BAYERISCHE AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN

MATHEMATISCH-NATURWISSENSCHAFTLICHE KLASSE

SITZUNGSBERICHTE

JAHRGANG

1969

MÜNCHEN 1970

VERLAG DER BAYERISCHEN AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN

In Kommission bei der C. H. Beck'schen Verlagsbuchhandlung München

Ein Satz über die q-Vollständigkeit lokal trivialer Faserungen

Von Konrad Königsberger, München

Vorgelegt am 4. Juli 1969

J. P. SERRE hat in [6] die Frage gestellt, ob der Bündelraum E eines Faserbündels ein Steinscher Raum ist, wenn die Basis X und die Faser Y Steinsche Räume sind. Diese Frage ist von MATSUSHIMA und MORIMOTO [4] positiv beantwortet worden für Faserbündel E, deren Strukturgruppe G eine zusammenhängende komplexe Liegruppe ist, die holomorph und effektiv auf Y operiert. G. FISCHER [2] hat diesen Satz ausgedehnt auf Faserbündel, deren Strukturgruppe eine komplexe Liegruppe mit höchstens endlich vielen Zusammenhangs-Komponenten ist.

Ist Y ein beschränktes Holomorphiegebiet in einem C^n, so ist jede komplexe Liegruppe, die holomorph und effektiv auf Y operiert, diskret. Faserbündel, deren Faser ein beschränktes Holomorphiegebiet ist, werden also durch die erwähnten Resultate nur dann erfaßt, wenn die Strukturgruppe endlich ist. Einige positive Ergebnisse im Fall beschränkter Holomorphiegebiete wurden von G. FISCHER [2] mit anderen Methoden erzielt.

In dieser Note geben wir ein weiteres hinreichendes Kriterium an, das bei Faserbündeln mit beschränkt separabler Faser häufig angewendet werden kann. Wir zeigen, daß E immer dann Steinsch ist, wenn die Strukturgruppe G eine Untergruppe einer kompakten Gruppe holomorpher Automorphismen von Y ist; also insbesondere, wenn die Gruppe $\mathrm{Aut}(Y)$ aller holomorphen Automorphismen der Faser kompakt ist. Zum Beweis benutzen wir die Lösung des Levi-Problems sowie die invariante Integration auf einer kompakten Gruppe.

Wir leiten sogleich ein allgemeineres Resultat ab. Wir betrachten nicht nur Faserbündel mit holomorph-vollständiger Basis, sondern Faserbündel mit q-vollständiger Basis. Die Faser sei weiterhin ein Steinscher Raum. Dann ist E, wie wir zeigen werden, q-vollständig, falls G die vorhin genannte Eigenschaft hat.

Im letzten Abschnitt wenden wir unser Kriterium an auf Faserbündel, deren Fasern gewisse invariante Teilräume besitzen (z. B. Singularitäten).

I

Wir wiederholen zunächst die Definition des q-vollständigen komplexen Raumes[1].

Eine in einem Gebiet U des C^n definierte, reelle, 2mal stetig differenzierbare Funktion p heißt q-konvex, wenn die Matrix

$$L(p) = \left(\frac{\partial^2 p}{\partial z_\mu \partial \bar{z}_\nu}\right)$$

überall mindestens $n - q + 1$ positive Eigenwerte hat. Ist X eine analytische Menge in einem Gebiet des C^n, so heißt eine Funktion p auf X q-konvex, wenn es eine Umgebung U von X und in U eine q-konvexe Funktion $\hat{p}$ gibt, deren Beschränkung auf X gerade p ist. Da komplexe Räume lokal zu analytischen Mengen isomorph sind, ist damit auch der Begriff der q-konvexen Funktion auf einem komplexen Raum gegeben.

Ein komplexer Raum X heißt q-vollständig, wenn es auf X eine q-konvexe Funktion p gibt mit der Eigenschaft, daß für jede reelle Zahl r die Teilmenge

$$X_r = \{x \in X : p(x) \leq r\}$$

kompakt ist.

