BAYERISCHE AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN
MATHEMATISCH-NATURWISSENSCHAFTLICHE KLASSE

SITZUNGSBERICHTE

JAHRGANG

1971

MÜNCHEN 1972

VERLAG DER BAYERISCHEN AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN

In Kommission bei der C. H. Beck'schen Verlagsbuchhandlung München

Normalität bei $\mathfrak{k}$-ordinären Bogen

Von Hermann Künneth in Erlangen

1. Bei der Untersuchung der globalen und lokalen Struktur von Bogen und Kurven mittels eines Systems $\mathfrak{k}$ von Ordnungscharakteristiken (OCh) wird häufig die Normalität der Bogen und Kurven bezüglich des Systems $\mathfrak{k}$ verlangt (z. B. beim Kontraktions- oder beim $(n+1)$-Scheitelsatz [*1*, S. 47 u. 179]). Hier soll eine für diese Normalität hinreichende Bedingung gegeben werden, welche bei vielen einschlägigen Betrachtungen als erfüllt angenommen wird. Daß diese Bedingung im allgemeinen nicht trivial ist, wurde an anderer Stelle gezeigt [2].

Vorgegeben ist als Grundgebiet G die projektive Ebene oder das topologische Bild einer Kreisscheibe, das von einer Jordankurve J begrenzt ist. Die OCh sind einfache (geschlossene) Kurven oder Bogen in G; die beiden Endpunkte eines Bogens liegen auf J. Jedem System $\mathfrak{k}$ von OCh ist eine Grundzahl $k = k(\mathfrak{k})$ zugeordnet $(k \geq 1)$.

2. Für die OCh sollen folgende Axiome gelten:

Axiom 1. Jede OCh K ist durch k ihrer Punkte $x_1, x_2, \ldots, x_k$ eindeutig bestimmt und kann mit $K(x_1, x_2, \ldots, x_k)$ bezeichnet werden.

Axiom 2. Ist $K \in \mathfrak{k}$ und sind $x_1, x_2, \ldots, x_k$ verschiedene Punkte in K, so gibt es Umgebungen $U(x_\lambda)$ von x_λ in G, $\lambda = 1, 2, \ldots, k$, mit $U(x_\lambda) \cap U(x_\mu) = \emptyset$ für $\lambda \neq \mu$ derart, daß für beliebige $x'_\lambda \in U(x_\lambda)$ eine OCh $K' = K(x'_1, x'_2, \ldots, x'_k)$ existiert. Entspricht einer Orientierung von K die Reihenfolge $x_1 < x_2 < \ldots < x_k$, so gibt es eine Orientierung von K', so daß in K' aufeinander folgen $x'_1 < x'_2 < \ldots < x'_k$. Dabei bedeutet $x_i < x_j$, daß x_i vor x_j auf K liegt.

3. Normalität. Es sei nun B eine einfache Kurve oder ein einfacher Bogen in G und $K \in \mathfrak{k}$. Enthält $K \cap B$ nur Schnittpunkte, so sagt man B und K liegen im engeren bzw. weiteren Sinn zu einander normal, wenn Folgendes der Fall ist: Die

Schnittpunkte seien $x_1, x_2, \ldots, x_r$ $(r \geq k)$ und bei einer Orientierung von B sei $x_1 < x_2 < \ldots < x_r$ auf B. Dann gibt es eine Orientierung von K derart, daß die Schnittpunkte in dieser Reihenfolge bzw. bei Normalität im weiteren Sinn bei einer zyklischen Vertauschung auch auf K direkt aufeinander folgen. In letzterem Fall ist $x_{\nu+1} < x_{\nu+2} < \ldots < x_{\nu+r}$ auf K mit $1 \leq \nu \leq$ $\leq r - 1$, $x_{r+i} = x_i$ [*1*, S. 185]. Ist K eine Kurve, so folgt die Normalität im engeren Sinn aus der im weiteren Sinn [*1*, S. 39]. Für $r \leq 3$ liegt immer Normalität im engeren oder weiteren Sinn vor. Ist B zu allen $K \in \mathfrak{k}$ normal, so heißt B normal zu $\mathfrak{k}$ (im engeren oder weiteren Sinn).

