

BAYERISCHE AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN
MATHEMATISCH-NATURWISSENSCHAFTLICHE KLASSE

SITZUNGSBERICHTE

JAHRGANG

1970

MÜNCHEN 1971

VERLAG DER BAYERISCHEN AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN

In Kommission bei der C.H. Beck'schen Verlagsbuchhandlung München

Gesamtdefekt und Krümmungsmittelwerte bei meromorphen Funktionen

Von Fritz Gackstatter in Würzburg

Mit 2 Abbildungen

Einleitung

In dieser Arbeit beschäftigen wir uns mit in der punktierten Ebene oder im Einheitskreis meromorphen Funktionen. Die charakteristischen Größen der Nevanlinnaschen Theorie –

$$T(r, f), N(r, a), m(r, a), \delta(a) \text{ usw. –}$$

seien als bekannt vorausgesetzt. Wie im Summar angekündigt, werden folgende drei Fragenkreise behandelt:

1. Welche Rolle spielt die log. Ableitung $\frac{f'}{f}$ in der Theorie der meromorphen Funktionen? Die dabei erhaltenen Ergebnisse benützen wir wesentlich in den beiden dann folgenden, mehr geometrischen Untersuchungen.
2. Zuerst arbeiten wir mit den Betragflächen $(x, y, |f(x + iy)|)$ und zeigen, daß die Gaußsche Krümmung K dieser Flächen und die Werteverteilung der zugehörigen Funktionen in Zusammenhang stehen.
3. Das gleiche gilt auch für die ebene Krümmung k der in der w -Ebene liegenden Kurven $f(re^{i\vartheta})$ (ϑ Kurvenparameter).

Diese drei Fragenkreise werden in den drei Teilen dieser Arbeit behandelt.

Für die Anregung zu dieser Arbeit und für deren Förderung danke ich meinem verehrten Lehrer, Herrn Prof. Dr. Hermann Schmidt.

1. Über die log. Ableitung einer meromorphen Funktion¹

Es sei zuerst an die beiden Hauptsätze der Theorie der meromorphen Funktionen von Rolf Nevanlinna erinnert:

¹ Man beachte in diesem Zusammenhang insbesondere die Arbeit von Egon Ullrich: Über die Ableitung einer meromorphen Funktion, [17].

Erster Hauptsatz von R. Nevanlinna

Für jede Stellensorte a genügen Anzahlfunktion $N(r, a)$ und Schmiegefunktion $m(r, a)$ der Gleichung

$$(1) \quad N(r, a) + m(r, a) = T(r, f) + O(1).$$

Zweiter Hauptsatz von R. Nevanlinna

Die Verzweigungsgrößen der Wertverteilungslehre genügen der Ungleichung

$$(2) \quad N_1(r) + \left\{ m\left(r, \frac{1}{f}\right) + \sum_{\substack{k=1 \\ a_k \neq 0}}^q m\left(r, \frac{1}{f - a_k}\right) + m(r, f) \right\} \leq \\ \leq 2 T(r, f) + S(r, f)^1.$$

Dabei sind die a_k q untereinander verschiedene, aber sonst beliebige Stellensorten $\neq 0, \infty$. Für $S(r, f)$ gilt:

- a) im Falle $R = \infty$: $S(r, f) = O\{\lg(r T(r, f))\}$ für $r \rightarrow \infty$ für alle r -Werte, wenn $f(z)$ von endlicher Ordnung ist, andernfalls für alle r -Werte außerhalb einer Menge von endlichem linearen Maß;
- b) im Falle $R = 1$: $S(r, f) = O\left\{\lg^+ T(r, f) + \lg \frac{1}{1-r}\right\}$ für $r \rightarrow 1$ außerhalb einer Menge E derart, daß $\int_E \frac{dr}{1-r} < \infty$.

1.1 Eine Gleichung

Untersucht man die beiden Weierstraßschen Funktionen σ und $\xi = \frac{\sigma'}{\sigma}$ im Sinne der Wertverteilungslehre, so wird man veranlaßt, die Größe $m\left(r, \frac{f}{f'}\right)$ näher zu betrachten und man erhält (Verf. [3])

Satz 1

Die charakteristischen Größen der Wertverteilungslehre genügen der Gleichung

¹ Wir haben diese Schreibweise in Hinblick auf Satz 1 so gewählt.

(3)

$$N_1(r) + \left\{ m\left(r, \frac{1}{f}\right) + m\left(r, \frac{f}{f'}\right) + m(r, f) \right\} = 2 T(r, f) + S(r, f)^1.$$

Beweis von Satz 1

Wir gehen aus von der Charakteristik der log. Ableitung und wenden den 1. Hauptsatz an²:

(4)

$$N\left(r, \frac{f}{f'}\right) + m\left(r, \frac{f}{f'}\right) + O(1) = T\left(r, \frac{f}{f'}\right) = N\left(r, \frac{f'}{f}\right) + m\left(r, \frac{f'}{f}\right).$$

Wir stellen uns jetzt die Aufgabe, die links und rechts stehenden Größen möglichst durch auf $f(z)$ bezogene Größen auszudrücken. Von rechts nach links:

a) $m\left(r, \frac{f'}{f}\right) = S(r, f)$ nach dem Satz von Nevanlinna

b) $N\left(r, \frac{f'}{f}\right) = \bar{N}(r, f) + \bar{N}\left(r, \frac{1}{f}\right).$

Beweis: $\frac{f'}{f}$ hat einfache Pole dort, wo f selbst Nullstellen oder Pole hat.

c) $N\left(r, \frac{f}{f'}\right) = N\left(r, \frac{1}{f'}\right) - N_1\left(r, \frac{1}{f'}\right).$

Beweis: $N\left(r, \frac{f}{f'}\right)$ zählt die Nullstellen von f' überall, wo $f \neq 0$.

Ist $f = 0$, so wird von $N\left(r, \frac{f}{f'}\right)$ nichts gezählt. Darum tritt rechts das Korrekturglied $-N_1\left(r, \frac{1}{f'}\right)$ auf.

Eingesetzt in (4) ergibt bei Beachtung von $N_1\left(r, \frac{1}{f}\right) + \bar{N}\left(r, \frac{1}{f}\right) = N\left(r, \frac{1}{f}\right)$ eine noch öfter zu benützende Gleichung für $m\left(r, \frac{f}{f'}\right)$:

(5) $N\left(r, \frac{1}{f'}\right) + m\left(r, \frac{f}{f'}\right) = N\left(r, \frac{1}{f}\right) + \bar{N}(r, f) + S(r, f).$

Addieren wir noch links und rechts $N_1(r, f) + m\left(r, \frac{1}{f}\right) + m(r, f)$, so erhalten wir die gewünschte Gleichung (3), die ähnlich gebaut ist wie der 2. Hauptsatz.

¹ Für $S(r, f)$ gelten hier und im folgenden immer die eben (beim 2. Hauptsatz) kennengelernten Abschätzungen.

² E. Ullrich ist in [17] in ähnlicher Weise von der Charakteristik der Ableitung ausgegangen und hat so seine Hauptungleichung hergeleitet.

