn aber Ecken zugelassen werden, kann ein ganz beliebiger Wert auftreten. In diesem Falle ist durch Differentiation der Gleichung (1) ein Ausdruck zu bilden, der bei Integration das Auftreten singulärer Punkte im Unendlichen ausschließt. In vielen Fällen ist dazu bekanntlich der Differentialausdruck $\dfrac{d^2 \log \frac{dz}{dZ}}{dZ^2} - \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{d \log \frac{ds}{dZ}}{dZ}\right)^2$ geeignet, und zwar wegen seines Verhaltens bei linearen Transformationen der Variabeln z und Z.

Hierbei ist im folgenden stets vorausgesetzt, daß keiner der Winkel gleich Null oder 2π sei, denn in diesem Falle können statt der Potenzen $(Z-A)^\lambda$ logarithmische Glieder $\big(a+b\cdot\log(Z-A)\big)$ auftreten, und es werden ergänzende Betrachtungen notwendig.

Zwischen den Koordinaten der Ecken und den Winkeln bestehen einfache Relationen. Es sei

$$\bar{\zeta} = fs(\zeta) \quad \text{oder} \quad \xi - i\eta = fs(\xi + i\eta)$$

die Gleichung der s^{ten} Randkurve und $\lambda_s\pi$ der Winkel, der sie von dem $(s+1)^{\text{ten}}$ Randteile trennt. Die Tangente eines Punktes der s^{ten} Kurve habe den Winkel ω gegen die ξ-Achse, so daß

$$\operatorname{tg}\omega = \frac{d\eta}{d\xi};$$

dann ist

$$\frac{d\bar{\xi}}{d\zeta} = f'_s(\zeta) = \frac{1 - i\operatorname{tg}\omega}{1 + i\operatorname{tg}\omega},$$

also:

$$i\operatorname{tg}\omega = \frac{1 - f'_s(\xi)}{1 + f'_s(\xi)},$$

und es ist $\lambda_s\pi = \omega_{s+1} - \omega_s$ an der betreffenden Ecke, so daß

$$\operatorname{tg}(\lambda_s\pi) = \frac{\operatorname{tg}\omega_{s+1} - \operatorname{tg}\omega_s}{1 + \operatorname{tg}\omega_{s+1}\operatorname{tg}\omega_s} = -i\frac{f_s' - f_{s+1}'}{f_s' + f_{s+1}'}.$$

Hiermit sind die Winkel $\lambda_s\pi$ gefunden, wenn die Gleichungen der Randkurven (und damit die Koordinaten der Ecken) gegeben sind.

Man kann die Frage aufwerfen, inwieweit die Ecken durch die Winkel bestimmt sind. Für Kreispolygone kommt Sanio[1] zu dem Schluß, daß bei ungerader Seitenzahl Winckel und Ecken voneinander unabhängig gegeben sein können, bei gerader Seitenzahl aber der letzte Winkel durch die übrigen und durch die Lage der Ecken bestimmt ist.

§ 7. Die Kreisbogen-Sichel.

Bekanntlich ist das Problem durch die berühmte Arbeit von Schwarz für Kreispolygone auf die Lösung einer Differentialgleichung zurückgeführt. Sind n Kreise durch die Gleichungen

$$[x - a_i + \sqrt{-1}\,(y - b_i)]\;[x - a_i - \sqrt{-1}\,(y - b_i)] = r_i^2$$

gegeben, wo $a_i + \sqrt{-1}\,b_i$ den Mittelpunkt, r_i den Radius bezeichnet, sind ferner $\lambda_i\pi$ die Winkel an den Ecken des Polygons, so wäre die allgemeine Lösung nach meiner Methode durch die Gleichung (1) § 6 in vorläufigem Ansatze gegeben.

Für $n = 2$, wo es sich um eine Kreissichel handelt, ergibt sich z. B.

(1)

$$\frac{d\log\frac{dz}{dZ}}{dZ} = \frac{1}{\pi}\left[\int_{a_0}^{a_1}\frac{d\varepsilon}{\varphi_1(\varepsilon) - Z} + \frac{(\lambda_1 - 1)}{Z - A_1} + \int_{a_1}^{a_0}\frac{d\varepsilon}{\varphi_2(\varepsilon) - Z} + \frac{(\lambda_2 - 1)}{Z - A_2}\right]$$

Hier sind die Ecken mit a_0 und a_1 bezeichnet, und es ist

(1 a) $\quad \varphi_1(\varepsilon) = \alpha_1(\xi - i\eta) + \beta_1, \quad \varphi_2(\varepsilon) = \alpha_2(\xi - i\eta) + \beta_2,$

---

[1] Über die Abbildung des Äußeren eines Kreisbogenpolygons auf eine Kreisfläche; Inauguraldissertation, Königsberg i. Pr. 1885.

unter $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2$ zu bestimmende Konstante verstanden. Bei der Integration läuft ε von einem Wert ε_1 bis ε_2 auf dem ersten Kreis, und von $\varepsilon_2 + \delta$ bis $\varepsilon_1 + 2\pi - \delta$ auf dem zweiten Kreis. Nach Gleichung (3), § 3 und (1) § 6 wird demnach ($\lambda_1 \pi = \delta$):

$$
\begin{aligned}
\pi \frac{d \log \frac{dz}{dZ}}{dZ} &= \frac{1}{\beta_1 - Z}\left[(\varepsilon_2 - \varepsilon_1) - i \log \frac{\beta_1 - Z + \alpha_1 i r_1 e^{-i\varepsilon_2}}{\beta_1 - Z + \alpha_1 i r_1 e^{-i\varepsilon_1}} + \frac{\lambda_1 - 1}{Z - A_2}\right] \\
(2) \qquad &+ \frac{1}{\beta_2 - Z}\left[(\varepsilon_1 - \varepsilon_2) + 2\pi - 2\delta - i \log \frac{\beta_2 - Z + \alpha_2 i r_2 e^{-i(\varepsilon_1 - \delta)}}{\beta_2 - Z + \alpha_2 i r_2 e^{-i(\varepsilon_2 + \delta)}} \right. \\
&\left. \qquad + \frac{\lambda_2 - 1}{Z - A_2}\right].
\end{aligned}
$$

Den Fall $n = 2$ hat Kirchhoff[1] in folgender Weise behandelt. Es bezeichne $t = t_1 + i t_2$ einen Punkt in der Ebene des Winkels mit der Öffnung δ, unter der sich die beiden Kreise schneiden, und es seien

$$(3) \qquad t_2 = 0, \text{ und } t_2 = t_1 \cdot \operatorname{tg} \delta$$

die Gleichungen der beiden Schenkel des Winkels, so wird derselbe durch die Transformation

$$(4) \qquad T = T_1 + i T_2 = t^{\frac{\pi}{\delta}}$$

auf die Halbebene $T_2 > 0$ abgebildet, wobei der Winkel δ in den Winkel π gestreckt und die zweite Linie (3) in den negativen Halbstrahl der Linie $T_2 = 0$ übergeführt wird.