4. Ordinarität. Ein Bogen oder eine Kurve B wird als $\mathfrak{k}$-ordinär bezeichnet, wenn es durch beliebige $\mathfrak{k}$ (verschiedene) Punkte von B immer eine OCh $K \in \mathfrak{k}$ gibt [*2*, S. 409]. Wir fordern hier noch etwas mehr.

Axiom 3. Verschärfte Ordinarität. Es sei B ein Bogen (Kurve) in G und $x_{1,n}, x_{2,n}, \ldots, x_{k,n} \in B$, $n = 1, 2, \ldots$, $x_{i,n} \neq x_{j,n}$ für $i \neq j$. Ferner sei $\lim\limits_{n \to \infty} x_{i,n} = x_i$, wobei die $x_i (i = 1, 2, \ldots, k)$ alle bis auf höchstens ein Punktepaar verschieden sein sollen. Dann ist

$$K_n = K(x_{1,n}, x_{2,n}, \ldots, x_{k,n}) \in \mathfrak{k} \text{ und } \lim_{n \to \infty} K_n = K^\circ \in \mathfrak{k}.$$

Stetige Änderung der OCh wie in [*1*, Axiom II (2), S. 9] wird hier nicht verlangt. Ist B $\mathfrak{k}$-ordinär, dann ist das Axiom 3 immer erfüllt für den Fall, daß alle $x_i (i = 1, 2, \ldots, k)$ verschieden sind.

Abkürzend bezeichnen wir einen von den Punkten p und q begrenzten Teilbogen von B mit $B(p\,|\,q)$ und setzen

$$B(p\,|\,q) - \{p\} - \{q\} := \underset{\sim}{B}(p\,|\,q).$$

5. Satz. Vor. 1) *Es gelten die Axiome* 1 *und* 2 *für die OCh.* – 2) *Es sei B ein $\mathfrak{k}$-ordinärer orientierter Bogen (Kurve) in G, der Axiom* 3 *erfüllt.*

Beh. *Es ist B zu $\mathfrak{k}$ normal in engerem oder weiterem Sinn.*

Zusatz. Wenn K eine Kurve ist oder wenn G topologisches Bild einer Kreisscheibe und $k \equiv 0 \pmod 2$, $k \geq 4$ ist, folgt aus den Voraussetzungen die Normalität im engeren Sinn von B.

Beweis des Satzes (indirekt). Wir nehmen an, es gäbe ein $K \in \mathfrak{k}$, so daß $K \frown B$ nur Schnittpunkte enthält und K nicht normal im engeren oder weiteren Sinn zu B ist. Da bei höchstens drei Schnittpunkten immer Normalität im weiteren Sinn vorliegt, können wir ferner annehmen, $B \frown K$ enthalte r Schnittpunkte mit $r \geq k$, $r \geq 4$ in der Reihenfolge $x_1 < x_2 < \ldots < x_r$ auf B. Wenn K nicht normal zu B in engerem oder weiterem Sinn ist, gibt es zwei Schnittpunkte x_i und $x_{i+1} (1 \leq i \leq r-1)$ mit $\underset{\sim}{B}(x_i \,|\, x_{i+1}) \frown K\ \emptyset$ und einen Teilbogen $K(x_i \,|\, x_{i+1})$ mit $\underset{\sim}{K}(x_i \,|\, x_{i+1}) \frown B \neq \emptyset$. Ist $(K - K(x_i \,|\, x_{i+1})) \frown B = \emptyset$, so enthält der abgeschlossene Bogen $K(x_i \,|\, x_{i+1}) = T$ alle Punkte $x_j (j = 1, 2, \ldots, r)$. Gäbe es für jedes weitere in B direkt aufeinander folgende Schnittpunktpaar $x_j, x_{j+1} (1 \leq j \leq r-1, j \neq i)$ einen Bogen $K(x_j \,|\, x_{j+1})$ mit $\underset{\sim}{K}(x_j \,|\, x_{j+1}) \frown B = \emptyset$, so wäre T und damit auch K zu B normal im weiteren Sinn. Es sei also $\underset{\sim}{K}(x_j \,|\, x_{j+1}) \frown B \neq \emptyset$. Da $K(x_j|x_{j+1})$ echter Teilbogen von T, gibt es einen Schnittpunkt $x_\mu \notin K(x_j \,|\, x_{j+1})$, also $x_\mu \in (K - K(x_j \,|\, x_{j+1})) \frown B$.