Die Gleichung und die Riemannsche Formel

Zum Unterschied zu der Ungleichung des 2. Hauptsatzes kann unsere Gleichung (3) als genaue Verallgemeinerung der Riemannschen Formel für rationale Funktionen angesehen werden:

$$(3^*) \quad \sum (k - 1) = 2P - 2.$$

Hier bedeutet P die Polzahl der rationalen Funktion $f(z)$, oder, was dasselbe ist, die gesamte Blätterzahl der von ihr über der w -Ebene erzeugten Riemannschen Fläche, während k für jeden Verzweigungspunkt die Zahl der dort zusammenhängenden Blätter ist. Im einzelnen wird jetzt

$$a) N_1(r) = \sum_{\alpha} (k - 1) \cdot \lg r + O(1),$$

$$b) \left\{ m\left(r, \frac{1}{f}\right) + m\left(r, \frac{f}{f'}\right) + m(r, f) \right\} = (k_{\infty} + 1) \cdot \lg r + O(1),$$

$$c) T(r, f) = P \cdot \lg r + O(1),$$

$$d) S(r, f) = m\left(r, \frac{f'}{f}\right) + O(1) = O(1),$$

woraus (3*) folgt. Durch eine an Ullrich [17, Formel (10)] anschließende Sonderbetrachtung hat Wittich [20, S. 3] den entsprechenden Übergang vollzogen.

1.2 Die Gleichung und das Gesamtdefektproblem

Satz 1 erlaubt, zum Gesamtdefektproblem¹ Stellung zu nehmen. R. Nevanlinna hat anhand der Funktion

$$g(z) = \int_0^z e^{e^t} dt$$

auf einen gewissen Mangel in den Defektrelationen aufmerksam gemacht: die Verzweigungen der zu $g(z)$ gehörigen Riemannschen Fläche sind im Endlichen und Unendlichen gleich stark, trotzdem sind die Defektrelationen nicht imstande, den Verzweigungscharakter im Endlichen zum Ausdruck zu bringen. Man hätte darum neben der Defektsumme

¹ Näheres hierzu siehe R. Nevanlinna [11, S. 272], E. Ullrich [17] H. Wittich [20, S. 28],

$$\sum \delta(a_k) = \sum \varliminf \frac{m(r, a_k)}{T(r, f)}$$

gerne eine Gesamtschmiegun g und einen Gesamtdefekt, ähnlich wie man bei der algebraischen Verzweigth eit neben der Indexsumme

$$\sum \vartheta(a_k) = \sum \varliminf \frac{N_1(r, a_k)}{T(r, f)}$$

eine Gesamtverzweigth eit

$$N_1(r) = \left\{ N\left(r, \frac{1}{f'}\right) + N_1(r, f) \right\}$$

und einen Gesamtindex

$$\Phi = \varliminf \frac{N_1(r)}{T(r, f)}$$

hat. Gleichung (3) veranlaßt, folgende Größen als eine Gesamtschmiegun g und Gesamtdefekte in Betracht zu ziehen:

Definition 1

Gesamtschmiegun g $m(r) := \left\{ m\left(r, \frac{1}{f}\right) + m\left(r, \frac{f}{f'}\right) + m(r, f) \right\}$,

Gesamtdefekt $\hat{\delta} := \varliminf_{r \rightarrow R} \frac{m(r)}{T(r, f)}$,

Gesamtdefekt im endlichen Teil der Riemannschen Fläche

$$\hat{\delta}_e := \varliminf_{r \rightarrow R} \frac{\left\{ m\left(r, \frac{1}{f}\right) + m\left(r, \frac{f}{f'}\right) \right\}}{T(r, f)}.$$

Die letzte Größe entspricht dem Gesamtindex im endlichen Teil der Riemannschen Fläche

$$\Phi_e = \varliminf \frac{N\left(r, \frac{1}{f'}\right)}{T(r, f)}.$$

1.3 Drei Gründe für unseren Definitionsvorschlag

1.3.1 Erster Grund ist die in dieser Hinsicht kritische Funktion $g(z)$. Für sie gilt $\hat{\delta}_e = \delta(\infty) = 1$, es kommt also zum Ausdruck, daß sie im Endlichen und Unendlichen gleich stark verzweigt ist.

Beweis

Da $g(z)$ eine ganze Funktion ist, gilt $\delta(\infty) = 1$. Weiter ist wegen Gleichung (3) $\hat{\delta}_e = \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{2T(r, g) - m(r, g) - N\left(r, \frac{1}{g}\right) - N_1(r, g) + S(r, g)}{T(r, g)}$.

Mit $N\left(r, \frac{1}{g}\right) = o$, $N_1(r, g) = o$, $m(r, g) = T(r, g)$ und $S(r, g) = o\{T(r, g)\}$ (da g von unendlicher Ordnung ist, müssen wir eventuell eine r -Menge von endlichem linearen Maß aus unseren Betrachtungen ausschließen¹) folgt $\hat{\delta}_e = 1$, wie gewünscht.

1.3.2 Eine Größe, die das Anschmiegen an alle Zielwerte² einer Funktion f messen soll, darf sich bei einer linearen Transformation von f nicht stark ändern. Darum spricht folgender Satz für unsere Definition:

Satz 2

f sei eine meromorphe Funktion, $Lf = \frac{af+b}{cf+d}$ eine lineare Transformation von f , $m_f(r)$ und $m_{Lf}(r)$ die zugehörigen Gesamtschmiegungen, $\hat{\delta}(f)$ und $\hat{\delta}(Lf)$ die zugehörigen Gesamtdefekte. Dann gilt

$$m_{Lf}(r) = m_f(r) + S(r, f).$$

Weiter gilt für alle Funktionen mit der Eigenschaft $\lim_{r \rightarrow R} \frac{S(r, f)}{T(r, f)} = o^3$

$$\hat{\delta}(Lf) = \hat{\delta}(f).$$

Beweis von Satz 2

Wir schreiben Gleichung (3) für f und für Lf an:

$N_{1;f}(r) + m_f(r) = 2T(r, f) + S(r, f)$ und $N_{1;Lf}(r) + m_{Lf}(r) = 2T(r, Lf) + S(r, Lf)$. Aus $N_{1;Lf}(r) = N_{1;f}(r)$ (die algebraische Gesamtverzweigung ändert sich bei einer linearen Transformation nicht!) und $T(r, Lf) = T(r, f) + O(1)$ folgt dann die erste Behauptung des Satzes, da außerdem $S(r, Lf)$ und $S(r, f)$

¹ Siehe dazu auch die Fußnote 2 in der Arbeit von Ullrich [17].

² Man beachte beim Gebrauch der Begriffe Zielweg und Zielwert Wittich [20, S. 35/36].

³ Siehe dazu W. K. Hayman [6, S. 41].

von der gleichen Größenordnung sind. Die zweite Behauptung ist evident.

1.3.3 Ein weiteres Argument ist

Satz 3

Zwischen der Gesamtschmiegun g einer meromorphen Funktion f und der sphärischen Verzerrung $\frac{|f'|}{1+|f|^2}$ besteht die Relation

$$(6) \quad \left\{ m\left(r, \frac{1}{f}\right) + m\left(r, \frac{f}{f'}\right) + m(r, f) \right\} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \lg \frac{1 + |f(re^{i\vartheta})|^2}{|f'(re^{i\vartheta})|} d\vartheta + S(r, f).$$

Denn aus Satz 3 folgt, daß die Gesamtschmiegun g groß wird, wenn bei der Abbildung $w = f(z)$ das Flächenelement über der w -Kugel klein wird, was der Fall ist, wenn sich die Funktion f Zielwerten anschmiegt.