Die Abbildung des Winkelraumes δ zwischen den beiden Schenkeln auf die Kreissichel geschieht durch die Transformation

$$t = \frac{z - c}{z - c'},$$

wenn sich die beiden Kreise in den Punkten c und c' unter dem Winkel δ schneiden. Sollen diesen Punkten in der Z-Ebene die Punkte A_1 und A_2 auf der reellen Achse ($Y = 0$) entsprechen, so hat man zu setzen:

$$(5) \qquad T = \frac{Z - A_1}{Z - A_2}, \text{ also } \frac{z - c}{z - c'} = \left(\frac{Z - A_1}{Z - A_2}\right)^m, \text{ wo } m = \frac{\delta}{\pi}.$$

[1] Vorlesungen über mathematische Physik, Mechanik, 2. Auflage 1877, S. 287 ff.

Es ergibt sich also die Abbildungsfunktion:

$$(6)\qquad z=\frac{c-c'T^m}{1-T^m},\quad \frac{dz}{dZ}=\frac{m(c-c')}{(1-T^m)^2}\cdot\frac{A_1-A_2}{(Z-A_2)^2},$$

wobei:

$$(7)\qquad 1-T^m=\frac{c-c'}{z-c'},\quad \text{und:}$$

$$(8)\qquad \frac{d\log\frac{dz}{dZ}}{dZ}-\frac{2}{z-c'}\frac{dz}{dZ}=(m-1)\frac{d\log T}{dZ}-\frac{2}{Z-A_2}.$$

Es möge jetzt umgekehrt eine gegebene Sichel nach unseren allgemeinen Regeln behandelt werden. Die beiden Kreise seien durch die Gleichungen

$$(9)\qquad x^2+(y+b_1)^2=r_1^2 \text{ und } x^2+(y+b_2)^2=r_2^2$$

dargestellt. Ihre Mittelpunkte sind $x=0$, $y=-b_1$ und $x=0$, $y=-b_2$, wobei b_1 und b_2 positiv seien; ihre Radien sind r_1 und r_2. Die Kreise schneiden sich auf der x-Achse in den Punkten $x=a$, $y=0$ und $x=-a$, $y=0$, so daß:

$$r_1^2=a^2+b_1^2,\; r_2^2=a^2+b_2^2.$$

Bedeutet ψ den Winkel des Radius gegen die Achse $y=0$, so ist $\varepsilon=\psi+\frac{\pi}{2}$ und für Punkte ζ der beide Kreise bzw.

$$(9)\qquad \begin{aligned}\zeta&=\xi+i\eta=r_1e^{i\psi}-ib_1=-ir_1e^{i\varepsilon}-ib_1,\quad d\zeta=i(\zeta+ib_1)d\varepsilon,\\ \zeta&=\xi+i\eta=r_2e^{i\psi}-ib_2=-ir_2e^{i\varepsilon}-ib_2,\quad d\zeta=i(\zeta+ib_2)d\varepsilon.\end{aligned}$$

Gemäß (1a) sei:

$$\begin{aligned}\varphi_1(\varepsilon)&=i\alpha_1r_1e^{-i\varepsilon}+\beta_1 & \varphi_2(\varepsilon)&=i\alpha_2r_2e^{-\ \varepsilon}+\beta_2\\ &=\alpha_1(\xi-i\eta)+\beta_1 & &=\alpha_2(\xi-i\eta)+\beta_2,\end{aligned}$$

so wird

$$\int\frac{d\zeta}{Z-\varphi_1(\varepsilon)}=\frac{1}{Z-\beta_1}\log\left[(Z-\beta_1)(\zeta+ib_1)-\alpha'r_1\right],$$

$$\int\frac{d\zeta}{Z-\varphi_2(\varepsilon)}=\frac{1}{Z-\beta_2}\log\left[(Z-\beta_2)(\zeta+ib_2)-\alpha''r_2\right].$$

Längs des ersten Kreisbogens läuft ζ von $\zeta = a$ bis $\zeta = -a$, längs des zweiten Bogens von $\zeta = -a$ bis $\zeta = a$ zurück. Da zwischen der x-Achse und den Kreisbögen kein singulärer Punkt liegt, ist es gleichgültig, ob man längs der Achse integriert oder unter Benutzung der Variabeln ε längs der Bögen.

Bezeichnet δ den Winkel der beiden Bögen an der Ecke A_1, so ist $-\delta$ der Winkel an der Ecke A_2, also $\lambda_1 - 1 = \frac{\delta - \pi}{\pi}$, $\lambda_2 - 1 = \frac{-\delta - \pi}{\pi} = -(\lambda_1 - 1) - 2$. Die Gleichung (2) wird so:

$$\frac{d \log \frac{dz}{dZ}}{dZ} = -\frac{1}{\pi} \int_a^{-a} \frac{d\zeta}{(\zeta + i b_1)(Z - \beta_1) - \alpha_1 r_1^2}$$
$$- \frac{1}{\pi} \int_{-a}^{+a} \frac{d\zeta}{(\zeta + i b_2)(Z - \beta_2) - \alpha_2 r_2^2}$$
$$+ (\lambda_1 - 1)\left(\frac{1}{Z - A_1} - \frac{1}{Z - A_2}\right) - \frac{2}{Z - A_2}.$$

Die Summe der beiden Integrale der rechten Seite gibt

$$\text{(10)} \qquad \frac{1}{\pi (Z - \beta_1)} \log \frac{(-a + i b_1)(Z - \beta_1) - \alpha_1 r_1^2}{(a + i b_1)(Z - \beta_1) - \alpha_1 r_1^2}$$
$$+ \frac{1}{\pi (Z - \beta_2)} \log \frac{(a + i b_2)(Z - \beta_2) - \alpha_2 r_2^2}{(-a + i b_2)(Z - \beta_2) - \alpha_2 r_2^2}.$$

Durch passende Bestimmung der Konstanten α_1, α_2, β_1, β_2 läßt sich der Ausdruck sehr vereinfachen. Um die beiden Logarithmen vereinigen zu können, sei

$$\text{(11)} \qquad \beta_1 = \beta_2 \; (= \beta).$$

Ohne die Grundpunkte A_1, A_2 zu ändern, machen wir eine lineare Transformation

$$\text{(12)} \qquad \frac{Z - A_1}{Z - A_2} = \varkappa \cdot \frac{Z' - A_1}{Z' - A_2} \quad \text{oder} \quad Z = \frac{Z' M - Q}{Z'(1 - \varkappa) - N},$$

wo:

$$M = A_1 - \varkappa A_2, \; N = A_2 - \varkappa A_1, \; Q = A_1 A_2 (1 - \varkappa).$$

Setzt man noch zur Abkürzung:

$$U = Z'[\beta(1-\varkappa) - M] - \beta N + Q,\ S = Z'(1-\varkappa) - N,$$

so geben die Zähler in den beiden Logarithmen (9) miteinander multipliziert:

$$U^2[-a^2 - b_1 b_2 + ia(b_1 - b_2)] + US[(-a + ib_1)\alpha_2 r_2^2 \\ + (a + ib_2)\alpha_1 r_1^2] + \alpha_1 \alpha_2 r_1^2 r_2^2 S^2.$$