Wir können daher annehmen $\underset{\sim}{K}(x_i \,|\, x_{i+1}) \frown B \neq \emptyset$ und $(K - K(x_i \,|\, x_{i+1})) \frown B \neq \emptyset$ $(1 \leq i \leq r-1)$. Es gibt also ein $x_\varrho \in \underset{\sim}{K}(x_i \,|\, x_{i+1})$ und $x_\sigma \in (K - K(x_i \,|\, x_{i+1})) \frown B (1 \leq \varrho, \sigma \leq r)$. Bei entsprechender Orientierung von K ist dann $x_\varrho < x_i < x_\sigma < < x_{i+1}$ auf K (wobei x_i und x_{i+1} auch vertauscht sein können). Wir halten nun $x_\varrho, x_\sigma, x_{i+1}$ und weitere $k-4$ Punkte $y_1, y_2, \ldots, y_{k-4}$ aus $K \frown B$ fest und lassen x_i auf B stetig gegen x_{i+1} gehen. Der bewegliche Punkt werde mit x_i' bezeichnet. Da B $\mathfrak{k}$-ordinär ist, existieren die OCh $K' = K(x_\varrho, x_\sigma, x_i'\, x_{i+1}, y_1, y_2, \ldots, y_{k-4})$ und nach Axiom 3 ist $\lim\limits_{i \to i+1} K' = K^0 \in \mathfrak{k}$. Nach Axiom 2 ist $x_\varrho < x_i' < x_\sigma < x_{i+1}$ auf K' bei entsprechender Orientierung von K und $x_\varrho < x_{i+1} < x_\sigma < x_{i+1}$ auf K^0. Es hätte also K^0 einen Doppelpunkt, was der Eigenschaft einer OCh einfacher Bogen (einfache Kurve) zu sein widerspricht.

5.1. Beweis des Zusatzes. Ist K Kurve, so folgt die engere Normalität aus der weiteren. Ist K normal im weiteren Sinn zu B und folgen auf K die Punkte in der Reihenfolge $a < x_{i+1} < < x_{i+2} < \ldots < x_{i+r} < e$, wobei a und e Anfangs- und Endpunkt von K seien $(1 \leq i \leq r-1,\ x_{r+\nu} = x_\nu)$, so hält man wieder

x_{i+1} und weitere $k - 2$ Punkte $x_j (1 \leq j \leq r, i \neq j \neq i+1)$ fest und läßt x_i auf B stetig gegen x_{i+1} gehen. Man erhält im Limes wieder eine OCh K^0. Da K^0 keinen Doppelpunkt haben kann, müßte $K(a \mid x_{i+1}) \cup K(x_i \mid e)$ zu einem zusammenhängenden Bogen werden, der in K^0 verschwindet. Es wäre K^0 eine Kurve. Bei geradem k kann aber, wenn G topologisches Bild einer Kreisscheibe ist, eine OCh keine Kurve sein [*1*, S. 21].

5.2. Ist B eine Kurve, die im weiteren Sinn normal zu $K \in \mathfrak{k}$ ist, so läßt sich durch zyklische Permutation der Numerierung der Schnittpunkte immer die Normalität im engeren Sinn von K zu B erreichen und umgekehrt [*1*, S. 39], woraus nach *5.1.* folgt, daß bei geradem $k \geq 4$ keine Kurve B das Axiom 3 erfüllen kann, wenn das Grundgebiet topologisches Bild einer Kreisscheibe ist.

Literatur

[1] Haupt-Künneth: Geometrische Ordnungen. Berlin-Heidelberg-New-York 1967.

[2] Haupt-Künneth: Über sogenannte entartete Mengen bei Juelschen Problemen in der Ebene. Manuscripta mathematica, 3, 391–412 (1970).