Beweis von Satz 3

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \lg \frac{1 + |f|^2}{|f'|} d\vartheta &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \lg(1 + |f|^2) d\vartheta + \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \lg \frac{1}{|f'|} d\vartheta = \\ &= 2 \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \lg \sqrt{1 + |f|^2} d\vartheta + N(r, f') - N\left(r, \frac{1}{f'}\right) + O(1). \end{aligned}$$

Dabei wurde der 2. Summand nach der Formel von Jensen umgeformt. Jetzt berücksichtigen wir:

a) $\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \lg \sqrt{1 + |f|^2} d\vartheta$ ist gleich der Ahlfors-Shimizu-

Schmiegefunktion $m_0(r, f)$, die gleich ist $m(r, f) + O(1)$;

b) $N(r, f') = N(r, f) + \bar{N}(r, f)$;

c) $N\left(r, \frac{1}{f'}\right) = N\left(r, \frac{1}{f}\right) + \bar{N}(r, f) - m\left(r, \frac{f}{f'}\right) + S(r, f)$ nach unserer Gleichung (5) für $m\left(r, \frac{f}{f'}\right)$.

Damit erhalten wir

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \lg \frac{1 + |f|^2}{|f'|} d\vartheta &= 2 m(r, f) + N(r, f) - N\left(r, \frac{1}{f'}\right) + \\ &+ m\left(r, \frac{f}{f'}\right) + S(r, f). \end{aligned}$$

Nach dem 1. Hauptsatz gilt $m(r, f) + N(r, f) - N\left(r, \frac{1}{f}\right) = m\left(r, \frac{1}{f}\right) + O(1)$ und wir erhalten das gewünschte Ergebnis, Gleichung (6).

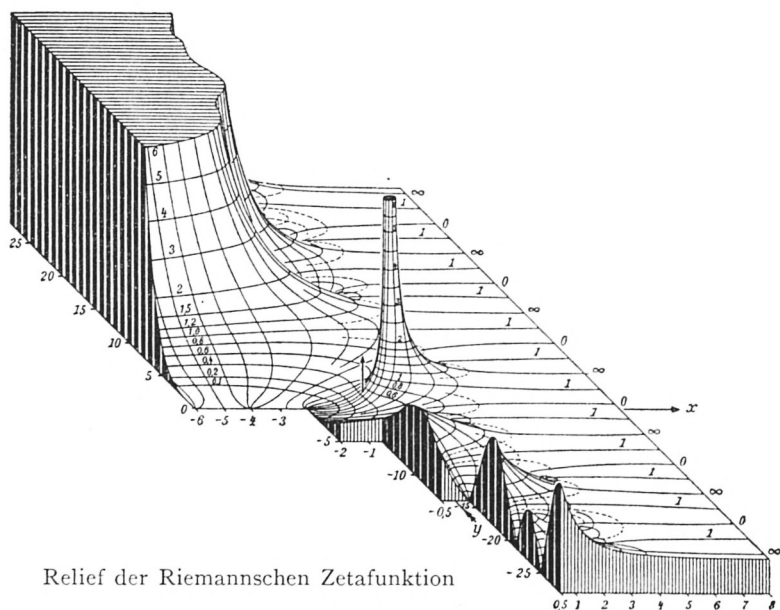
Bemerkung

Damit beschließen wir den 1. Teil. Die beiden Gleichungen (3) und (6) in Satz 1 und Satz 3 werden wir aber sofort wieder benötigen.

2. Über die Gauß'sche Krümmung K der Betragflächen¹⁾

2.1 Vermutung

Betrachtet man die Betragfläche der Riemannschen ζ -Funktion $(\sigma, t, |\zeta(\sigma + it)|)^2$,



Relief der Riemannschen Zetafunktion

¹ Verf. hat inzwischen auch ähnliche Untersuchungen für Realteilflächen angestellt.

² Aus Jahnke-Emde-Lösch [7, S. 37] mit freundlicher Genehmigung der Teubner Verlagsgesellschaft.

so sieht man: in der rechten Halbebene, wo $\zeta(s)$ den Zielwert 1 hat, nähert sich die Fläche immer mehr der Ebene $h = 1$ an, die Krümmung strebt gegen Null. In Formeln: Die Nevanlinna'sche Schmiegegröße $m\left(r, \frac{1}{\zeta-1}\right)$ wird groß, der Betrag der Gaußschen Krümmung $|K|$ wird klein.

Allgemein: Strebt eine Funktion in einem Bereich, z. B. einer Zunge, der z -Ebene gegen einen endlichen Zielwert a , so wird die Betragfläche über diesem Bereich fast wie die Ebene $h = |a|$ aussehen, und zwar wird die Fläche um so ebener ausfallen, je mehr sich die Funktion dem endlichen Zielwert anschmiegt. Um so ebener, daß heißt um so weniger gekrümmt! Es liegt also die Vermutung nahe, daß ein Zusammenhang besteht zwischen der Summe $\sum m\left(r, \frac{1}{f-a}\right)$ und der Gaußschen Krümmung K der zu f gehörigen Betragfläche derart, daß die Summe nur dann sehr groß werden kann, wenn $|K|$ über gewissen Bereichen der z -Ebene sehr klein wird¹.

2.2 Die Krümmungsgleichung für Betragflächen

Einen für funktionentheoretische Untersuchungen geeigneten Ausdruck für das Gaußsche Krümmungsmaß K einer Betragfläche verdankt man Jacobus Zaat [21], einem Schüler von Egon Ullrich (vgl. [19, § 2]):

$$(7) \quad K(z) = \frac{|f''(z)|^2}{(1 + |f'(z)|^2)^2} \Re \left\{ \frac{f'(z)^2}{f(z)f''(z)} - 1 \right\}.$$

Von dieser Formel gehen wir aus. Es wird sich als natürlich erweisen, das Kleinwerden und Großwerden der Krümmung durch folgende Mittelwerte zu messen:

Definition 2

$$m\left(r, \frac{1}{|K|}\right) := \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \lg^+ \frac{1}{|K(re^{i\vartheta})|} d\vartheta^2,$$

¹ Siehe Fußnote 2 auf S. 84.

² Um unnötige Fallunterscheidungen zu sparen, geben wir dem Integral den Wert ∞ , falls $f = de^{\alpha z}$ ($\alpha, d \neq 0$), $bz + c$ ($b \neq 0$), a und damit $K \equiv 0$ (vgl. [19, § 3]) oder falls die Züge $K = 0$ so liegen, daß das Integral für gewisse r -Werte nicht konvergiert.

$$m(r, |K|) := \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \lg^+ |K(re^{i\theta})| d\theta.$$

$m(r, |K|)$ ist eine Größe, die starke Gaußsche Krümmung (elliptisch oder hyperbolisch) auf $|z| = r$ zählt, $m\left(r, \frac{1}{|K|}\right)$ zählt die kleine Krümmung auf $|z| = r$, d. h. sie ist ein Maß für den „parabolischen Charakter“ der Betragfläche.