Hieraus entsteht der Nenner, indem man $-a + ib_1$ ersetzt durch $a + ib_1$, und $a + ib_2$ durch $-a + ib_2$; derselbe wird also:

$$U^2[-a^2 - b_1 b_2 + ia(b_2 - b_1)] + US[-a(\alpha_1 r_1^2 - \alpha_2 r_2^2) \\ + i(b_1 \alpha_2 r_2^2 + b_2 \alpha_1 r_1^2)] + a_1 \alpha_2 r_1^2 r_2^2 S^2.$$

Beide Ausdrücke werden einander gleich, wenn man es so einrichtet, daß

$$U = 0 \tag{13}$$

wird. Da diese Bedingung nicht von Z' abhängig sein kann, so zerfällt sie in die beiden Gleichungen

$$\beta(1-\varkappa) = A_1 - \varkappa A_2 \text{ und } \beta(A_2 - \varkappa A_1) + A_1 A_2 (1-\varkappa) = 0. \tag{14}$$

Eliminiert man $\varkappa$, so ergibt sich für β die Gleichung:

$$\beta^2 - \beta(A_1 + A_2) - A_1 A_2 = 0 \text{ oder}$$

$$\beta = \frac{1}{2}(A_1 + A_2) \pm \frac{1}{2}\sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 6 A_1 A_2}, \tag{15}$$

und:

$$\varkappa = \frac{(A_1 + A_2)^2 \pm (A_1 - A_2)\sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 6 A_1 A_2}}{4 A_1 A_2}. \tag{16}$$

Es sind also α und β reell, d. h. durch die Transformation (12) wird die reelle Achse $Y = 0$ nur in sich verschoben unter Festhaltung der Punkte A_1, A_2 und unter Verlegung des Punktes $Z = \infty$ in den Punkt

$$Z' = \frac{N}{1-\varkappa} = \frac{A_2 - \varkappa A_1}{1-\varkappa}.$$

Das Argument des Logarithmus (10) wird jetzt gleich 1, und es ergibt sich:

$$\log \frac{dz}{dZ'} = (\lambda_1 - 1) \log \frac{Z' - A_1}{Z' - A_2} - 2 \log (Z' - A_2)$$

und durch nochmalige Integration:

$$z - z_0 = (A_1 - A_2) \left(\frac{Z' - A_1}{Z' - A_2}\right)^{\lambda_1}, \tag{17}$$

wodurch die bekannte Kirchhoffsche Formel hergestellt ist.

Es möge noch untersucht werden, wie sich die Abbildung der Sichel im einzelnen gestaltet. Auf der rechten Seite von (17) kann man eine beliebige Integrationkonstante als Faktor hinzufügen. Wir wählen $e^{i\vartheta}$, wo ϑ reell ist. Die Gleichung ist also

$$\frac{z - c_1}{z - c_2} = \left(\frac{Z - A_1}{Z - A_2}\right)^{\delta} e^{i\vartheta}. \tag{18}$$

Es sei zuerst $A_1 < A_2 < X$ $(Y = 0)$, also $\tau = \frac{X - A_1}{X - A_2} =$ reell. Die Trennung von reell und imaginär ergibt, wenn wieder $\alpha_1 = a$, $\alpha_2 = -a$ (reell) angenommen wird:

$$\begin{aligned} (x + a) \cos \vartheta \cdot \tau^{\delta} - y \sin \vartheta \cdot \tau^{\delta} - (x - a) &= 0, \\ y \cos \vartheta \cdot \tau^{\delta} + (x + a) \sin \vartheta \cdot \tau^{\delta} - y &= 0, \end{aligned} \tag{19}$$

und durch Elimination von τ:

$$(x^2 + y^2) - 2ay \cdot \operatorname{cotg} \vartheta - a^2 = 0. \tag{20}$$

Das ist ein Kreisbüschel durch die Punkte a, o und $-a$, o mit dem Parameter ϑ. Für $\vartheta = 0$ ergibt sich die X-Achse, d. h. der eine der beiden begrenzenden Kreisbogen ist eine gerade Linie. Der Mittelpunkt hat die Koordinaten $x = 0$, $y = a \cos \vartheta$. Der Radius r_1 ist bestimmt durch $r_1^2 = a^2 (1 + \operatorname{cotg} \vartheta)$. Bezeichnet man die y-Koordinate des Mittelpunktes wieder mit $-b_1$, so ist $-b_1 = a \operatorname{tg} (\pi - \vartheta)$, d. h. ϑ ist der Winkel der X-Achse mit dem Radiusvector, der vom Mittelpunkte nach dem Punkte $x = a$, $y = 0$ läuft.

Sei zweitens $A_1 < X < A_2$, so ist $X - A_2$ negativ; es muß also τ^{δ} durch $\tau^{\delta} e^{\pi i \delta}$ ersetzt werden. In den Gleichungen (18) und (20) ist somit ϑ durch $\vartheta + \pi\delta$ zu ersetzen; woraus folgt, daß $\pi\,\delta$ den Winkel bezeichnet, unter dem sich die beiden Kreise schneiden. Sei $\pi\,\delta = \delta'$, so wird die Gleichung des zweiten Kreises

$$(22)\qquad x^2 + y^2 - 2ay \operatorname{cotg}(\vartheta + \delta') - a^2 = 0,$$

und setzt man $x = r_2 \cos\varphi$, $y = -b_2 + r_2 \sin\varphi$, so gilt die zweite Gleichung (19)

$$(23)\qquad \begin{aligned}(r_2 \sin\varphi - b_2 i) \cos(\vartheta + \delta') \cdot \tau^\delta \\ + (a + r_2 \cos\varphi) \cdot \sin(\vartheta + \delta') \cdot \tau^\delta + b_2 - r_2 \sin\varphi = 0.\end{aligned}$$

Wegen (20) ist dann die erste Gleichung (19) von selbst erfüllt. So lassen sich die Koordinaten der Punkte der beiden Kreise durch die Parameter τ oder φ darstellen. Dabei ist

$$r_1^2 = a^2 + b_1^2, \quad r_2^2 = a^2 + b_2^2$$
$$a = b_1 \operatorname{cotg}\vartheta, \quad a = b_2 \operatorname{cotg}(\vartheta + \delta').$$

Für $X < A_1 < A_2$ wiederholen sich die obigen Betrachtungen für $A_1 < A_2 < X$. Von den beiden Kreisbogen, welche die Sichel bilden, wird der erste auf die X-Achse für $X < A_1$ und $X > A_2$ abgebildet, der zweite auf den zwischen A_1 und A_2 liegenden Teil der X-Achse.