Es gilt (Lösung des Levi-Problems; siehe [5]): *Ein komplexer Raum ist genau dann Steinsch, wenn er 1-vollständig ist.*

Gegeben sei nun eine lokal triviale Faserung $\pi : E \to X$ mit der typischen Faser Y. „Lokal trivial“ bedeutet: Es gibt eine offene Überdeckung (U_i) von X und biholomorphe Abbildungen

---

[1] Unter einem komplexen Raum wird hier immer ein reduzierter komplexer Raum verstanden.

$h_i : \pi^{-1}(U_i) \to U_i \times Y$, so daß das Diagramm

$$\begin{tikzcd} \pi^{-1}(U_i) \arrow[rr, "h_i"] \arrow[dr, "\pi"'] & & U_i \times Y \arrow[dl, "\text{Projektion}"] \\ & U_i & \end{tikzcd}$$

kommutativ ist. Ist $U_{ij} = U_i \cap U_j$ nicht leer, so hat der induzierte Automorphismus $h_i \circ h_j^{-1}$ von $U_{ij} \times Y$ die Gestalt

$$(x, y) \mapsto (x, g_{ij}(x) \cdot y);$$

dabei ist $g_{ij}(x)$ ein Automorphismus der Faser Y. Die von allen Automorphismen $g_{ij}(x)$ erzeugte Untergruppe G in Aut(Y) heiße (eine) Strukturgruppe der Faserung $E \to X$.

Satz 1: *X sei ein q-vollständiger Raum und Y ein Steinscher Raum. Ist die Strukturgruppe G der lokal trivialen Faserung $\pi : E \to X$ Untergruppe einer kompakten Gruppe K holomorpher Automorphismen von Y, so ist auch E q-vollständig.*
(K soll natürlich stetig auf Y operieren.)

Beweis des Satzes: Es sei p eine 1-konvexe Funktion auf Y, die am „Rand von Y" unendlich wird; d. h. jede Teilmenge

$$Y_r = \{y \in Y : p(y) \leq r\}$$

sei kompakt. Wir verlangen ferner, daß $p(y) \geq 0$ für alle $y \in Y$. Aufgrund der Lösung des Levi-Problems existiert eine solche Funktion.

Mit Hilfe von p konstruieren wir nun eine 1-konvexe Funktion $\tilde{p}$ auf Y, die invariant gegenüber allen Transformationen der Strukturgruppe ist. Es sei $d\varkappa$ das rechts-invariante Haarsche Maß auf K mit der Normierung vol$(K) = 1$. Wir definieren für $y \in Y$

$$\tilde{p}(y) = \int_K p(\varkappa \cdot y)\, d\varkappa .$$

$\tilde{p}$ hat folgende Eigenschaften:

1. $\tilde{p}$ ist invariant gegenüber allen Transformationen aus K, insbesondere gegenüber allen Transformationen der Strukturgruppe G.

2. $\tilde{p}$ ist 1-konvex. Denn $\tilde{p}$ kann approximiert werden von einer absteigenden Folge von Oberintegralen; dabei ist jedes Oberintegral eine endliche Linearkombination $\sum m_\nu p(\varkappa_\nu \cdot y)$ 1-konvexer Funktionen mit positiven Koeffizienten.

3. $\tilde{p}$ wird am „Rand von Y" unendlich. Mit Y_r ist nämlich auch $K \cdot Y_r$ kompakt; für alle $y \in Y$ außerhalb $K \cdot Y_r$ ist aber $\tilde{p}(y) > r$; daraus folgt, daß die Menge $\{y \in Y : \tilde{p}(y) \leq r\}$ in einer kompakten Menge enthalten ist und also selbst kompakt ist.

Wegen der Invarianz von $\tilde{p}$ gegenüber allen Transformationen der Strukturgruppe kann auf E eine Funktion $\tilde{p}_E$ definiert werden, deren Beschränkungen auf die einzelnen Fasern mit $\tilde{p}$ übereinstimmen.