Das Resultat unserer Untersuchungen ist

Satz 4 (Krümmungsungleichung für Betragflächen)

f sei eine meromorphe Funktion, K die Gaußsche Krümmung der zugehörigen Betragfläche, $m\left(r, \frac{1}{|K|}\right)$ und $m(r, |K|)$ die zugehörigen Krümmungsmittelwerte. Die Nevanlinnaschen Schmiegegrößen genügen dann der Ungleichung

$$(8) \quad m(r, |K|) + \sum_{\substack{p, r \\ i, k \\ \alpha_i, d_k \neq 0}} m\left(r, \frac{1}{f e^{-\alpha_i z} - d_k}\right) + \sum_{\substack{s, t \\ i, k \\ b_i \neq 0}} m\left(r, \frac{1}{f - b_i z - c_k}\right) + \\ + 2 \left\{ \sum_k^q m\left(r, \frac{1}{f - a_k}\right) + m(r, f') \right\} \leq m\left(r, \frac{1}{|K|}\right) + S(r, f)^1.$$

Bemerkungen zur Krümmungsungleichung

Satz 4 bestätigt unsere Vermutung. Denn: Wenn die Summe $\sum m\left(r, \frac{1}{f - a_k}\right)$ groß wird, muß auch $m\left(r, \frac{1}{|K|}\right)$ groß werden, d. h. $|K|$ muß über gewissen Bereichen der z -Ebene klein werden.

Aber auch das Auftreten der beiden anderen Summen in (8), durch die $m\left(r, \frac{1}{|K|}\right)$ nach unten abgeschätzt wird, hat seinen elementargeometrischen Grund. Nach einem Satz von E. Ullrich [19] sind die einzigen meromorphen Funktionen, deren Betragfläche überall verschwindende Gaußsche Krümmung zeigt:

- a) $de^{\alpha z}$ ($\alpha, d \neq 0$), die Betragflächen sind Zylinder;
- b) $bz + c$ ($b \neq 0$), die Betragflächen sind Kegel;
- c) a , die Betragflächen sind Ebenen.

Verhält sich nun eine beliebige meromorphe Funktion über einem Bereich, z. B. einer Zunge, der z -Ebene so ähnlich wie

¹ Zu den Fällen $de^{\alpha z}$, $bz + c$, a : falls wir den entsprechenden Schmiegegrößen den Wert ∞ geben, so bleibt (8) auch in diesen Extremfällen gültig.

- a) $d_k e^{\alpha_i z} (\alpha_i, d_k \neq 0)$, d. h. $f e^{-\alpha_i z} - d_k \rightarrow 0$;
 b) $b_i z + c_k (b_i \neq 0)$, d. h. $f - b_i z - c_k \rightarrow 0$;
 c) a_k , d. h. $f - a_k \rightarrow 0$,

so werden einerseits die drei Summen in (8) groß, andererseits aber auch $m\left(r, \frac{1}{|K|}\right)$, da die Betragfläche über den entsprechenden Bereichen ähnlich ist

- a) Zylindern;
 b) Kegeln;
 c) Ebenen.

Auch das Auftreten des Faktors 2 hat seinen guten Grund. Die Gaußsche Krümmung K einer Fläche kann bekanntlich geschrieben werden als $\frac{1}{R_1} \frac{1}{R_2}$, wenn R_1 und R_2 die Hauptkrümmungsradien sind. Bei den Ebenen sind hier beide Faktoren Null, bei den (eigentlichen) Kegeln und Zylindern nur einer.

2.3 Beweis von Satz 4

2.3.1 Beweisidee und erste Schritte

Ausgangspunkt ist, wie gesagt, die Formel von Zaat

$$(7) \quad K(z) = \frac{|f''|^2}{(1 + |f'|^2)^2} \Re \left\{ \frac{f'^2}{f f''} - 1 \right\}.$$

Wir stehen also vor diesem Ausdruck und wollen ihn mit Nevanlinnaschen Größen der Wertverteilungslehre in Zusammenhang bringen. Da sehen wir rechts den Verzerrungsfaktor $\frac{|f'|}{1 + |f'|^2}$. Dieser steht nach Satz 3, Gleichung (6) in Relation mit der Gesamtschmiegun der Ableitung f' :

$$(6') \quad \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \lg \frac{1 + |f'|^2}{|f''|^2} d\vartheta = \left\{ m\left(r, \frac{1}{f'}\right) + m\left(r, \frac{f'}{f''}\right) + m(r, f') \right\} + S(r, f').$$

Der Zusammenhang ist gefunden, das weitere Vorgehen ist festgelegt!

Aus (7) folgt

$$|K| \frac{(1 + |f'|^2)^2}{|f''|^2} \leq \left| \frac{f'^2 - f f''}{f f''} \right|.$$

Darauf wenden wir den Operator $\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \lg \Phi(re^{i\vartheta}) d\vartheta$ an und erhalten unter gleichzeitiger Berücksichtigung von (6')

$$(9) \quad \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \lg |K(re^{i\vartheta})| d\vartheta + 2 \left\{ m\left(r, \frac{1}{f'}\right) + m\left(r, \frac{f'}{f''}\right) + m(r, f') \right\} + \\ + \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \lg \left| \frac{ff''}{f'^2 - ff''}(re^{i\vartheta}) \right| d\vartheta + S(r, f') \leq 0.$$

Eventuelles Verschwinden von K macht keine Schwierigkeiten, notfalls steht links $-\infty^1$. Diese Ungleichung verknüpft bereits Größen der Wertverteilungslehre mit einer Größe der Differentialgeometrie im Großen.

Wir betrachten jetzt die in (9) auftretende Größe

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \lg |K(re^{i\vartheta})| d\vartheta$$

etwas genauer. Da wir uns insbesondere für das Kleinwerden von $|K|$ interessieren, bietet sich – wie bei der Einführung der Schmiegegrößen von R. Nevanlinna aus dem Jensenschen Integral – in natürlicher Weise die Aufspaltung

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \lg |K(re^{i\vartheta})| d\vartheta = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \lg^+ |K(re^{i\vartheta})| d\vartheta - \\ - \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \lg^+ \frac{1}{|K(re^{i\vartheta})|} d\vartheta$$

an und wir messen das Kleinwerden und Großwerden der Krümmung (siehe Definition 2) durch

$$m\left(r, \frac{1}{|K|}\right) := \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \lg^+ \frac{1}{|K(re^{i\vartheta})|} d\vartheta,$$

$$m(r, |K|) := \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \lg^+ |K(re^{i\vartheta})| d\vartheta.$$

¹ Man beachte ² auf S. 87 und ¹ auf S. 88.

Die Ungleichung (9) nimmt damit folgende Gestalt an:

$$(10) \quad m(r, |K|) + 2 \left\{ m\left(r, \frac{1}{f'}\right) + m\left(r, \frac{f'}{f''}\right) + m(r, f') \right\} + \\ + \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \lg \left| \frac{ff''}{f'^2 - ff''} \right| d\vartheta \leq m\left(r, \frac{1}{|K|}\right) + S(r, f').$$

Bevor wir mit der weiteren Untersuchung dieser Ungleichung fortfahren und dabei insbesondere nach dem Sinn der Größen

$m\left(r, \frac{f'}{f''}\right)$ und $\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \lg \left| \frac{ff''}{f'^2 - ff''} \right| d\vartheta$ fragen, können wir bereits

folgendes feststellen: links steht die Größe $2 m\left(r, \frac{1}{f'}\right)$, für die nach der bekannten¹ Ungleichung von Collingwood-Littlewood-R. Nevanlinna gilt

$$(11) \quad \sum_{a_k \neq \infty} m\left(r, \frac{1}{f - a_k}\right) \leq m\left(r, \frac{1}{f'}\right) + S(r, f),$$

die also um so größer wird, je stärker sich die Funktion f endlichen Zielwerten anschmiegt, rechts steht die Größe $m\left(r, \frac{1}{|K|}\right)$. Dies entspricht unserer Erwartung.