Vertauscht man in (10) § 2 $+i$ mit $-i$, so folgt, daß der zu ζ konjugierte Wert ζ der folgenden Gleichung genügt

$$(24)\qquad \frac{d \log \frac{d\bar{\zeta}}{dx}}{dx} = \frac{1}{\pi}\int \frac{d\varepsilon}{(X - \bar{\beta}) - \bar{\alpha}\xi} = \frac{-i}{\pi}\int \frac{d\bar{\xi}}{(X - \bar{\beta})\,\xi - \bar{\alpha} r^2},$$

wenn $\bar{\alpha}$, $\bar{\beta}$ zu α, β konzipiert wird, und wenn $\xi \cdot \bar{\xi} = r^2$ die Gleichung des Kreises ist; oder:

$$\frac{d \log \frac{d\zeta^{-1}}{dx}}{dX} = \frac{-i}{\pi}\int \frac{r^2\, d\left(\frac{1}{\zeta}\right)}{(X - \bar{\beta})\left(\frac{1}{\zeta}\right) - \bar{\alpha}\, r^2} = \frac{i}{\pi}\int \frac{\frac{d\zeta}{\zeta}}{(X - \beta) - \bar{\alpha}\,\zeta}$$
$$= \frac{i}{\pi}\int \frac{d\bar{\zeta}}{(X - \bar{\beta})\,\bar{\zeta} - \bar{\alpha}\,\zeta}.$$

das ist aber bis auf das Vorzeichen die rechte Seite von (24). Es genügt somit ζ^{-1} einer Gleichung derselben Form von ζ selbst. Hat man also eine partikuläre Lösung der letzten Gleichung gefunden, so entsteht daraus (bis auf Änderung von Konstanten) eine andere Lösung, indem man ζ durch ζ^{-1} ersetzt.

Da nun ein Ersetzen von z durch $az+b$ nichts Wesentliches ändert, so kann bei Kreisen aus jeder Lösung eine andere abgeleitet werden, indem man z durch eine gebrochene lineare Funktion von z ersetzt.

§ 8. Das Kreisbogen-Dreieck.

Es seien a_1, a_2, a_3 die Argumente der drei Ecken, und c_1, c_2, c_3 die Argumente der Kreismittelpunkte, ferner r_1, r_2, r_3 die Radien, so daß

$$
\begin{aligned}
r_1 &= \operatorname{abs}(a_1 - c_1) = \operatorname{abs}(a_2 - c_1),\\
r_2 &= \operatorname{abs}(a_2 - c_2) = \operatorname{abs}(a_3 - c_2),\\
r_3 &= \operatorname{abs}(a_3 - c_3) = \operatorname{abs}(a_1 - c_3).
\end{aligned} \tag{1}
$$

Das Dreieck in der Ebene $z = x + iy$ werde auf die Halbebene $Y > 0$ der Ebene $Z = X + iY$ konform abgebildet, wobei die Ecken a_1, a_2, a_3 bzw. die Punkte A_1, A_2, A_3 der Achse $Y = 0$ entsprechen mögen. Die von den Kreisen an den Ecken gebildeten Winkel seien mit $\lambda\pi$, $\mu\pi$, $\nu\pi$ bezeichnet. Für die Punkte auf den Peripherien der Kreise werde die Bezeichnung $\zeta = \xi + i\eta$ gewählt. Unsere allgemeine Formel (1) § 6 ergibt dann vorläufig:

$$
\begin{aligned}
\pi \frac{d \log \frac{dz}{dZ}}{dZ} = \int\limits_{a_1}^{a} \frac{d\varepsilon}{\varphi_1(\varepsilon) - Z} + \frac{\lambda - 1}{Z - A_1} + \int\limits_{a_2}^{a_3} \frac{d\varepsilon}{\varphi_2(\varepsilon) - Z} + \frac{\mu - 1}{Z - A_2}\\
+ \int\limits_{a_3}^{a_1} \frac{d\varepsilon}{\varphi_3(\varepsilon) - Z} + \frac{\nu - 1}{Z - A_3},
\end{aligned} \tag{2}
$$

wobei auf dem ersten Kreise $\varphi_1(\varepsilon) = \alpha_1(\xi - i\eta) + \beta_1$,
auf dem zweiten Kreise $\varphi_2(\varepsilon) = \alpha_2(\xi - i\eta) + \beta_2$,
auf dem dritten Kreise $\varphi_3(\varepsilon) = \alpha_3(\xi - i\eta) + \beta_3$

unter α_i, β_i zu bestimmende Konstante verstanden. Führt man statt ε die Variable ζ als Integrationsvariable ein, so ist wie in (9) § 7:

$$
\zeta = -i r_1 e^{i\varepsilon} + c_1, \quad d\zeta = i(\zeta - c_1)\, d\varepsilon \tag{3}
$$

und entsprechend für die beiden andern Kreise. Bedeutet $\bar{c}_i$ den konjugierten Wert zu c_i, so ist z. B. die Gleichung des ersten Kreises:

$$(\xi + i\eta - c_1)\,(\xi - i\eta - \bar{c}_1) = r_1^2.$$

Die Gleichung (2) wird somit:

$$\pi\,\frac{d\log\frac{dz}{dZ}}{dZ} = \int\limits_{a_1}^{a_2}\frac{d\zeta}{(\zeta-c_1)(Z-\beta_1)-\alpha_1 r_1^2} + \frac{\lambda-1}{Z-A_1}$$
$$+\int\limits_{a_2}^{a_3}\frac{d\zeta}{(\zeta-c_2)(Z-\beta_2)-\alpha_2 r_2^2} + \frac{\mu-1}{Z-A_2}$$
$$+\int\limits_{a_3}^{a_1}\frac{d\zeta}{(\zeta-c_3)(Z-\beta_3)-\alpha_3 r_3^2} + \frac{\nu-1}{Z-A_3}.$$

Die Auswertung der drei rechts stehenden Integrale ergibt

$$(4)\qquad \begin{aligned} &\frac{1}{Z-\beta_1}\log\frac{(a_2-c_1)(Z-\beta_1)-\alpha_1 r_1^2}{(a_1-c_1)(Z-\beta_1)-\alpha_1 r_1^2} \\ &+\frac{1}{Z-\beta_2}\log\frac{(a_3-c_2)(Z-\beta_2)-\alpha_2 r_2^2}{(a_2-c_2)(Z-\beta_2)-\alpha_2 r_2^2} \\ &+\frac{1}{Z-\beta_3}\log\frac{(a_1-c_3)(Z-\beta_3)-\alpha_3 r_3^2}{(a_3-c_3)(Z-\beta_3)-\alpha_3 r_3^2}. \end{aligned}$$

