Sitzungsberichte

der

mathematisch-naturwissenschaftlichen Abteilung

der

Bayerischen Akademie der Wissenschaften zu München

1942. Heft I/III

Sitzungen Januar – Dezember

München 1942

Verlag der Bayerischen Akademie der Wissenschaften

In Kommission bei der C. H. Beck'schen Verlagsbuchhandlung

C. H. Beck'sche Buchdruckerei Nördlingen

Grundlinien einer differentiellen Theorie der Somenkongruenzen.

Von **Frank Löbell** in München.

Vorgelegt von Herrn S. Finsterwalder in der Sitzung vom 10. Januar 1942.

Vor einigen Jahrzehnten führte E. Study den Begriff des *Soma* – des starren Körpers, von dessen Begrenzung abstrahiert wird, – in die Mathematik ein.[1] Mit der Betrachtung der von Somen gebildeten Mannigfaltigkeiten erschloß er der geometrischen Forschung ein neues, weites und fruchtbares Feld. Study selbst förderte namentlich das Studium der algebraischen Somenmannigfaltigkeiten, die schon äußerst reichhaltige und meist auch verwickelte Gebilde sind. Daß er sich auch der differentiellen Theorie der Somenmannigfaltigkeiten widmete, zeigen gelegentliche Hinweise in seinen Veröffentlichungen.[2] Diese Untersuchungen, die als eine Weiterführung älterer Forschungen über starre Körper mit mehreren Freiheitsgraden anzusehen sind, scheinen erst in neuerer Zeit, und zwar von O. Mühlendyck, wieder aufgenommen worden zu sein.[3]

Im folgenden möge ein Weg gezeigt werden, auf dem die Differentialgeometrie der Somenkongruenzen im euklidischen Raum kinematisch begründet werden kann. Dieses Verfahren liegt hier besonders nahe. Es wurde jedoch ursprünglich für die Raumkurven und Flächen entwickelt, und es ist reizvoll, dem Zusammenhang und der weitgehenden Analogie zwischen diesen Gebieten nachzuspüren, aber auch die Durchbrechung dieser Analogie an einzelnen Stellen zu beobachten.

---

[1] E. Study, Geometrie der Dynamen, Leipzig 1903, S. 556.

[2] Man vergleiche etwa die Sitz.ber. d. Berliner Math. Gesellsch., 12. Jahrgang (1913), S. 45 u. S. 51 ff.

[3] Verschiedene Arbeiten im Jahresber. d. D. Math.-Verein., Bd. 39 (1930), S. 55 ff. und an den dort angegebenen Stellen.

Das hier verwendete analytische Hilfsmittel ist der Kalkül der dualen Vektoren, der auf W. K. Clifford und E. Study zurückgeht und der kurz in W. Blaschkes Vorlesungen über Differentialgeometrie dargestellt ist.[4]

Der Begriff der Somenkongruenz.

Es sei $S(p, q)$ ein von den beiden unabhängigen, nicht dualen, zunächst reell gedachten Parametern p und q abhängiges Soma; die Menge der Somen, die man erhält, wenn man p und q alle Werte des Definitionsbereichs der Funktion $S(p, q)$ durchlaufen läßt, heißt eine Somenkongruenz, falls dieser Bereich ein Gebiet in der p-q-Ebene ist und einige weiter unten angegebene Bedingungen erfüllt sind.

Ein Paar bestimmter Zahlen p, q legt als Koordinatenpaar ein einzelnes Soma der Kongruenz fest; $S(p, q)$ stellt demnach eine „mit Koordinaten belegte" Somenkongruenz dar, von der man dadurch zur Somenkongruenz schlechthin übergeht, daß man von den Koordinaten abstrahiert. Mathematisch wird diese Abstraktion am besten dadurch vollzogen, daß man die Somenkongruenz als gleichbedeutend mit der Klasse derjenigen mit Koordinaten belegten Somenkongruenzen erklärt, die aus einer solchen durch eine Parametertransformation hervorgehen; darunter aber verstehen wir wie in der Flächentheorie ein Paar von Gleichungen

$$(1)\qquad \begin{aligned} p &= p(\bar{p}, \bar{q}), \\ q &= q(\bar{p}, \bar{q}), \end{aligned}$$

[4] In Bd. I, 3. Aufl. Berlin 1930, S. 261 ff. (1. Aufl. S. 190 ff., 2. Aufl. S. 191 ff.). – Eine Zusammenfassung der bei der Entwicklung und Anwendung dieser Methode hauptsächlich zu beachtenden Tatsachen ist auch gegeben in einem Aufsatz d. V. in der Festschrift der Technischen Hochschule Stuttgart, Berlin 1929, S. 210 ff., der auch weitere Literaturhinweise enthält.

Bemerkung für das Folgende: Bedeutet $A = \bar{A} + \varepsilon \bar{\bar{A}}$ irgendeine duale Größe, wobei $\bar{A}$ und $\bar{\bar{A}}$ nicht-duale Größen gleicher Art (Skalare, Vektoren oder dgl.) seien, so heiße $\bar{A}$ der „erste Teil", $\bar{\bar{A}}$ der „zweite Teil" von A.

wo die auf der rechten Seite stehenden Funktionen stetige Ableitungen nach $\bar{p}$ und $\bar{q}$ besitzen, die der Bedingung

$$\frac{\partial\,(p,\ q)}{\partial\,(\bar{p},\ \bar{q})} \neq 0 \tag{1a}$$

genügen.

Gebilde oder Größen, die der Somenkongruenz als solcher, d. h. unabhängig von der speziellen Koordinatenwahl zugehören, müssen sich analytisch durch Gleichungen oder Funktionen darstellen lassen, die gegenüber der Gruppe Γ der Parametertransformationen invariant sind.