Es werden jetzt zwei Hilfssätze bewiesen.

2.3.2 Hilfssatz 1 (Abschätzungen für $S(r, \Phi)$ -Größen).

Die Größen $S(r, f')$, $S\left(r, \frac{f'}{f}\right)$, $S(r, f e^{az})$ und $S(r, f + bz)$ dürfen ersetzt werden durch $S(r, f)$.

Beweis für $S(r, f')$

Wir müssen zeigen, daß gilt (abgesehen von den mehrfach erwähnten Ausnahmeintervallen)

a) im Falle $R = \infty$:

$O\{\lg(rT(r, f'))\}$ darf ersetzt werden durch $O\{\lg(rT(r, f))\}$. Dies folgt für nichtrationale meromorphe Funktionen sofort aus folgenden beiden Tatsachen: erstens aus der Ungleichung

¹ Diese spielt beim Beweis des 2. Hauptsatzes eine wesentliche Rolle: siehe R. Nevanlinna [10, S. 91].

$$T(r, f') \leq T(r, f) + N(r, f) + m\left(r, \frac{f'}{f}\right) \leq 2 T(r, f) + M \lg(r T(r, f));$$

zweitens aus dem Satz von Nevanlinna, der die rationalen Funktionen charakterisiert: die notwendige und hinreichende Bedingung dafür, daß die in $|z| < \infty$ meromorphe Funktion $f(z)$ eine rationale Funktion ist, ist die, daß $\lim_{r \rightarrow \infty} \frac{T(r, f)}{\lg r} < \infty$ ausfällt. Denn damit gilt für alle nichtrationalen meromorphen Funktionen

$$T(r, f') \leq T(r, f) \left\{ 2 + M \frac{\lg r}{T(r, f)} + M \frac{\lg T(r, f)}{T(r, f)} \right\} \leq 3 T(r, f)$$

für $r \geq r_0$, was wie gewünscht zur Folge hat

$$\lg(r T(r, f')) \leq c \lg(r T(r, f)).$$

Die Aussage des Hilfssatzes stimmt auch für rationale Funktionen, denn dabei ist $O(\lg r)$ durch $O(\lg r)$ zu ersetzen.

b) im Falle $R = 1$:

$$O \left\{ \lg^+ T(r, f') + \lg \frac{1}{1-r} \right\} \text{ ist zu ersetzen durch } O \left\{ \lg^+ T(r, f) + \lg \frac{1}{1-r} \right\}.$$

Ähnlich wie in a) gilt die Ungleichung

$$T(r, f') \leq 2 T(r, f) + M \left\{ \lg^+ T(r, f) + \lg \frac{1}{1-r} \right\}.$$

Für diejenigen r -Intervalle, für die $\lg^+ T(r, f) > \lg \frac{1}{1-r}$, folgt aus der Ungleichung $T(r, f') \leq 2 T(r, f) + 2 M \cdot \lg T(r, f) \leq \leq 3 T(r, f)$ ($r_0 \leq r < 1$!), für die anderen r -Intervalle folgt wegen $T(r, f) \leq \frac{1}{1-r}$: $T(r, f') \leq 2 T(r, f) + 2 M \lg \frac{1}{1-r} \leq \frac{c}{1-r}$ ($r_1 \leq r < 1$!). Für alle r mit $\max(r_0, r_1) \leq r < 1$ gilt also

$$\lg^+ T(r, f') + \lg \frac{1}{1-r} \leq c' \left\{ \lg^+ T(r, f) + \lg \frac{1}{1-r} \right\}.$$

Damit ist für $S(r, f')$ alles bewiesen.

Beweis für $S\left(r, \frac{f'}{f}\right)$

Man muß hier von der Ungleichung

$$T\left(r, \frac{f'}{f}\right) = N(r, f) + N\left(r, \frac{1}{f}\right) + m\left(r, \frac{f'}{f}\right) \leq 2 T(r, f) + m\left(r, \frac{f'}{f}\right)$$

ausgehen, der weitere Beweis verläuft wie der eben geführte.

Beweis für $S(r, f e^{\alpha z})$

Da $e^{\alpha z}$ in $|z| < 1$ keine Schwierigkeiten macht, muß der Beweis nur für den Fall $R = \infty$ geführt werden. Es ist also zu zeigen:

$$O\{\lg(rT(r, f e^{\alpha z}))\} \text{ ist zu ersetzen durch } O\{\lg(rT(r, f))\}.$$

Man hat hier wieder eine Ungleichung:

$$T(r, f e^{\alpha z}) \leq T(r, f) + \frac{|\alpha|}{\pi} r \leq T(r, f) \left\{1 + \frac{|\alpha|}{\pi} r\right\} \leq 2 \frac{|\alpha|}{\pi} r T(r, f),$$

gültig für hinreichend große r -Werte. Daraus folgt für $r \geq r_0$

$$\lg(rT(r, f e^{\alpha z})) \leq c \lg(rT(r, f)),$$

was zu zeigen war.

Beweis für $S(r, f + bz)$ erübrigt sich.

2.3.3 Hilfssatz 2 (Ungleichungen für $m(r, \Phi)$ -Größen)

Die Nevanlinnaschen Schmiegegrößen genügen den Ungleichungen

$$(11) \quad \sum_{a_k \neq \infty}^q m\left(r, \frac{1}{f - a_k}\right) \leq m\left(r, \frac{1}{f'}\right) + S(r, f),$$

$$(12) \quad \sum_{a_k \neq 0, \infty}^q m\left(r, \frac{1}{f - a_k}\right) \leq m\left(r, \frac{f}{f'}\right) + S(r, f),$$

$$(13) \quad \sum_{\substack{s, \ell \\ i, k \\ b_i \neq 0}}^{s, \ell} m\left(r, \frac{1}{f - b_i z - c_k}\right) \leq m\left(r, \frac{f'}{f''}\right) + S(r, f),$$

$$(14) \quad \sum_{\substack{p, r \\ i, k \\ \alpha_i, d_k \neq 0}}^{p, r} m\left(r, \frac{1}{f e^{-\alpha_i z} - d_k}\right) \leq m\left(r, \frac{\left(\frac{f'}{f}\right)'}{\left(\frac{f'}{f}\right)}\right) + S(r, f)^1.$$

Bemerkung zu Hilfssatz 2

¹ Man beachte ¹ auf S. 88.

Daß wir uns gerade für die links stehenden Summen interessieren, liegt nahe, sind die Summanden doch Maße für ebenenähnliches, kegelähnliches und zylinderähnliches Aussehen der Betragflächen.