Überlegungen, die sich auf die Fortsetzung der Funktion Z über die Begrenzung des Dreiecks hinaus beziehen, lassen schließen, daß Glieder der Form $(Z-\beta)^{-1}\log(Z-\beta)$ nicht vorkommen dürfen. Um sie fortzubringen, müssen wir

$$(5)\qquad \beta_1 = \beta_2 = \beta_3 = \beta$$

annehmen, und die Zähler der Argumente in den Logarithmen zusammenziehen, ebenso die Nenner. Die Zähler ergeben dann einen Ausdruck der Form

$$P_0(Z-\beta)^3 + P_1(Z-\beta)^2 + P_2(Z-\beta) + P_3.$$

Hier ist:

$$P_3 = -\alpha_1\alpha_2\alpha_3 r_1^2 r_2^2 r_3^2; \quad P_0 = (a_2 - c_1)(a_3 - c_2)(a_1 - c_3).$$

$$P_1 = -\alpha_1 r_1^2 (a_3 - c_1)(a_1 - c_3) - \alpha_2 r_2^2 (a_1 - c_3)(a_2 - c_1)$$
$$- \alpha_3 r_3^2 (a_2 - c_1)(a_3 - c_2).$$

$$P_2 = (a_2 - c_1)\alpha_2\alpha_3 r_2^2 r_3^2 + (a_3 - c_2)\alpha_3\alpha_1 r_3^2 r_1^2 + (a_1 - c_3)\alpha_1\alpha_2 r_1^2 r_2^2.$$

Um diese Ausdrücke mit den entsprechenden aus den Nennern der Logarithmen zu vergleichen, führen wir die Winkel der Tangenten an den Ecken ein, und zwar am ersten Bogen ε_1 an der Ecke a_1, ε_1' an der Ecke a_2, usf. Dann ist nach (3):

$$a_2 - c_1 = -i r_1 e^{i\varepsilon_1'}, \quad a_3 - c_2 = -i r_2 e^{i\varepsilon_2'}, \quad a_1 - c_3 = -i r_3 e^{i\varepsilon_3'}$$

und hierin ist

$$\varepsilon_1' = \varepsilon_2 + \mu, \quad \varepsilon_2' = \varepsilon_3 + \nu, \quad \varepsilon_3' = \varepsilon_1 + \lambda, \tag{6}$$

ferner für die Glieder in den Nennern

$$a_1 - c_1 = -i r_1 e^{i\varepsilon_1} = -i r_1 e^{i(\varepsilon_3' - \lambda)}, \quad r_3(a_1 - c_1) = r_1(a_1 - c_3) e^{-i\lambda},$$

$$r_1(a_2 - c_2) = r_2(a_2 - c_1) e^{-i\mu}, \quad r_2(a_3 - c_3) = r_3(a_3 - c_2)\, \varepsilon^{-i\nu}.$$

Es empfiehlt sich indessen, statt ζ die Variable ε beizubehalten. Unter Benutzung der Gleichung (3) § 3 werden dann die drei Integrale der rechten Seite von (2):

$$\frac{i}{Z-\beta}\Bigg[i(\varepsilon_1' - \varepsilon_1 + \varepsilon_2' - \varepsilon_2 + \varepsilon_3' - \varepsilon_3) + \log\frac{\beta - Z + \alpha_1 r_1 e^{-i\varepsilon_1'}}{\beta - Z + \alpha_1 r_1 e^{-i\varepsilon_1}}$$
$$+ \log\frac{\beta - Z + \alpha_2 r_2 e^{-i\varepsilon_2'}}{\beta - Z + \alpha_2 r_2 e^{-i\varepsilon_2}} + \log\frac{\beta - Z + \alpha_3 r_3 e^{-i\varepsilon_3'}}{\beta - Z + \alpha_3 r_3 e^{-i\varepsilon_3}}\Bigg], \tag{7}$$

wobei der Faktor von i innerhalb der Klammer gleich $\lambda + \mu + \nu$ ist. Sind die Zähler und Nenner der Argumente der Logarithmen

$$\text{mit } Q_0'(Z-\beta)^3 + Q_1'(Z-\beta)^2 + Q_2'(Z-\beta) + Q_3' \text{ bzw.}$$
$$Q_0(Z-\beta)^3 + Q_1(Z-\beta)^2 + Q_2(Z-\beta) + Q_3$$

bezeichnet, so müßten die Gleichungen bestehen

$$Q_0' = \gamma Q_0, \quad Q_1' = \gamma Q_1, \quad Q_2' = \gamma Q_2, \quad Q_3' = \gamma Q_3; \tag{8}$$

das sind vier Gleichungen zur Bestimmung der Größen $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \gamma$. Sind diese dementsprechend berechnet, so wird die Gleichung (7)

$$
(9) \qquad \frac{d \log \frac{dz}{dZ}}{dZ} = \frac{i\pi}{Z - \beta}\left[i(\lambda + \mu + \nu) + \log\gamma\right] + \pi\left[\frac{\lambda - 1}{Z - A_1} + \frac{\mu - 1}{Z - A_2} + \frac{\nu - 1}{Z - A_3}\right].
$$

Die letzte der vier Gleichungen (8) ist:

$$
\alpha_1\,\alpha_2\,\alpha_3\,r_1^2\,r_2^2\,r_3^2\,e^{-i(\varepsilon_1' + \varepsilon_2' + \varepsilon_3')} = \gamma\,\alpha_1\,\alpha_2\,\alpha_3\,r_1^2\,r_2^2\,r_3^2\,e^{-i(\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3)},
$$

also $\gamma = e^{i(\lambda + \mu + \nu)\pi}$. Andererseits ist jetzt $Q_0' = Q_0$, folglich $\gamma = 1$, $\lambda + \mu + \nu = 1$, was im allgemeinen nicht erfüllt ist. Statt α_1, α_2, α_3 wird man daher die Größe β als Unbekannte ansehen. Da $Q_0 = Q_0' = 1$ ist, so ergeben sich dann die Gleichungen für die vier Unbekannten α_1, α_2, α_3, β, so daß β willkürlich bleibt und α_1, α_2, α_3 als Funktionen von β gefunden werden. Bekannt sind dabei die Größen ν_1, ν_2, ν_3 und ε_1, ε_2, ε_3, λ, μ, ν. Aus den Ausdrücken, in die $(Z - \beta)^{-1}$ in (7) multipliziert ist, fällt jetzt Z heraus. Diese Klammer ist eine Konstante, die wir $i\,\delta$ nennen. Es wird also nach Ausführung der Quadraturen:

$$
(10) \qquad z - z_0 = \int_{Z_0}^{Z} (Z - A_1)^{\lambda - 1}(Z - A_2)^{\mu - 1}(Z - A_3)^{\nu - 1}(Z - \beta)^{\delta}\,dZ.
$$

Wenn hier neben den Ecken A_1, A_2, A_3 der Punkt β als singulärer Punkt auftritt, so ist dies nur vorläufig. Insbesondere kann er vielleicht dazu dienen, das Verhalten des Integrals für $Z = \infty$ zu regulieren. Ersetzt man nämlich Z durch T^{-1}, so wird der Ausdruck im Integral unendlich wie $T^{-(\lambda + \mu + \nu + \delta - 3)}$ für $T = 0$, während der Exponent von T gleich -2 sein müßte, damit der Punkt $T = 0$ kein ausgezeichneter Punkt des Randes sei. Ist $\delta = 0$ und

$$
\lambda + \mu + \nu + 1 = 0,
$$

so ist die gestellte Bedingung von selbst erfüllt, wie beim Christoffelschen Integrale, wo es sich um ein Dreieck handelt, das linear in ein geradliniges Dreieck übergeführt werden kann. Man vermeidet die durch den Punkt $Z = \infty$ verursachten Schwierigkeiten, indem man (unter Bezugnahme auf eine in § 6 gemachte