Es sei p^* eine q-konvexe Funktion auf X mit der Eigenschaft, daß jede Teilmenge

$$X_r = \{x \in X : p^*(x) \leq r\}$$

kompakt ist. Außerdem sei $p^*(x) \geq 0$ für alle $x \in X$.

Wir behaupten nun, daß

$$\tilde{\tilde{p}} = \tilde{p}_E + p^* \circ \pi$$

eine q-konvexe Funktion auf E ist. Da die q-Konvexität eine lokale Eigenschaft ist, darf zum Beweis angenommen werden, daß $E = U \times Y$; ferner darf angenommen werden, daß U und Y Gebiete in einem C^n bzw. C^m sind. Die Funktion $\tilde{\tilde{p}}$ ist dann gegeben durch

$$\tilde{\tilde{p}}(x, y) = p^*(x) + \tilde{p}(y).$$

Die Matrix $L(\tilde{\tilde{p}})$ hat in diesem Fall also die Gestalt

$$\begin{pmatrix} L(p^*) & 0 \\ 0 & L(\tilde{p}) \end{pmatrix}.$$

$L(\tilde{\tilde{p}})$ hat also mindestens $n + m - q + 1$ positive Eigenwerte; d. h. $\tilde{\tilde{p}}$ ist q-konvex.

Da die Funktionen $\tilde{p}_E$ und $p^* \circ \pi$ keine negativen Werte annehmen, ist außerdem klar, daß die Teilmengen

$$E_r = \{z \in E : \tilde{\tilde{p}}(z) \leq r\}$$

sämtlich kompakt sind.

$\tilde{\tilde{p}}$ ist also eine Funktion auf E mit den in der Definition der q-Vollständigkeit geforderten Eigenschaften.

Satz 1 ist damit bewiesen.

Aufgrund der Lösung des Levi-Problems erhalten wir das

Korollar: *$E(X, Y)$ sei eine lokal triviale Faserung, deren Basis und typische Faser Steinsche Räume sind. Ist die Strukturgruppe kompakt, so ist auch E ein Steinscher Raum.*

II

Im Beweis des Satzes 1 haben wir ausgehend von einer 1-konvexen Funktion p durch Integration eine invariante 1-konvexe Funktion $\tilde{p}$ konstruiert. Ist p q-konvex mit $q \neq 1$, so wird $\tilde{p}$ im allgemeinen nicht wieder q-konvex sein. Das ist jedoch der Fall, wenn der Begriff der q-Konvexität enger gefaßt wird; und zwar, wenn bei der Definition der q-Konvexität einer Funktion p in einem Gebiet $U \subset C^n$ zusätzlich gefordert wird, daß die Matrix $L(p)$ keine negativen Eigenwerte hat. Der Beweis des Satzes 1 kann dann im wesentlichen wörtlich übernommen werden als Beweis für den folgenden Satz.

Satz 1*: *$E \to X$ sei eine lokal triviale holomorphe Faserung mit der typischen Faser Y. Die Basis X sei q-vollständig; die Faser Y sei q^*-vollständig im engeren Sinn. Ist eine Strukturgruppe der Faserung Untergruppe einer kompakten Gruppe holomorpher Automorphismen von Y, so ist E ein $(q + q^* - 1)$-vollständiger Raum.*

III

Aut(Y) sei jetzt eine eigentliche Transformationsgruppe auf Y; „eigentlich" bedeutet, daß die durch $(g, y) \to (gy, y)$ definierte Abbildung

$$\mathrm{Aut}(Y) \times Y \longrightarrow Y \times Y$$

eigentlich ist. Es ist bekannt, daß bei einer eigentlichen Transformationsgruppe die Isotropiegruppe I_y eines jeden Punktes $y \in Y$ kompakt ist. Wir brauchen davon die folgende Verallgemeinerung: *Es sei G eine abgeschlossene Untergruppe von $Aut(Y)$. Gibt es in Y einen G-invarianten Unterraum S, dessen Automorphismengruppe $Aut(S)$ kompakt ist, so ist G kompakt.* Zum Beweis betrachten wir die Untergruppe