Beweis von Hilfssatz 2

(11) ist, wie bereits erwähnt, die Ungleichung von Collingwood-Littlewood-R. Nevanlinna, (12) erhält man sofort, wenn man die Ungleichung (2) des 2. Hauptsatzes mit unserer Gleichung (3) in Satz 1 vergleicht. Wir benützen jetzt (11) und (12) und Hilfssatz 1 zum Beweis von (13):

$$\begin{aligned} \sum_{\substack{i=1 \\ b_i \neq 0}}^s \left\{ \sum_{k=1}^t m \left(r, \frac{1}{f - b_i z - c_k} \right) \right\} &\leq \sum_{\substack{i=1 \\ b_i \neq 0}}^s \left\{ m \left(r, \frac{1}{f' - b_i} \right) + S(r, f - b_i z) \right\} \leq \\ &\leq m \left(r, \frac{f'}{f''} \right) + S(r, f') + \sum_{i=1}^s S(r, f - b_i z) = m \left(r, \frac{f'}{f''} \right) + S(r, f). \end{aligned}$$

Wir benützen jetzt zweimal die Ungleichung (12) und Hilfssatz 1 zum Beweis von (14):

$$\begin{aligned} \sum_{\substack{i=1 \\ \alpha_i \neq 0}}^p \left\{ \sum_{\substack{k=1 \\ d_k \neq 0}}^r m \left(r, \frac{1}{f e^{-\alpha_i z} - d_k} \right) \right\} &\leq \sum_{\substack{i=1 \\ \alpha_i \neq 0}}^p \left\{ m \left(r, \frac{f e^{-\alpha_i z}}{(f' e^{-\alpha_i z})'} \right) + S(r, f e^{-\alpha_i z}) \right\} = \\ &= \sum_{\substack{i=1 \\ \alpha_i \neq 0}}^p \left\{ m \left(r, \frac{1}{\frac{f'}{f} - \alpha_i} \right) + S(r, f e^{-\alpha_i z}) \right\} \leq m \left(r, \frac{\left(\frac{f'}{f} \right)}{\left(\frac{f'}{f} \right)'} \right) + \\ &+ S \left(r, \frac{f'}{f} \right) + \sum_{i=1}^p S(r, f e^{-\alpha_i z}) = m \left(r, \frac{\left(\frac{f'}{f} \right)}{\left(\frac{f'}{f} \right)'} \right) + S(r, f). \end{aligned}$$

2.3.4 Beweis letzter Teil

Die Ähnlichkeit der Größe

$$m \left(r, \frac{\left(\frac{f'}{f} \right)}{\left(\frac{f'}{f} \right)'} \right) = m \left(r, \frac{f f'}{f f'' - f'^2} \right)$$

zu der in Ungleichung (10) auftretenden Größe

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \lg \left| \frac{f f''}{f'^2 - f f''} \right| d\vartheta$$

veranlaßt zu folgender Überlegung:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \lg \left| \frac{ff''}{f'^2 - ff''} \right| d\vartheta &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \lg \left| \frac{ff'}{f'^2 - ff''} \right| d\vartheta + \\ &+ \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \lg \left| \frac{f''}{f'} \right| d\vartheta = m \left(r, \frac{\left(\frac{f'}{f} \right)'}{\left(\frac{f'}{f} \right)} \right) - m \left(r, \frac{\left(\frac{f'}{f} \right)'}{\left(\frac{f'}{f} \right)} \right) + \\ &+ m \left(r, \frac{f''}{f'} \right) - m \left(r, \frac{f'}{f''} \right) = m \left(r, \frac{\left(\frac{f'}{f} \right)'}{\left(\frac{f'}{f} \right)} \right) - m \left(r, \frac{f'}{f''} \right) + S(r, f). \end{aligned}$$

Zum Schluß wurde benützt: $m \left(r, \frac{\left(\frac{f'}{f} \right)'}{\left(\frac{f'}{f} \right)} \right) = S(r, f)$ bzw. $m \left(r, \frac{f''}{f'} \right) = S(r, f)$. Dies folgt sofort jeweils aus dem Satz von R. Nevanlinna über $m \left(r, \frac{\Phi'}{\Phi} \right)$ und Hilfssatz 1.

Einsetzen der eben gewonnenen Gleichung in Ungleichung (10) führt zu

$$\begin{aligned} (15) \quad m(r, |K|) + m \left(r, \frac{\left(\frac{f'}{f} \right)'}{\left(\frac{f'}{f} \right)} \right) + m \left(r, \frac{f'}{f''} \right) + \\ + 2 \left\{ m \left(r, \frac{1}{f} \right) + m(r, f') \right\} \leq m \left(r, \left| \frac{1}{K} \right| \right) + S(r, f). \end{aligned}$$

Ungleichung (15) und die Ungleichungen (11), (13) und (14) des Hilfssatzes 2 liefern die Krümmungsungleichung (8).

2.4 Zwei Folgerungen aus der Krümmungsungleichung

Satz 5

f sei eine meromorphe Funktion mit der Eigenschaft $\lim_{r \rightarrow R} \frac{S(r, f)}{T(r, f)} = o^1$. Dann genügen die Nevanlinnaschen Defekte der Ungleichung

$$\sum_{\substack{k=1 \\ a_k \neq \infty}}^{\infty} \delta(a_k) \leq \frac{1}{2} \lim_{r \rightarrow R} \frac{m \left(r, \frac{1}{|K|} \right)}{T(r, f)}.$$

Dies folgt sofort aus (8).

¹ Siehe ³ auf S. 84.

Satz 6 (differentialgeometrische Charakterisierung der ganzen rationalen Funktionen).

Die notwendige und hinreichende Bedingung dafür, daß die ganze Funktion von endlicher Ordnung $f(z)$ eine ganze rationale Funktion $\neq bz + c$ ist, ist die, daß

$$(16) \quad \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{m\left(r, \frac{1}{|K|}\right)}{\lg r} < \infty$$

ausfällt.

Beweis von Satz 6

(16) ist notwendig: Für ein Polynom n -ten Grades ($n \geq 2$) gilt, wie man leicht verifiziert, sogar

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \frac{m\left(r, \frac{1}{|K|}\right)}{\lg r} = 2n.$$

(16) ist hinreichend: Aus der Krümmungsungleichung folgt dann nämlich für die von uns betrachteten Funktionen

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \frac{m(r, f') - O(\lg r)}{\lg r} \leq \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{m\left(r, \frac{1}{|K|}\right)}{\lg r} < \infty,$$

also wegen $m(r, f') = T(r, f')$

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \frac{T(r, f')}{\lg r} < \infty.$$

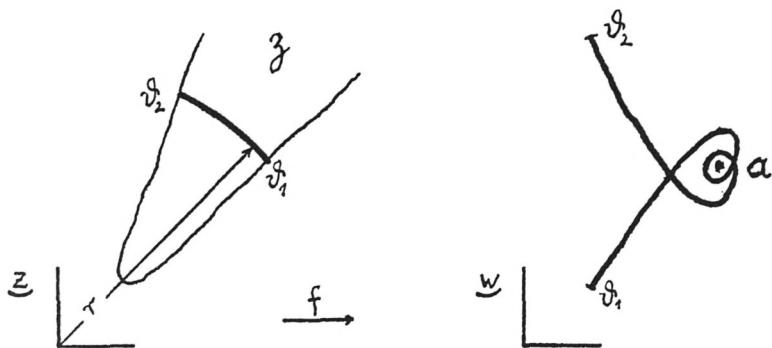
Nach einem bereits in 2.3.2 benützten Satz von R. Nevanlinna muß somit f' , also auch f , rational sein. Das wollten wir zeigen. Für die Funktionen $bz + c$ ist $m\left(r, \frac{1}{|K|}\right) \equiv \infty$ und (16) nicht erfüllt.