Das Büschel der Geschwindigkeitsschrauben und die Normale.

Nimmt man p und q als Funktionen eines nicht dualen, reellen Parameters t an, deren Werte dem Definitionsbereich von $S\,(p,\,q)$ angehören, so greift man damit aus der Somenkongruenz eine in ihr enthaltene Schar von Somen, genauer eine mit der Koordinate t belegte, kurz „bezifferte“ Somenschar heraus; deutet man t als Zeit, so kann man sich die Schar unter dem Bilde eines bewegten starren Körpers vorstellen.

Wir wollen uns im folgenden nur mit Somenmengen $S\,(p,\,q)$ befassen, die – wenigstens in einer Umgebung $\mathfrak{U}$ der Stelle $(p,\,q)$ – der Forderung genügen: So oft $p\,(t)$ und $q\,(t)$ differenzierbare Funktionen von t sind, soll die soeben eingeführte Raumbewegung $S\,(p\,(t),\,q\,(t))$ für jeden Wert von t, für den $(p\,(t),\,q\,(t))$ im Inneren von $\mathfrak{U}$ liegt, eine momentane Geschwindigkeitsschraube besitzen, die nach Wahl eines Bezugspunktes O durch den dualen Vektor $\mathfrak{u}_t$ dargestellt werde. Dafür, daß dies der Fall sei, ist notwendig und hinreichend, daß sowohl für die Annahme $p = t$, $q =$ const. als auch für die Annahme $p =$ const., $q = t$ diese Geschwindigkeitsschrauben, die kurz mit $\mathfrak{u}_p$ und $\mathfrak{u}_q$ bezeichnet werden mögen, als stetige Funktionen von p und q existieren. Unter dieser Voraussetzung ist nämlich jede mit dem Soma $S\,(p,\,q)$ fest verbundene Schraube $\mathfrak{x}$ eine Funktion von p

und q, die sich stetig nach p und q differenzieren läßt, da, wie bekannt,[5]

$$\text{(2a)} \qquad \frac{\partial \mathfrak{x}}{\partial p} = \mathfrak{u}_p \times \mathfrak{x}, \quad \frac{\partial \mathfrak{x}}{\partial q} = \mathfrak{u}_q \times \mathfrak{x}$$

ist. Daher gilt

$$\text{(3)} \qquad \frac{d\mathfrak{x}}{dt} = \frac{\partial \mathfrak{x}}{\partial p}\frac{dp}{dt} + \frac{\partial \mathfrak{x}}{\partial q}\frac{dq}{dt}.$$

Aus der Existenz von $\frac{d\mathfrak{x}}{dt}$ für jedes in $S\,(p\,(t),\, q\,(t))$ feste $\mathfrak{x}$ folgt aber bekanntlich[6] das Vorhandensein der Geschwindigkeitsschraube $\mathfrak{u}_t$, und es ist

$$\text{(2)} \qquad \frac{d\mathfrak{x}}{dt} = \mathfrak{u}_t \times \mathfrak{x}.$$

Hieraus ist aber wegen (2a) und (3) zu schließen:

$$\text{(4a)} \qquad \mathfrak{u}_t \times \mathfrak{x} = \left(\mathfrak{u}_p \frac{dp}{dt} + \mathfrak{u}_q \frac{dq}{dt}\right) \times \mathfrak{x};$$

also gilt, weil hierin $\mathfrak{x}$ jede beliebige Schraube sein darf,

$$\text{(4)} \qquad \mathfrak{u}_t = \mathfrak{u}_p \frac{dp}{dt} + \mathfrak{u}_q \frac{dq}{dt}.$$

Man sieht somit, daß bei einer Transformation des Parameters t,

$$\text{(5)} \qquad t = t\,(\bar{t}),$$

wo t nach $\bar{t}$ differenzierbar und

$$\text{(5a)} \qquad \frac{dt}{d\bar{t}} \neq 0, \text{ aber endlich}$$

---

[5] Vgl. die oben zitierte Festschrift S. 216.

[6] Festschrift S. 216 f.

ist, $\mathfrak{u}_t$ sich wie das Symbol $\frac{d}{dt}$ transformiert.

Fordern wir, daß $\frac{dp}{dt}$ und $\frac{dq}{dt}$ stetig seien, so hängt auch $\mathfrak{u}_t$ stetig von t ab.

Wir nennen $\mathfrak{u}_p$ und $\mathfrak{u}_q$ die partiellen Geschwindigkeitsschrauben der mit den Koordinaten p und q belegten Somenkongruenz $S(p, q)$ nach p und q.

Wir verlangen nun, daß an der Stelle (p, q) und damit wegen der schon oben vorausgesetzten Stetigkeit von $\mathfrak{u}_p\,(p, q)$ und $\mathfrak{u}_q\,(p, q)$ auch in einer Umgebung dieser Stelle

$$\bar{\mathfrak{u}}_p \times \bar{\mathfrak{u}}_q \neq 0 \tag{6}$$

sei, und beschränken uns vorerst auf die Betrachtung solcher Gebiete der p-q-Ebene, die dieser Forderung genügen; die Somenkongruenz heiße an einer Stelle regulär, wenn es Koordinaten p, q gibt, bei deren Wahl (6) an dieser Stelle erfüllt ist. Geometrisch bedeutet das Bestehen von (6), daß die Schraube

$$\mathfrak{u}_p \times \mathfrak{u}_q \tag{7}$$

eine eigentliche Achse hat. Diese heiße die Normale n der Somenkongruenz an der Stelle (p, q); man erkennt nämlich mit Hilfe der aus (4) fließenden Formeln