Bemerkung) die Funktion z durch die Schwarzsche Differentialgleichung dritter Ordnung definiert. Nach Klein (Ikosaëder S. 78 und Math. Annal. 11) kann man diese in der folgenden allgemeinen Form schreiben:

$$\begin{aligned}\frac{d^2\log\frac{dz}{dZ}}{dZ^2}-\frac{1}{2}\left(\frac{d\log\frac{dz}{dZ}}{dZ}\right)^2=\frac{1}{Z_1Z_2Z_3}\Bigg[&\frac{\lambda^2-1}{2Z_1}(A_1-A_2)(A_1-A_3)\\ (11)\qquad &+\frac{\mu^2-1}{2Z_2}(A_2-A_1)(A_2-A_3)\\ &+\frac{\nu^2-1}{2Z_3}(A_3-A_1)(A_3-A_2)\Bigg],\end{aligned}$$

wo zur Abkürzung: $Z_1=Z-A_1, Z_2=Z-A_2, Z_3=Z-A_3$.

Um die übliche Form zu erhalten, muß man die einzelnen Glieder in Partialbrüche zerlegen; es ist:

$$\frac{1}{Z_1^2Z_2Z_3}=\frac{1}{Z_1^2a_{12}a_{13}}+\frac{1}{Z_1Z_2a_{12}a_{31}}+\frac{1}{Z_1Z_2a_{13}a_{21}}+\frac{1}{Z_2Z_3a_{21}a_{31}},$$

$$\frac{1}{Z_2^2Z_3Z_1}=\frac{1}{Z_2^2a_{21}a_{23}}+\frac{1}{Z_2Z_3a_{31}a_{21}}+\frac{1}{Z_2Z_1a_{13}a_{21}}+\frac{1}{Z_3Z_1a_{32}a_{12}},$$

$$\frac{1}{Z_3^2Z_1Z_2}=\frac{1}{Z_3^2a_{31}a_{32}}+\frac{1}{Z_3Z_2a_{21}a_{23}}+\frac{1}{Z_1Z_3a_{32}a_{13}}+\frac{1}{Z_1Z_2a_{23}a_{12}},$$

wo $a_{ik}=A_i-A_k=-a_{ki}$. Multipliziert man diese Gleichungen mit $(1-\lambda^2)\,a_{12}\,a_{13}$, $(1-\mu^2)\,a_{21}\,a_{23}$, $(1-\nu^2)\,a_{31}\,a_{32}$ und bildet die Summen, so entsteht links (abgesehen von Nenner 2) die rechte Seite von (11), und letztere Gleichung erhält die Form:

$$\begin{aligned}[z,Z]=\frac{1-\lambda^2}{2Z_1^2}+\frac{1-\mu^2}{2Z_2^2}+\frac{2-\nu^2}{2Z_3^2}&+\frac{\lambda^2+\mu^2-\nu^2-1}{2Z_1Z_2}\\ (12)\qquad +\frac{\mu^2+\nu^2-\lambda^2-1}{2Z_2Z_3}&+\frac{\nu^2+\lambda^2-\mu^2-1}{2Z_3Z_1},\end{aligned}$$

wenn mit $[z, Z]$ der Differentialausdruck auf der linken Seite von (11) bezeichnet wird. Läßt man die Ecke A_3 ins Unendliche fallen, so entsteht aus (12) insbesondere die Gleichungsform

$$(13)\qquad [z,Z]=\frac{1-\lambda^2}{2Z_1^2}+\frac{1-\mu^2}{2Z_2^2}+\frac{\lambda^2+\mu^2-\nu^2-1}{2Z_1Z_2}.$$

Diese Form legt Schwarz mit Vorliebe seinen Untersuchungen zugrunde.

Es ist jetzt die Frage zu stellen, ob unsere Lösung (9) dieser Differentialgleichung (13) bei passender Wahl der Konstanten (β und γ) genügt; bzw. welche Modifikationen notwendig sind, nachdem hier die durch den Punkt $Z = \infty$ bedingten und in § 6 schon erwähnten Schwierigkeiten auftreten.

Zu dem Zwecke bringen wir den Punkt C mit Hilfe der Substitution $Z - C = T^{-1}$ ins Unendliche (wo $T = 0$); dann wird

$$(14) \qquad z - z_0 = \Gamma \int (1 - A\,T)^{\lambda - 1} (1 - B\,T)^{\mu - 1}\, T^{\varrho - 1}\, dT,$$

wenn wir den noch willkürlichen Punkt β auch mit C zusammenfallen lassen. Hierin ist

$$(14a) \qquad \rho = -(\lambda + \mu + \nu - 3 + \delta) - 2 = -(\lambda + \mu + \nu + \delta - 1),$$

worin ρ noch zu bestimmen ist. Aus (14) findet man durch direkte Rechnung

$$(15) \qquad \begin{aligned} [z, T] = {} & \frac{1 - \lambda^2}{2(T - A')^2} + \frac{1 - \mu^2}{2(T - B')^2} - \frac{2(\lambda - 1)(\mu - 1)}{2(T - A')(T - B')} \\ & + \frac{1 - \rho^2}{2T^2} - \frac{(\rho - 1)}{T} \left(\frac{\lambda - 1}{T - A'} + \frac{\mu - 1}{T - B'} \right). \end{aligned}$$

Zum Vergleich möge zunächst die Schwarzsche Gleichung (13) in der üblichen Weise abgeleitet werden.[1] Entwickelt man den Ausdruck $[z, Z]$ nach Potenzen von Z und sondert an den Stellen $Z = A$ und $Z = B$ die unendlich werdenden Glieder aus, so kann man offenbar setzen:

$$(16) \qquad \begin{aligned} [z, Z] = {} & \frac{1 - \lambda^2}{2(Z - A)^2} + \frac{1 - \mu^2}{2(Z - B)^2} + \frac{a}{Z - A} \\ & + \frac{b}{Z - B} + C + \mathfrak{P}(Z), \end{aligned}$$

[1] Bei Schwarz und Klein (a. a. O. S. 77 f.) wird $A = 1$ und $B = 0$ angenommen. Bei letzterem ist offenbar in der Bezeichnung der Variabeln eine Verwirrung vorgekommen; deshalb wurde im Texte die Ableitung wiederholt. Schwarz gibt nicht eine ausführliche Begründung.