3. Über die ebene Krümmung k bei der Kreisabbildung $f(re^{i\theta})$

3.1 Vermutung

Wir arbeiten jetzt auf der zu $f(z)$ gehörigen Riemannschen Fläche über der w -Ebene. Das System der geschlossenen Kurven $f(re^{i\theta})$ (θ Kurvenparameter) liegt darauf und schöpft sie für $r \rightarrow R$ aus. Strebt die Funktion $f(z)$ in einem Bereich, z. B. einer Zunge Z , der z -Ebene gegen einen endlichen Zielwert a , so wird

sich jeweils ein Stück unserer Kurven um den Wert a herumwinden, und zwar um so mehr, je mehr sich die Funktion f dem Wert a anschmiegt. Man danke etwa an die Funktionen e^{z^n} ($n = 1, 2, \dots$)



Windet sich eine ebene Kurve um einen endlichen Punkt, so muß sie dort stark gekrümmt sein. Es liegt also die Vermutung nahe, daß ein entsprechender Zusammenhang besteht zwischen Nevanlinnaschen Größen der Wertverteilungslehre und der Krümmung k unserer Kurven. Eine Bemerkung zu den Zielwerten ∞ : strebt $f(z)$ in einer Zunge Z gegen ∞ , so wird jeweils das zu Z gehörige Stück unserer Kurven sehr weit von $w = 0$ entfernt liegen und fast wie eine Gerade aussehen, d. h. die Krümmung wird hier sehr klein sein.

3.2 Eine Ungleichung

Wir gehen hier aus von der Krümmungsformel

$$(17) \quad k(z) = \frac{1}{|zf'(z)|} \Re \left\{ z \frac{f''(z)}{f'(z)} + 1 \right\}$$

(siehe z. B. Hermann Schmidt [13]). Wie im 2. Teil messen wir das Großwerden und Kleinwerden der Krümmung wieder durch Mittelwerte:

Definition 3

$$m(r, |k|) := \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \lg^+ |k(re^{i\theta})| d\theta,$$

$$m\left(r, \frac{1}{|k|}\right) := \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \lg^+ \frac{1}{|k(re^{i\theta})|} d\theta^1.$$

Das Ergebnis unserer Untersuchungen ist

Satz 7

f sei eine meromorphe Funktion, k die ebene Krümmung der Kurve $f(re^{i\theta})$ (θ Kurvenparameter), $m(r, |k|)$ und $m\left(r, \frac{1}{|k|}\right)$ die zugehörigen Krümmungsmittelwerte. Dann besteht die Ungleichung

$$(18) \quad m(r, |k|) + \left\{ m(r, f') + m\left(r, \frac{1}{z \frac{f''}{f'} + 1}\right) \right\} \leq m\left(r, \frac{1}{f'}\right) + \\ + m\left(r, \frac{1}{|k|}\right) + S(r, f).$$

Bemerkung zu Satz 7

Satz 7 bestätigt unsere Vermutung. Denn: die beiden Größen $m\left(r, \frac{1}{f'}\right)$ und $m(r, f')$ können als Maße für die endlichen Zielwerte einer Funktion f und für die Zielwerte ∞ aufgefaßt werden². Der rechts in (18) stehenden Größe $m\left(r, \frac{1}{f'}\right)$ entspricht darum links der Mittelwert $m(r, |k|)$, für die links stehende Schmiegegröße $m(r, f')$ steht rechts $m\left(r, \frac{1}{|k|}\right)$. Zum Ausdruck $m\left(r, \frac{1}{z \frac{f''}{f'} + 1}\right)$: dieser wird groß, wenn sich $f(z)$ in einem Bereich der z -Ebene so ähnlich verhält wie eine Lösung der Differentialgleichung $z \left(\frac{y''}{y'}\right) + 1 = 0$, also so ähnlich wie $\alpha \lg z + \beta$; das zugehörige Stück der Kurve $f(re^{i\theta})$ in der w -Ebene fällt hier ziemlich gerade aus, die entsprechende Größe auf der rechten Seite von (18) ist also $m\left(r, \frac{1}{|k|}\right)$.

¹ Wir betrachten nichtkonstante meromorphe Funktionen und lassen auch hier wieder den Integralwert ∞ zu (vgl. ² auf S. 87).

² Man beachte dazu R. Nevanlinna [11, S. 239/240].

Beweis von Satz 7

Aus (17) folgt $|k| |zf'| \leq \left| z \frac{f''}{f'} + 1 \right|$. Anwenden des Operators $\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \lg \Phi(re^{i\vartheta}) d\vartheta$ ergibt bei Beachtung von Definition 3

$$\begin{aligned} m(r, |k|) - m\left(r, \frac{1}{|k|}\right) + m(r, zf') - m\left(r, \frac{1}{zf'}\right) &\leq \\ &\leq m\left(r, z \frac{f''}{f'} + 1\right) - m\left(r, \frac{1}{z \frac{f''}{f'} + 1}\right). \end{aligned}$$

Berücksichtigen wir noch

- a) $m(r, zf') = m(r, f') + O(\lg r)$,
- b) $m\left(r, \frac{1}{zf'}\right) = m\left(r, \frac{1}{f'}\right) + O(\lg r)$,
- c) $m\left(r, z \frac{f''}{f'} + 1\right) = m\left(r, z \frac{f''}{f'}\right) + O(1) = m\left(r, \frac{f''}{f'}\right) + O(\lg r) = S(r, f')$, wofür wir nach Hilfssatz 1 auch $S(r, f)$ setzen dürfen,

dann erhalten wir Ungleichung (18).

3.3 Modifikation

Das ungleiche Verhalten der Krümmung k bei endlichen Zielwerten und bei Zielwerten ∞ veranlaßt uns, das Produkt $k \cdot k^*$ zu betrachten, wobei k^* die Krümmung der Kurven $\frac{1}{f(re^{i\vartheta})}$ ist. Es ist folgendes zu erwarten: Strebt f in einer Zunge gegen einen Zielwert $a \neq 0, \infty$, dann wird $k \cdot k^*$ für die entsprechenden z -Werte doppelt groß, denn $f(re^{i\vartheta})$ windet sich in der w -Ebene stark um den Wert a , $\frac{1}{f(re^{i\vartheta})}$ stark um den Wert $\frac{1}{a}$; strebt aber f gegen 0 (bzw. ∞), dann strebt $\frac{1}{f}$ gegen ∞ (bzw. 0), k wird groß, k^* wird klein (bzw. umgekehrt), $k \cdot k^*$ wird einen mittleren Wert annehmen, der nicht ins Gewicht fällt.