$$\mathfrak{u}_{\bar{p}} = \mathfrak{u}_p \frac{\partial p}{\partial \bar{p}} + \mathfrak{u}_q \frac{\partial q}{\partial \bar{p}}, \tag{4a}$$

$$\mathfrak{u}_{\bar{q}} = \mathfrak{u}_p \frac{\partial p}{\partial \bar{q}} + \mathfrak{u}_q \frac{\partial q}{\partial \bar{q}}, \tag{4b}$$

daß die Bedingung (6) invariant gegenüber der Gruppe der Parametertransformationen (1) ist, da die Funktion $\mathfrak{u}_p \times \mathfrak{u}_q$ eine Differentialinvariante gegenüber Γ ist:

$$\mathfrak{u}_{\bar{p}} \times \mathfrak{u}_{\bar{q}} = \mathfrak{u}_p \times \mathfrak{u}_q \cdot \frac{\partial\,(p, q)}{\partial\,(\bar{p}, \bar{q})}. \tag{8}$$

Die Achsen der Geschwindigkeitsschrauben $\mathfrak{u}_t$ sämtlicher der Kongruenz S angehörenden Somenscharen, die das Soma $S(p, q)$ enthalten, an der Stelle $(p(t), q(t))$ schneiden $\mathfrak{n}$ senkrecht, wie aus (4) unmittelbar durch vektorielle Multiplikation mit dem dualen Vektor (7) folgt; noch mehr: diese Geschwindigkeitsschrauben bestimmen ein Gewindebüschel, ihre Achsen bilden eine Strahlenkette.[7] Die mit einem gewissen Richtungssinn ausgestattete Normale wird am besten durch die Einheitsschraube

$$\mathfrak{n} = \mathfrak{u}_p \times \mathfrak{u}_q : \sqrt{(\mathfrak{u}_p \times \mathfrak{u}_q)^2} = \mathfrak{u}_p \times \mathfrak{u}_q : \sqrt{\mathfrak{u}_p^2 \mathfrak{u}_q^2 - (\mathfrak{u}_p \mathfrak{u}_q)^2}, \tag{9}$$

die „Normalschraube" der Somenkongruenz für das Soma $S(p, q)$, dargestellt; die Division durch die Wurzel ist möglich, weil wegen (6) ihr erster Teil nicht verschwindet.

Von jetzt an setzen wir voraus, daß $\mathfrak{u}_p$ und $\mathfrak{u}_q$ stetige partielle Ableitungen nach p und q besitzen.

Die Grundgleichung.

Wir stellen uns nun umgekehrt die Frage: Es seien $\mathfrak{u}_p$ und $\mathfrak{u}_q$ zwei Schrauben, die als eindeutige, stetig differenzierbare Funktionen zweier reeller Variabeln p und q gegeben seien; wann gibt es eine Somenkongruenz, deren partielle Geschwindigkeitsschrauben $\mathfrak{u}_p(p, q)$ und $\mathfrak{u}_q(p, q)$ sind, und wie viele solcher Kongruenzen gibt es dann?

Gesetzt den Fall, wir wüßten, daß es eine solche Somenkongruenz gibt, so könnten wir diese offensichtlich folgendermaßen konstruieren: Wir bewegen ein Soma aus einer Anfangslage, die wir beliebig annehmen und dem Parameterpaar $p = p_0$, $q = q_0$ zuordnen, zunächst bei als Zeit gedeutetem p, also bei festgehaltenem q, so, daß es zur Zeit p die Geschwindigkeitsschraube $\mathfrak{u}_p(p, q_0)$ habe; diesen Vorgang nennen wir die erste Bewegungsetappe. Irgendeine mit dem Soma starr verbundene Schraube $\mathfrak{x}$ genügt dann der Differentialgleichung

$$\frac{d\mathfrak{x}}{dp} = \mathfrak{u}_p(p, q_0) \times \mathfrak{x}. \tag{10a}$$

---

[7] Journal f. d. reine u. angew. Math., Bd. 164 (1931), S. 65.

Unter den oben gemachten Voraussetzungen besitzt diese Gleichung für jeden Anfangswert $\mathfrak{x}(p_0, q_0)$ eine eindeutige, stetige Lösung $\mathfrak{x}(p, q_0)$;[8] die Gesamtheit dieser Lösungen bildet einen zeitlich mit p veränderlichen, starren Schraubenkörper, d. h. eine Somenschar $S(p, q_0)$.[9] Nunmehr deuten wir q als Zeit und bewegen das Soma bei festgehaltenem p derart weiter, daß es zur Zeit q die Geschwindigkeitsschraube $\mathfrak{u}_q(p, q)$ habe. Die Endlage der Schraube, die am Anfang dieser zweiten Bewegungsetappe $\mathfrak{x}(p, q_0)$ war, sei $\mathfrak{x}(p, q)$; wir finden sie durch Auflösung der Differentialgleichung

$$\frac{\partial \mathfrak{x}}{\partial q} = \mathfrak{u}_q(p, q) \times \mathfrak{x} \tag{10b}$$

bei konstantem p mit der Anfangsbedingung $\mathfrak{x} = \mathfrak{x}(p, q_0)$. Der Endwert $\mathfrak{x}(p, q)$ ist wieder eindeutig bestimmt, und er ist stetig nicht nur in q, sondern auch in p; er ist sogar stetig nach p differenzierbar.