$$G' = \bigcap_{s \in S} I_s \cap G$$

derjenigen Transformationen von G, die S punktweise festlassen. Wegen der Kompaktheit der I_s ist G' kompakt. Da G/G' als abgeschlossene Untergruppe der kompakten Gruppe $\mathrm{Aut}(S)$ aufgefaßt werden kann und also kompakt ist, folgt, daß auch G selbst kompakt ist.

Aus Satz 1 folgt damit (G sei nun wieder die Strukturgruppe):

Satz 2. *$E \to X$ sei eine lokal triviale Faserung mit q-vollständiger Basis X und Steinscher Faser Y. Ferner sei $Aut(Y)$ eine eigentliche Transformationsgruppe. Gibt es in Y einen G-invarianten Teilraum S mit kompakter Automorphismengruppe $Aut(S)$, so ist E q-vollständig.*

Insbesondere ist E Steinsch, wenn X Steinsch ist.

Die Voraussetzung, $\mathrm{Aut}(Y)$ sei eine eigentliche Transformationsgruppe, ist bei allen zusammenhängenden, beschränkt separablen Steinschen Räumen erfüllt (siehe W. Kaup [3]).

Als invariante Teilräume S dienen oft Singularitätenmengen. Besitzt Y beispielsweise mindestens eine, aber höchstens endlich viele isolierte Singularitäten $s_1, \ldots, s_n$, so hat $S = \{s_1, \ldots, s_n\}$ alle gewünschten Eigenschaften.

Wir erhalten somit:

Folgerung 1: *Es sei $E \to X$ eine lokal triviale holomorphe Faserung über dem Steinschen Raum X. Die typische Faser sei ein zusammenhängender, beschränkt separabler Steinscher Raum, der mindestens eine, aber höchstens endlich viele isolierte Singularitäten besitzt. Dann ist auch E ein Steinscher Raum.*

Weitere Beispiele invarianter Teilräume S liefert der Satz von THULLEN über die Mittelpunktstreue der Automorphismen der eigentlichen Kreiskörper im C^2, die von Dizylinder, verallgemeinerten Hyperkugeln und den Körpern K_a verschieden sind (siehe hierzu [1] und [7]).

Folgerung 2: *$E \to X$ sei eine lokal triviale holomorphe Faserung über dem Steinschen Raum. Die Faser sei ein beschränkter, eigentlicher, holomorph-vollständiger Kreiskörper im C^2 mit Ausnahme der Dizylinder, der verallgemeinerten Hyperkugeln und der Körper K_a. Dann ist auch E ein Steinscher Raum.*

Literatur

[1] Behnke, H. und P. Thullen: Theorie der Funktionen mehrerer komplexer Veränderlichen. Berlin: Springer 1934.

[2] Fischer, G.: Holomorph-vollständige Faserbündel. Math. Ann. **180**, 341–348 (1969).

[3] Kaup, W.: Reelle Transformationsgruppen und invariante Metriken auf komplexen Räumen. Inventiones math. **3**, 43–70 (1967).

[4] Matsushima, Y., et A. Morimoto: Sur certains espaces fibrés sur une variété de Stein. Bull. Soc. Math. France **88**, 137–155 (1960).

[5] Narasimhan, R.: The Levi Problem for Complex Spaces II. Math. Ann. **146**, 195–216 (1962).

[6] Serre, J. P.: Quelques problèmes globaux relatifs aux variétés de Stein. Colloque sur les fonctions de plusieurs variables, 57–68, Bruxelles 1953.

[7] Thullen, P.: Zu den Abbildungen durch analytische Funktionen mehrerer komplexer Veränderlichen. Die Invarianz des Mittelpunktes von Kreiskörpern. Math. Ann. **104**, 244–259 (1931).