Dies wird analytisch bestätigt durch

Satz 8

f sei eine meromorphe Funktion, $k \cdot k^*$ das Produkt aus der Krümmung k der Kurve $f(re^{i\vartheta})$ und der Krümmung k^* der

Kurve $\frac{1}{f(re^{i\vartheta})}$, $m(r, |kk^*|)$ und $m\left(r, \frac{1}{|kk^*|}\right)$ die zugehörigen Mittelwerte¹. Dann besteht die Ungleichung

$$(19) \quad m(r, |kk^*|) + \left\{ m\left(r, \frac{1}{z \frac{f''}{f'} + 1}\right) + m\left(r, \frac{1}{z \left(\frac{f''}{f'} - 2 \frac{f'}{f}\right) + 1}\right) \right\} \leq \\ \leq 2 m\left(r, \frac{f}{f'}\right) + m\left(r, \frac{1}{|kk^*|}\right) + S(r, f).$$

Denn: Erinnern wir uns an die früher bewiesene Ungleichung

$$(12) \quad \sum_{\substack{k \\ a_k \neq 0, \infty}}^q m\left(r, \frac{1}{f - a_k}\right) \leq m\left(r, \frac{f}{f'}\right) + S(r, f),$$

so sehen wir, daß auch rechts in (19) die Größe $2 m\left(r, \frac{f}{f'}\right)$ doppelt groß wird, falls f gegen einen Wert $a \neq 0, \infty$ strebt. Weiter ist zu Ungleichung (19) zu sagen: die beiden links stehenden Schmiegegrößen werden groß, wenn sich f oder $\frac{1}{f}$ so ähnlich wie $\alpha \lg z + \beta$ verhält, der entsprechende Ausdruck rechts ist $m\left(r, \frac{1}{|kk^*|}\right)$; Zielwerte 0 und ∞ machen sich wie erwartet nicht bemerkbar.

Beweis von Satz 8

Wegen $kk^* = \frac{1}{\left|z \frac{f'}{f^2}\right|} \Re \left\{ z \left(\frac{f''}{f'} - 2 \frac{f'}{f} \right) + 1 \right\}$ gilt für das Produkt kk^*

$$|kk^*| \cdot \left| z^2 \left(\frac{f'}{f} \right)^2 \right| \leq \left| z \frac{f''}{f'} + 1 \right| \cdot \left| z \left(\frac{f''}{f'} - 2 \frac{f'}{f} \right) + 1 \right|.$$

Anwenden des Operators $\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \lg \Phi(re^{i\vartheta}) d\vartheta$ ergibt

$$m(r, |kk^*|) - m\left(r, \left| \frac{1}{kk^*} \right| \right) + 2 m\left(r, z \frac{f'}{f}\right) - 2 m\left(r, \frac{1}{z} \frac{f}{f'}\right) \leq \\ \leq m\left(r, z \frac{f''}{f'} + 1\right) - m\left(r, \frac{1}{z \frac{f''}{f'} + 1}\right) + \\ + m\left(r, z \left(\frac{f''}{f'} - 2 \frac{f'}{f} \right) + 1\right) - m\left(r, \frac{1}{z \left(\frac{f''}{f'} - 2 \frac{f'}{f} \right) + 1}\right).$$

¹ In der üblichen Weise gebildet: Siehe Definition 3.

Berücksichtigen wir noch

$$a) m\left(r, \frac{f'}{f}\right) = S(r, f),$$

$$b) m\left(r, \frac{1}{z} \frac{f'}{f'}\right) = m\left(r, \frac{f'}{f'}\right) + O(\lg r),$$

$$c) m\left(r, z \frac{f''}{f'} + 1\right) = S(r, f) \text{ wie in 3.2,}$$

$$d) m\left(r, z \left(\frac{f''}{f'} - 2 \frac{f'}{f}\right) + 1\right) = m\left(r, \frac{f''}{f'} - 2 \frac{f'}{f}\right) + O(\lg r) \leq \\ \leq m\left(r, \frac{f''}{f'}\right) + m\left(r, \frac{f'}{f}\right) + O(\lg r) = S(r, f') + S(r, f),$$

wofür wir nach Hilfssatz 1 auch $S(r, f)$ setzen dürfen, dann erhalten wir Ungleichung (19).

Literaturnachweis

- [1] Ahlfors, L., Über eine Methode in der Theorie der meromorphen Funktionen, Soc. Sci. Fenn. Comment. Phys.-Math. 8 No. 10 (1935), 14 pp.
- [2] Dinghas, A., Vorlesungen über Funktionentheorie, Springer-Verlag, Berlin-Göttingen-Heidelberg, 1961, 403 pp.
- [3] Gackstatter, F., Zur Theorie der meromorphen Funktionen, Diplomarbeit, Würzburg 1966.
- [4] – Zur Theorie der meromorphen und algebroiden Funktionen, Diss., Würzburg 1969.
- [5] Hayman, W. K., An integral function with a defective value that is neither asymptotic nor invariant under change of origin, J. Math. Soc., Lond. 28 (1953), 369–376.
- [6] – Meromorphic functions, Clarendon Press, Oxford, 1964, 191 pp.
- [7] Jahnke-Emde-Lösch, Tafeln höherer Funktionen, Teubner Verlagsgesellschaft, Stuttgart, 6. Aufl. 1960, 318 pp.
- [8] Knöll, L., Krümmungsverhältnisse von Niveaulinien in der Kreisabbildung einfach-zusammenhängender schlichter Gebiete, Mitt. Math. Sem. Univ. Gießen 27 (1937), 53 pp.
- [9] Kreyszig, E., Differentialgeometrie, Akadem. Verlagsgesellschaft, Leipzig, 1957, 421 pp.
- [10] Nevanlinna, R., Zur Theorie der meromorphen Funktionen, Acta Math. 46 (1925), 1–99.
- [11] – Eindeutige analytische Funktionen, Springer-Verlag, Berlin-Göttingen-Heidelberg, 2. Aufl. 1953, 379 pp.

- [12] Schmidt, Herm., Über einige neuere Beispiele zur Wertverteilungslehre, J. Reine Angew. Math. 176 (1937), 250–252.
- [13] – Elementare Krümmungsbetrachtungen bei konformer Abbildung, Sem.-B. Math. Sem. Münster 13, 1939, 54–81.
- [14] Shimizu, T., On the theory of meromorphic functions, Japan. J. Math. 6 (1929), 119–171.
- [15] Speiser, A., Probleme aus dem Gebiet der ganzen transzendenten Funktionen, Comment. Math. Helv. 1 (1929), 289–312.
- [16] Teichmüller, O., Vermutungen und Sätze über die Wertverteilung gebrochener Funktionen endlicher Ordnung, Deutsche Math. 4 (1939), 163–190.
- [17] Ullrich, E., Über die Ableitung einer meromorphen Funktion, S.-B. Preuß. Akad. Wiss., Phys.-Math. Kl., 1929, 592–608.
- [18] – Über eine Anwendung des Verzerrungssatzes auf meromorphe Funktionen, J. Reine Angew. Math. 166 (1931), 220–234.
- [19] – Betragflächen mit ausgezeichnetem Krümmungsverhalten, Math. Z. 54 (1951), 297–328.
- [20] Wittich, H., Neuere Untersuchungen über eindeutige analytische Funktionen, Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-New York, 2. Aufl. 1968 163 pp.
- [21] Zaat, J., Differentialgeometrie der Betragflächen analytischer Funktionen, Mitt. Math. Sem. Univ. Gießen 30 (1944), 38 pp.