Jetzt ist also durch die Gesamtheit der Schrauben $\mathfrak{x}(p, q)$, die aus den sämtlichen, am Anfang angenommenen Schrauben $\mathfrak{x}(p_0, q_0)$ hervorgehen,[9] ein Soma als Funktion von p und q bestimmt, d. h. eine Somenkongruenz $S(p, q)$. Als wesentlich ist nun zu beachten, daß wir bei der ganzen bisherigen Überlegung uns von der Annahme, $\mathfrak{u}_p$ und $\mathfrak{u}_q$ seien die partiellen Geschwindigkeitsschrauben einer Somenkongruenz, nur leiten ließen, daß wir aber diese Annahme bei der Durchführung unserer Schlüsse nirgends wirklich benützt haben ($\mathfrak{u}_p(p, q)$ wurde außer für $q = q_0$ überhaupt nicht gebraucht); unsere Schlußfolgerungen sind also gültig, ohne daß den Funktionen $\mathfrak{u}_p(p, q)$ und $\mathfrak{u}_q(p, q)$ irgendeine besondere Bedingung, die über die oben gemachten Voraussetzungen der Eindeutigkeit und stetigen Differenzierbarkeit hinausginge, auferlegt werden müßte. Es hat daher Sinn, zu fragen, welches die partiellen Geschwindigkeitsschrauben der soeben konstruierten Somenkongruenz sind.

[8] Die Existenz dieser Lösung läßt sich unmittelbar durch ein Verfahren der sukzessiven Approximationen beweisen; man kann sich aber von ihr auch auf Grund der Tatsache überzeugen, daß (10a) mit einem System von sechs simultanen, linearen Differentialgleichungen mit stetigen Koeffizienten im nicht-dualen, skalaren Bereich gleichbedeutend ist.

[9] Festschrift S. 217.

Die partielle Geschwindigkeitsschraube nach q ist jedenfalls $\mathfrak{u}_q(p, q)$, wie man unmittelbar daraus erkennt, daß $\mathfrak{x}(p, q)$ der Differentialgleichung (10b) genügt. Die partielle Geschwindigkeitsschraube nach p, die wegen der oben ausdrücklich hervorgehobenen Existenz einer stetigen partiellen Ableitung von $\mathfrak{x}(p, q)$ nach p gewiß, und zwar als stetige Funktion von p und q, vorhanden ist, kann jedoch nicht als mit $\mathfrak{u}_p(p, q)$ übereinstimmend angenommen werden; sie werde mit $\mathfrak{z}$ bezeichnet. Wir finden sie durch folgende Überlegung: Die Lagenänderung des Soma bei Veränderung von p allein rührt daher, daß der Anfangswert $\mathfrak{x}(p, q_0)$ der mit ihm fest verbundenen Schraube $\mathfrak{x}(p, q)$ bei der zweiten Bewegungsetappe sich mit p ändert und daß die Geschwindigkeitsschraube $\mathfrak{u}_q(p, q)$ sich mit p ändert. Auf jeden Fall ist aber, da die Gesamtheit der Schrauben $\mathfrak{x}$ auch bei Änderung von p einen starren Schraubenkörper bildet,

$$\frac{\partial \mathfrak{x}}{\partial p} = \mathfrak{z} \times \mathfrak{x}. \tag{11}$$

Nun gilt einerseits, wie durch die Differentiation von (10b) nach p folgt,

$$\frac{\partial^2 \mathfrak{x}}{\partial p\, \partial q} = \frac{\partial \mathfrak{u}_q}{\partial p} \times \mathfrak{x} + \mathfrak{u}_q \times \frac{\partial \mathfrak{x}}{\partial p} = \frac{\partial \mathfrak{u}_q}{\partial p} \times \mathfrak{x} + \mathfrak{u}_q \times (\mathfrak{z} \times \mathfrak{x}). \tag{12a}$$

Da hiernach außer $\frac{\partial \mathfrak{x}}{\partial p}$ und $\frac{\partial \mathfrak{x}}{\partial q}$, wie die rechte Seite dieser Gleichung zeigt, auch $\frac{\partial}{\partial p} \frac{\partial \mathfrak{x}}{\partial q}$ existiert und stetig ist, woraus bekanntlich[10] folgt, daß auch $\frac{\partial}{\partial q} \frac{\partial \mathfrak{x}}{\partial p}$ existiert und gleich $\frac{\partial}{\partial p} \frac{\partial \mathfrak{x}}{\partial q}$ ist, so ist es erlaubt, $\frac{\partial \mathfrak{x}}{dp}$ in (11) nach q zu differenzieren; man erhält so

$$\frac{\partial^2 \mathfrak{x}}{\partial q\, \partial p} = \frac{\partial \mathfrak{z}}{\partial q} \times \mathfrak{x} + \mathfrak{z} \times \frac{\partial \mathfrak{x}}{\partial q} = \frac{\partial \mathfrak{z}}{\partial q} \times \mathfrak{x} + \mathfrak{z} \times (\mathfrak{u}_q \times \mathfrak{x}); \tag{12b}$$

[10] Siehe etwa H. v. Mangoldt-Knopp, Einführung in die Höhere Mathematik, II, 6. Aufl. Leipzig 1932, S. 338.