wo $\mathfrak{P}$ eine Potenzreihe bedeutet. Durch die Transformation $Z = T^{-1}$ und mit Rücksicht auf die Relation $[z, T] = [z, Z]\, T^{-4}$ wird dieses

$$\begin{aligned}[z, T] &= \frac{1-\lambda^2}{2(1-AT)^2}\cdot\frac{1}{T^2} + \frac{1-\mu^2}{2(1-BT)^2}\cdot\frac{1}{T^2}\\ &\quad + \frac{a}{1-AT}\cdot\frac{1}{T^3} + \frac{b}{(1-BT)}\cdot\frac{1}{T^3} + \frac{C}{T^4} + \mathfrak{P}_1(T),\end{aligned} \tag{17}$$

wo $\mathfrak{P}_1$ auch im Unendlichen ($T = 0$) keine Singularität aufweist, folglich eine Konstante ist, die mit C vereinigt gedacht wird. Da die dritte Ecke des Dreiecks (mit dem Winkel $\nu\pi$) im Unendlichen liegen soll, also jetzt an der Stelle $T = 0$ sich befindet, muß bei Entwicklung nach steigenden Potenzen von T das mit T^{-2} beginnende Anfangsglied den Koeffizienten $\frac{1-\nu^2}{2}$ haben, wie an den Stellen $Z = A$ und $Z = B$ die Koeffizienten $\frac{1-\lambda^2}{2}$ und $\frac{1-\mu^2}{2}$ auftreten. Der Koeffizient von T^{-4} ist folglich $= 0$, d. h. $C = 0$, ebenso der Faktor von T^{-3}, also $a + b = 0$. Für den Faktor von T^{-2} ist zu beachten, daß auch die Entwicklung der Summe $\frac{a}{Z-A} + \frac{b}{Z-B}$ infolge der Bedingung $a + b = 0$ mit T^{-2} beginnt. Es ist nämlich

$$\begin{aligned}\frac{1}{T^3}\cdot\frac{a(1-BT)+b(1-AT)}{(1-AT)(1-BT)} &= -\frac{1}{T^2}\cdot\frac{aB+bA}{(1-AT)(1-BT)}\\ &= \frac{a}{T^2}\cdot\frac{A-B}{(1-AT)(1-BT)}.\end{aligned}$$

Bei der Entwicklung ist also der Faktor von T^{-2} gleich

$$\frac{1-\lambda^2}{2} + \frac{1-\mu^3}{2} + a(A-B).$$

Dieser Ausdruck soll gleich $\frac{1-\nu^2}{2}$ werden; es bestimmt sich also a durch die Gleichung:

$$a(A-B) = \frac{1}{2}(\lambda^2 + \mu^2 - \nu^2 - 1),$$

und die Gleichung (17) wird

$$(18)\qquad [z, T] = \left[\frac{1-\lambda^2}{2(1-AT)^2} + \frac{1-\mu^2}{2(1-BT)^2} + \frac{\lambda^2+\mu^2-\nu^2-1}{2\,(1-AT)\,(1-BT)}\right]\frac{1}{T^2},$$

woraus die Schwarzsche Gleichung (13) hervorgeht, wenn man von T zur Variablen Z zurückkehrt.

Hiermit ist der Weg vorgezeigt, wie in diesem Falle die in manchen Fällen notwendigen ergänzenden Glieder zu bilden sind, die auf der rechten Seite der Gleichung (15) hinzugefügt werden sollen. Analog zu (17) und (18) haben wir:

$$[z, T] = \frac{1-\lambda^2}{2(1-AT)^2}\cdot\frac{1}{T^2} + \frac{1-\mu^2}{2(1-BT)^2}\cdot\frac{1}{T^2} - \frac{2(\lambda-1((\mu-1)}{2(1-AT)(1-BT)}\cdot\frac{1}{T^2} + \frac{a'}{1-AT}\cdot\frac{1}{T^3} + \frac{b'}{1-BT}\cdot\frac{1}{T}$$

mit der Bedingung $a' + b' = 0$. Der Faktor von T^{-2} wird jetzt

$$\frac{1-\lambda^2}{2} + \frac{1-\mu^2}{2} - (\lambda-1)(\mu-1) + a'(A-B) = \frac{1-\nu^2}{2},$$

wodurch a' bestimmt ist und wodurch die Gleichung (15) auf die Gleichung (13) zurückgeführt wird.

Vorstehendes Beispiel zeigt, wie man die Schwierigkeiten überwinden kann, die sich bei meinen allgemeinen Ansätzen bieten, sobald Ecken in der Begrenzung auftreten.

§ 9. Allgemeine Kreisbogen-Polygone.

Nach diesen Vorbereitungen wird man die kurzgefaßten nachfolgenden Entwicklungen leicht verfolgen können. Wir knüpfen zunächst an die Betrachtungen an, die für $n = 3$ in § 8 mit der Gleichung (17) begannen. Es genügt, wenn im folgenden $n = 4$ gewählt wird, da daraus das allgemeine Gesetz hinreichend erkennbar ist.

Es seien also A, B, C, D die reellen Bilder der vier Ecken und $\lambda\pi$, $\mu\pi$, $\nu\pi$, $\varkappa\pi$ die zugehörigen Winkel. Den Punkt D

legen wir in den unendlich fernen Punkt der Achse $Y=0$; dann tritt an Stelle von (17) die Gleichung:

$$
\begin{aligned}
[z, T] = {} & \frac{1-\lambda^3}{2(1-AT)^3}\cdot\frac{1}{T^2}+\frac{1-\mu^2}{2(1-BT)^2}\cdot\frac{1}{T^2}+\frac{1-\nu^2}{2(1-CT)^2}\cdot\frac{1}{T^2} \\
(1) \qquad & +\frac{a}{1-AT}\cdot\frac{1}{T^3}+\frac{b}{1-BT}\cdot\frac{1}{T^3}+\frac{c}{1-CT}\cdot\frac{1}{T^3}+\frac{C'}{T^4}.
\end{aligned}
$$

Denkt man sich sämtliche Glieder in der Umgebung des Punktes $T=0$ nach steigenden Potenzen von T entwickelt, so ergibt sich der Faktor von T^{-4}, d. h. C, gleich Null, und der Faktor von T^{-3}:

$$
(2) \qquad a+b+c=0.
$$

Der Faktor von T^{-2} wird

$$
(3) \qquad \frac{1-\lambda^2}{2}+\frac{1-\mu^2}{2}+\frac{1-\nu^2}{2}+aA+bB+cC.
$$

Die Stelle $T=0$ (d. h. $Z=\infty$) ist mit den Stellen A, B, C gleichberechtigt, so daß der Wert (3) andererseits gleich $\frac{1-\varkappa^2}{2}$ sein muß. Somit wird

$$
(4) \qquad aA+bB+cC=\frac{1}{2}[\lambda^2+\mu^2+\nu^2-\varkappa^2-2].
$$

Diese Relation genügt aber nicht zur Bestimmung der Konstanten a, b, c im Gegensatz zu der entsprechenden Gleichung beim Dreieck. Wir schlagen deshalb einen anderen Weg ein.