daß man aber hierbei $\frac{\partial \mathfrak{z}}{\partial q}$ bilden durfte, bedarf noch eines Beweises: (11) gilt, wie gesagt, für alle mit dem Soma S starr verbundenen Schrauben $\mathfrak{x}$, aus denen wir drei sich gegenseitig rechtwinklig schneidende, S bereits bestimmende Einheitsschrauben $\mathfrak{x}_1, \mathfrak{x}_2, \mathfrak{x}_3$ auswählen können; durch diese läßt sich $\mathfrak{z}$, wie leicht zu verifizieren,[11] folgendermaßen ausdrücken:

$$\mathfrak{z} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{3} \mathfrak{x}_i \times \frac{\partial \mathfrak{x}_i}{\partial p}; \tag{13a}$$

aus der oben vor der Aufstellung von (12b) bewiesenen stetigen Differenzierbarkeit von $\frac{\partial \mathfrak{x}_i}{\partial p}$ nach q $(i = 1, 2, 3)$ ergibt sich nun die Existenz einer stetigen Ableitung $\frac{\partial \mathfrak{z}}{\partial q}$, die sich leicht explizit angeben ließe. Aus (12a) und (12b) folgt nun

$$\left(\frac{\partial \mathfrak{z}}{\partial q} - \frac{\partial \mathfrak{u}_q}{\partial p}\right) \times \mathfrak{x} + \mathfrak{z} \times (\mathfrak{u}_q \times \mathfrak{x}) - \mathfrak{u}_q \times (\mathfrak{z} \times \mathfrak{x}) = 0 \tag{14a}$$

oder[12]

$$\left(\frac{\partial \mathfrak{z}}{\partial q} - \frac{\partial \mathfrak{u}_q}{\partial p}\right) \times \mathfrak{x} + (\mathfrak{z} \times \mathfrak{u}_q) \times \mathfrak{x} = 0, \tag{14b}$$

mithin, da dies für jede beliebige Schraube $\mathfrak{x}$ gilt:

$$\frac{\partial \mathfrak{z}}{\partial q} = \mathfrak{u}_q \times \mathfrak{z} + \frac{\partial \mathfrak{u}_q}{\partial p}. \tag{15a}$$

Dieser Differentialgleichung muß also $\mathfrak{z}$ genügen, und zwar muß $\mathfrak{z}$ den Anfangswert $\mathfrak{u}_p(p, q_0)$ haben; denn, daß $\mathfrak{u}_p(p, q_0)$ die partielle Geschwindigkeitsschraube der Somenkongruenz

---

[11] Festschrift S. 216, Fußnote 2. Hierbei wird die „Zerlegungsformel" $\mathfrak{a} \times (\mathfrak{b} \times \mathfrak{c}) = \mathfrak{b} \cdot \mathfrak{a}\mathfrak{c} - \mathfrak{c} \cdot \mathfrak{a}\mathfrak{b}$ gebraucht.

[12] Hier wird die „Vertauschungsformel" benützt:
$$\mathfrak{a} \times (\mathfrak{b} \times \mathfrak{c}) + \mathfrak{b} \times (\mathfrak{c} \times \mathfrak{a}) + \mathfrak{c} \times (\mathfrak{a} \times \mathfrak{b}) = 0.$$

nach p für $q = q_0$ ist, lehrt ein Blick auf die Gleichung (10a). Dadurch ist aber $\mathfrak{z}$ eindeutig bestimmt.[13]

Soll nunmehr $\mathfrak{z} = \mathfrak{u}_p(p, q)$ sein, so muß demnach notwendig gelten:

$$\underline{\frac{\partial \mathfrak{u}_p}{\partial q} - \frac{\partial \mathfrak{u}_q}{\partial p} + \mathfrak{u}_p \times \mathfrak{u}_q = 0;} \tag{15}$$

und umgekehrt ist dies auch hinreichend dafür, daß $\mathfrak{u}_p = \mathfrak{z}$ ist, weil der Anfangswert von $\mathfrak{u}_p(p, q)$ für $q = q_0$ eben $\mathfrak{u}_p(p, q_0)$ ist. Damit ist bewiesen, daß *diese fundamentale Relation die charakteristische Bedingung dafür* ist, *daß es eine, ersichtlich durch die willkürliche Angabe von $S(p_0, q_0)$ eindeutig bestimmte Somenkongruenz $S(p, q)$ mit den partiellen Geschwindigkeitsschrauben $\mathfrak{u}_p(p, q)$ und $\mathfrak{u}_q(p, q)$ gibt.*

Es sei bemerkt, daß (15) invariant gegenüber Γ ist; denn ebenso wie der duale Vektor (7) ist auch die Funktion

$$\frac{\partial \mathfrak{u}_p}{\partial q} - \frac{\partial \mathfrak{u}_q}{\partial p} \tag{16}$$

eine Differentialvariante gegenüber Γ vom Gewicht 1.

Die Beziehung (15) ist in der Schreibweise des Biquaternionenkalküls ohne Ableitung von E. Study angegeben worden; sie ist äquivalent mit gewissen, bis auf J. L. Lagrange zurück zu verfolgenden, von G. Darboux und E. Cesaro in der Flächentheorie viel angewandten Gleichungssystemen, die für starre Körper mit zwei Freiheitsgraden gelten.[14]

Integralform der Grundgleichung

Die Relation (15) läßt sich dadurch noch in eine andere Form bringen, daß man sie über ein Gebiet $\mathfrak{G}$ der p-q-Ebene, das im Definitionsbereich von $S(p, q)$ liegt, integriert.

[13] Vgl. Fußnote 8.

[14] Sitz.ber. d. Bayer. Akad. d. Wiss., Math.-naturw. Abt., Jahrgang 1929, S. 166.

Man erkennt zunächst, daß die Schraube

$$\int\int_{\mathfrak{G}} \mathfrak{u}_p \times \mathfrak{u}_q \cdot dp\,dq \tag{17}$$

eine Integralinvariante des $\mathfrak{G}$ entsprechenden Teiles der Somenkongruenz $S(p, q)$ gegenüber Γ ist; in der Tat folgt dies unmittelbar aus dem Bestehen von (8) und dem Transformationsgesetz für Doppelintegrale.

Wir setzen

$$\mathfrak{u}_p \times \mathfrak{u}_q \cdot dp\,dq = d\mathfrak{f}; \tag{18a}$$

$$\mathfrak{n}\,\mathfrak{u}_p\,\mathfrak{u}_q \cdot dp\,dq = df \tag{18}$$

heiße das duale Flächenelement der Somenkongruenz an der Stelle (p, q), wobei $\mathfrak{n}$ eine der beiden Einheitsschrauben von $\mathfrak{u}_p \times \mathfrak{u}_q$ bedeutet; es ist $d\mathfrak{f}^2 = df^2$.

Es sei nun weiterhin $\mathfrak{G}$ ein einfach zusammenhängendes Gebiet; γ sei seine geschlossene Randkurve mit positivem Umlaufsinn in der p-q-Ebene, die so beschaffen sei, daß sie durch geeignete Funktionen $p\,(t)$ und $q\,(t)$ eines reellen Parameters t mit der primitiven Periode $T > 0$ dargestellt werden kann, die stetige, nirgends zugleich verschwindende Differentialquotienten $\dot{p}$ und $\dot{q}$ besitzen; der positive Durchlaufungssinn entspreche wachsenden t-Werten. Auf Grund einer Umformung bekannter Art gilt dann

$$\int\int_{\mathfrak{G}} \left(\frac{\partial \mathfrak{u}_p}{\partial q} - \frac{\partial \mathfrak{u}_q}{d p}\right) dp\,dq = -\int_0^T \mathfrak{u}_t\, dt. \tag{19}$$

Das auf der rechten Seite stehende Linienintegral ist eine Integralinvariante der Somenschar, über die das Integral erstreckt ist, sowohl gegenüber einer Transformation (5), da sich dabei $\mathfrak{u}_t$ wie $\dfrac{d}{dt}$ transformiert, als auch wegen (19) gegenüber Γ, (und zwar auch, wenn die Kurve γ nicht geschlossen ist). Der invariante Charakter der hier auftretenden Integrale tritt stärker hervor, wenn wir noch eine der beiden Einheitsschrauben von $\mathfrak{u}_t$ mit $\mathfrak{s}$ bezeichnen und vermöge der Erklärung

$$\frac{du}{dt} = \mathfrak{u}_t\,\mathfrak{s} \tag{20}$$

das „duale Bogenelement" du der Somenschar an der Stelle t einführen. Wird t als Zeit aufgefaßt, so gibt der erste Teil der dualen Länge $\frac{du}{dt} = \dot{u}$ von $\mathfrak{u}_t$ die Geschwindigkeit der Drehung des Soma $S(p(t), q(t))$ an; der zweite Teil von $\dot{u}$ gibt die Geschwindigkeit der Verschiebung des Soma in der Richtung der momentanen Schraubenachse. Diese selbst wird durch $\mathfrak{s}$ dargestellt, und zwar auch mit der richtigen Orientierung, wenn man es so einrichtet, daß $\bar{\dot{u}} > 0$ wird; dies aber ist stets möglich, weil wegen (6) der erste Teil von $\mathfrak{u}_t^2 = \dot{u}^2$ eine positiv definite quadratische Form in $\dot{p}$ und $\dot{q}$ ist; es gilt nämlich

$$\mathfrak{u}_t^2 = \mathfrak{u}_p^2 \cdot \dot{p}^2 + 2\,\mathfrak{u}_p\mathfrak{u}_q \cdot \dot{p}\dot{q} + \mathfrak{u}_q^2 \cdot \dot{q}^2. \tag{21}$$

Der Vergleich der Beziehung (19) mit der Grundgleichung (15) liefert bei Benützung der eingeführten Bezeichnungen die Integralformel

$$\underline{\int_{\mathfrak{S}} d\mathfrak{f} = \int_{\Upsilon} \mathfrak{s}\,du;} \tag{22}$$

sie ist mit (15) völlig gleichbedeutend, da auf Grund unserer Voraussetzungen die Integranden auf beiden Seiten stetig sind.

Aus dieser Gleichung kann man unmittelbar den Satz folgern:

Für jede geschlossene Somenkongruenz K ist $\int_K d\mathfrak{f} = 0$.

Hierbei fällt die Analogie zu der bekannten Tatsache auf, daß die vektorielle Oberfläche einer geschlossenen Fläche stets verschwindet.

Es gelten aber noch weitere Integralsätze:

Bezeichnet $\mathfrak{x}$ wie früher irgendeine an dem Soma $S(p, q)$ starr befestigte Schraube, so ist $\mathfrak{x}\mathfrak{u}_t$ die mit der dualen Länge von $\mathfrak{x}$ multiplizierte duale Komponente der Geschwindigkeitsschraube $\mathfrak{u}_t$ nach $\mathfrak{x}$. Wegen

$$\frac{\partial(\mathfrak{x}\,\mathfrak{u}_p)}{\partial q} = \mathfrak{x}\,\frac{\partial \mathfrak{u}_p}{\partial q} + \mathfrak{u}_p\,\mathfrak{u}_q\,\mathfrak{x}, \tag{23a}$$

(23b) $$\frac{\partial(\mathfrak{x}\,\mathfrak{u}_q)}{\partial p} = \mathfrak{x}\,\frac{\partial \mathfrak{u}_q}{\partial p} + \mathfrak{u}_q\,\mathfrak{u}_p\,\mathfrak{x}$$

findet man bei Berücksichtigung der Grundgleichung (15)