Allgemeine Überlegungen führen jetzt zu folgendem Ansatze, denn es muß volle Symmetrie in bezug auf die vier Ecken herrschen, und es muß, wenn $Z=T^{-1}$ gesetzt wird, die höchste negative Potenz von T gleich T^{-2} sein, und drittens es muß für $\varkappa=1$ sich die Formel (11) § 8 für das Kreisbogendreieck ergeben. Sei zur Abkürzung

$$
\lambda'=\frac{1-\lambda^2}{2},\quad \mu'=\frac{1-\mu^2}{2},\quad \nu'=\frac{1-\nu^3}{2},\quad \varkappa'=\frac{1-\varkappa^2}{2},
$$

$$
Z_1=Z-A,\quad Z_2=Z-B,\quad Z_3=Z-C,\quad Z_4=Z-D,
$$

$$
a_{12}=-a_{21}=A-B,\quad a_{23}=-a_{32}=B-C,\ a_{24}=-a_{42}=B-D
$$

u. s. f.

Allgemein machen wir jetzt für ein Viereck, als Verallgemeinerung der Kleinschen Gleichung (11) § 8 für ein Dreieck, den folgenden Ansatz:

$$
(5)\quad \begin{aligned}
4\,[z, Z] = {} & \frac{1}{Z_1 Z_2 Z_3}\left[\frac{\lambda'}{Z_1} a_{12} a_{13} + \frac{\mu'}{Z_2} a_{21} a_{23} + \frac{\nu'}{Z_3} a_{31} a_{32} + \quad * \quad\right] \\
& + \frac{1}{Z_1 Z_2 Z_4}\left[\frac{\lambda'}{Z_1} a_{12} a_{14} + \frac{\mu'}{Z_2} a_{21} a_{24} + \quad * \quad + \frac{\varkappa'}{Z_4} a_{41} a_{42}\right] \\
& + \frac{1}{Z_1 Z_3 Z_4}\left[\frac{\lambda'}{Z_1} a_{13} a_{14} + \quad * \quad + \frac{\nu'}{Z_3} a_{31} a_{34} + \frac{\varkappa'}{Z_4} a_{41} a_{43}\right] \\
& + \frac{1}{Z_2 Z_3 Z_4}\left[\quad * \quad + \frac{\mu'}{Z_2} a_{23} a_{24} + \frac{\nu'}{Z_3} a_{32} a_{33} + \frac{\varkappa'}{Z_4} a_{42} a_{43}\right].
\end{aligned}
$$

Für $\varkappa' = 0$ $(\varkappa = 1)$ wird der Winkel bei D gleich 180°, so daß D nicht singulär ist. Es müßte also Gleichung (5) für jeden beliebigen Randpunkt D bestehen, d. h. es müßten alle Glieder mit dem Index 4 identisch fortfallen, so daß in der Tat die Gleichung für das Dreieck stehen bleibt.

Der Zahlenfaktor der linken Seite ist so bestimmt, daß z. B. der Faktor von $\dfrac{1}{(Z-A)^2}$ auf der rechten Seite gleich $\dfrac{1-\lambda^2}{2}$ wird (vgl. unten). Lassen wir jetzt D ins Unendliche rücken, so entsteht diejenige Gleichung, welche für ein Viereck der von Schwarz für ein Dreieck aufgestellten Gleichung (3) § 8 entspricht.

Für $D = \infty$ wird jetzt z. B.

$$
\frac{a_{24}}{Z_4} = \frac{B-D}{Z-D} = 1, \qquad \frac{a_{41} a_{42}}{Z_4^2} = \frac{(D-A)\,(D-B)}{(Z-D)^2}.
$$

Die erste Horizontalreihe der rechten Seite von (5) bleibt ungeändert; die anderen drei Reihen werden:

$$
(6)\quad \begin{aligned}
& \frac{1}{Z_1 Z_2}\left[\frac{\lambda'}{Z_1} a_{12} + \frac{\mu'}{Z_2} a_{21} + \varkappa'\right] + \frac{1}{Z_1 Z_3}\left[\frac{\lambda'}{Z_1} a_{13} + \frac{\nu'}{Z_3} a_{31} + \varkappa'\right] \\
& \qquad + \frac{1}{Z_2 Z_3}\left[\frac{\mu'}{Z_2} a_{23} + \frac{\nu'}{Z_3} a_{32} + \varkappa'\right].
\end{aligned}
$$

Hierin ist

$$\frac{1}{Z_1 Z_2} = \frac{1}{a_{12}}\left(\frac{1}{Z_1} - \frac{1}{Z_2}\right), \qquad \frac{1}{Z_1 Z_3} = \frac{1}{a_{13}}\left(\frac{1}{Z_1} - \frac{1}{Z_3}\right),$$
$$\frac{1}{Z_2 Z_3} = \frac{1}{a_{23}}\left(\frac{1}{Z_2} - \frac{1}{Z_3}\right).$$

Setzt man dies ein und führt die Multiplikation der Klammer in (6) aus, so ergibt sich für diesen Ausdruck:

$$2\left(\frac{\lambda'}{Z_1^2} + \frac{\mu'}{Z_2^2} + \frac{\nu'}{Z_3^2}\right) - \frac{\lambda' + \mu' - \varkappa'}{Z_1 Z_2} - \frac{\lambda' + \nu' - \varkappa'}{Z_1 Z_3} - \frac{\mu' + \nu' - \varkappa'}{Z_2 Z_3}.$$

Der entsprechende Wert der ersten Horizontalreihe von (5) ist aus der Gleichung (13) § 8 zu entnehmen. So wird die Differentialgleichung eines Kreisbogenvierecks für den Fall, daß das Bild der vierten Ecke (mit dem Winkel $\varkappa\pi$) im Unendlichen liegen soll:

$$4\,[z, Z] = 4\left[\frac{\lambda'}{Z_1^2} + \frac{\mu'}{Z_2^2} + \frac{\nu'}{Z_3^2}\right] - \frac{2\lambda' + 2\mu' - \nu' - \varkappa'}{Z_1 Z_2}$$
$$- \frac{2\lambda' + 2\nu' - \mu' - \varkappa'}{Z_1 Z_3} - \frac{2\mu' + 2\nu' - \lambda' - \varkappa'}{Z_2 Z_3}.$$

Hiermit dürfte das allgemeine Gesetz zur Bildung der Differentialgleichung dritter Ordnung für ein beliebiges Kreisbogen-Polygon hinreichend klargestellt sein.

Für n Ecken mit den Winkeln $\lambda_1\pi, \lambda_2\pi, \ldots \lambda_n\pi$ wird man erhalten:

$$n\,[z, Z] = \sum_i \sum_k \sum_h \frac{1}{Z_i Z_k Z_h}\left[\frac{1}{Z_i}\lambda_i' a_{ik} a_{ih} + \frac{1}{Z_k}\lambda_k' a_{ki} a_{kh} + \frac{1}{Z_h}\lambda_h' a_{hi} a_{hk}\right].$$