(23) $$\frac{\partial(\mathfrak{x}\,\mathfrak{u}_p)}{\partial q} - \frac{\partial(\mathfrak{x}\,\mathfrak{u}_q)}{\partial p} = \mathfrak{u}_p\,\mathfrak{u}_q\,\mathfrak{x},$$

folglich

(24) $$\underline{\int_{\mathfrak{S}} \mathfrak{x}\, d\mathfrak{f} = -\int_{\Upsilon} \mathfrak{x}\mathfrak{s}\, du.}$$

Eine entsprechende Umformung des Doppelintegrals $\int \mathfrak{x} \times d\mathfrak{f}$ zu finden, gelingt nicht. Daraus aber, daß $-\mathfrak{x} \times \mathfrak{s}\, du = \mathfrak{u}_t \times \mathfrak{x}\, dt = d\mathfrak{x}$ ein vollständiges Differential ist, folgt unmittelbar

(25) $$\int_{\mathcal{O}} \mathfrak{x} \times \mathfrak{s}\, du = 0.$$

Dagegen kann man (24) ergänzen durch eine Integralbeziehung, in die die $\mathfrak{x}$ senkrecht schneidenden Komponenten $\mathfrak{v}_t$, $\mathfrak{v}_p$ und $\mathfrak{v}_q$ von $\mathfrak{u}_t$, $\mathfrak{u}_p$ und $\mathfrak{u}_q$ eingehen. Man erhält etwa $\mathfrak{v}_t$, da die mit $\mathfrak{x}$ koaxiale Komponente von $\mathfrak{u}_t$ die Form $C\mathfrak{x}$ haben muß, durch den Ansatz

(26) $$u_t = C\mathfrak{x} + \mathfrak{v}_t,$$

wo C ein dual-skalarer, unbestimmter Koeffizient ist; aus der Bedingung $\mathfrak{v}_t\mathfrak{x} = 0$ berechnet man eindeutig $C = \mathfrak{x}\,\mathfrak{u}_t : \mathfrak{x}^2$ – es muß also $\bar{\mathfrak{x}} \neq 0$ sein, d. h. die Schraube $\mathfrak{x}$ eine eigentliche Achse haben –, und hieraus folgt eindeutig[15]

(27) $$\mathfrak{v}_t = (\mathfrak{x}^2 \cdot \mathfrak{u}_t - \mathfrak{x}\,\mathfrak{u}_t \cdot \mathfrak{x}) : \mathfrak{x}^2 = (\mathfrak{x} \times \mathfrak{u}_t \times \mathfrak{x}) : \mathfrak{x}^2.$$

Aus

(27a) $$\mathfrak{x}^2 \cdot \mathfrak{v}_p = \mathfrak{x} \times \mathfrak{u}_p \times \mathfrak{x},$$

(27b) $$\mathfrak{x}^2 \cdot \mathfrak{v}_q = \mathfrak{x} \times \mathfrak{u}_q \times \mathfrak{x}$$

ergibt sich nun, weil die mit S starr verbundene Schraube $\mathfrak{x}$

---

[15] Man wendet die Zerlegungsformel (vgl. Fußnote 11) auf $\mathfrak{x} \times (\mathfrak{u}_t \times \mathfrak{x}) = (\mathfrak{x} \times \mathfrak{u}_t) \times \mathfrak{x}$ an.

eine konstante duale Länge hat, d. h. $\mathfrak{x}^2 = \text{const.}$ ist, bei Berücksichtigung von (2a)

$$\mathfrak{x}^2\left(\frac{\partial \mathfrak{v}_p}{\partial q} - \frac{\partial \mathfrak{v}_q}{\partial p}\right) = (\mathfrak{u}_q \times \mathfrak{x}) \times (\mathfrak{u}_p \times \mathfrak{x}) - (\mathfrak{u}_p \times \mathfrak{x}) \times (\mathfrak{u}_q \times \mathfrak{x})$$
$$+ \mathfrak{x} \times \left(\frac{\partial \mathfrak{u}_p}{\partial q} - \frac{\partial \mathfrak{u}_q}{\partial p}\right) \times \mathfrak{x}$$
$$+ \mathfrak{x} \times (\mathfrak{u}_p \times (\mathfrak{u}_q \times \mathfrak{x})) - \mathfrak{x} \times (\mathfrak{u}_q \times (\mathfrak{u}_p \times \mathfrak{x}))$$
$$= -2(\mathfrak{u}_p \times \mathfrak{x}) \times (\mathfrak{u}_q \times \mathfrak{x}) + \mathfrak{x} \times (\mathfrak{x} \times (\mathfrak{u}_p \times \mathfrak{u}_q) + \mathfrak{u}_p \times (\mathfrak{u}_q \times \mathfrak{x}) +$$
$$+ \mathfrak{u}_q \times (\mathfrak{x} \times \mathfrak{u}_p)),$$

mithin[16]

(28) $$\mathfrak{x}^2 \cdot \left(\frac{\partial \mathfrak{v}_p}{\partial q} - \frac{\partial \mathfrak{v}_q}{\partial p}\right) = -2\mathfrak{x} \cdot \mathfrak{u}_p \mathfrak{u}_q \mathfrak{x}.$$

Hieraus folgt, weil wegen (27), angewandt auf $t = p$ und $t = q$,

29) $$\mathfrak{x}\mathfrak{v}_p\mathfrak{v}_q = \mathfrak{x}\mathfrak{u}_p\mathfrak{u}_q$$

ist,

(30a) $$2\int\int_{\mathfrak{G}} \mathfrak{x} \cdot \mathfrak{x}\mathfrak{v}_p\mathfrak{v}_q\, dp\, dq = \mathfrak{x}^2 \cdot \int_0^T \mathfrak{v}_t\, dt$$

oder, wieder wegen (29),

(30) $$\underline{2\int_{\mathfrak{G}} \mathfrak{x} \cdot \mathfrak{x}\, d\mathfrak{f} = \int_{\gamma} \mathfrak{x} \times \mathfrak{s} \times \mathfrak{x} \cdot du.}$$

Beziehungen zur Flächentheorie.

1. Die hier gegebenen Entwicklungen enthalten u. a. auch eine übersichtliche Lösung des sog. Fundamentalproblems der Flächentheorie, die kurz skizziert werde: Wählt man als Somenkongruenz die Gesamtheit derjenigen Begleitkörper einer vorgelegten Fläche, die durch eine auf dieser angenommene, integrable Richtungsübertragung festgelegt sind, so kann man mit Hilfe der Begriffsbildungen der kinematischen Differential-

[16] Die dreigliederige Summe in der Klammer verschwindet nach der Vertauschungsformel (vgl. Fußnote 12).

geometrie unschwer erkennen,[17] daß die Grundgleichung (15) völlig gleichbedeutend ist
mit dem theorema egregium von Gauß,
den Codazzi-Mainardischen Gleichungen
und dem Bonnetschen Lehrsatze, daß die Normalwindungen für zwei zueinander senkrechte Tangentenrichtungen in einem Flächenpunkt entgegengesetzt gleich sind.

Nimmt man nun, wie üblich, als Ausgangspunkt diese Gleichungen als bestehend an, so folgt mithin aus ihnen die Existenz einer Somenkongruenz, die man leicht als Mannigfaltigkeit von Begleitkörpern einer Fläche identifiziert, die gerade die in den vorausgesetzten Grundbeziehungen auftretenden Funktionen als Krümmungsgrößen oder -vektoren besitzt.

2. Die Formel (24) enthält als Spezialfall den Gauß-Bonnetschen Integralsatz der Flächentheorie: Man braucht als Somenkongruenz nur die Menge der Begleitkörper einer Schar von Flächenkurven zu wählen, zu denen eine geschlossene, auf einen Punkt zusammenziehbare Linie γ gehört; als Schraube $\mathfrak{x}$ nehme man die Einheitsschraube der Flächennormale, die ja in starrer Verbindung mit dem Begleitkörper steht, übrigens jedoch im allgemeinen nicht mit der Normalschraube der Somenkongruenz koaxial ist. Da der erste Teil von $\mathfrak{u}_t$ gleich dem mit $\dot{u}$ multiplizierten Krümmungsvektor der Flächenkurve ist, deren Begleitkörper $S(p(t), q(t))$ ist, so liefert der erste Teil von $\int_\gamma \mathfrak{x}\mathfrak{s}\,du$, wie man ohne Rechnung sieht,[18] das Linienintegral der geodätischen Krümmung; ferner ist in diesem Fall der erste Teil von $\mathfrak{x}\,\mathfrak{u}_p\mathfrak{u}_q\,dp\,dq$ ohne Mühe als das mit dem Flächenelement multiplizierte Krümmungsmaß zu erkennen.[19] Das Hinzutreten von 2π (und gegebenenfalls der negativen Außenwinkel der Randkurve) als Summanden hat letztlich den Grund, daß die momentane Drehgeschwindigkeit des Begleitkörpers einer Flächenkurve auch von deren Richtungsänderung abhängt, daß,

---

[17] Siehe Jahresber. d. D. Math.-Verein., Bd. 39 (1930), S. 168 ff., wo noch weitere Literatur zur „Natürlichen Geometrie" aufgeführt ist, sowie die in Fußnote 14 angegebene Arbeit, S. 167 ff.

[18] Vgl. Jahresber. d. D. Math.-Verein., Bd. 39 (1930), S. 173, oder diese Sitz.ber. Jahrgang 1929, S. 168.

[19] Vgl. Jahresber. d. D. Math.-Verein., Bd. 39 (1930), S. 180, Fußnote 1, oder diese Sitz.ber. Jahrgang 1929, S. 169.

mit anderen Worten, in diesem Falle $\mathfrak{u}_t$ als Funktion nicht nur von p, q, $\dot{p}$, $\dot{q}$, sondern auch von $\ddot{p}$, $\ddot{q}$ anzusehen ist. Davon kann man sich zwar dadurch unabhängig machen, daß man die Schar der Begleitkörper der Randlinie in eine Somenkongruenz einbettet; dies aber ist nicht möglich, ohne daß an wenigstens einer Stelle im Innern des umrandeten, einfach zusammenhängenden Flächengebietes der Krümmungsvektor unendlich wird. Um dennoch die Voraussetzungen für die Anwendbarkeit von (24) zu schaffen, muß man in üblicher Weise diese Stelle auf einer beliebig kleinen, schließlich auf sie zusammenzuziehenden Kurve γ' umfahren und bei der Integration ausschließen. Nach Stetigkeitssätzen der Kinematik konvergiert die Gesamtdrehung des Begleitkörpers S' von γ' gegen den Gesamtdrehwinkel -2π des sich um die Flächennormale der ausgeschlossenen Stelle drehenden Körpers, gegen dessen Bewegung die von S' konvergiert.

3. Auch die Beziehung (30) enthält als Sonderfall eine Integralformel der Flächentheorie,[20] die man mit derselben Deutung von S und $\mathfrak{x}$, wie sie im vorigen Abschnitt benutzt wurde, zu erhalten versuchen wird. Hierbei tritt die Schwierigkeit, die dort zum Erscheinen des Zusatzgliedes 2π führte, überhaupt nicht störend auf, wie folgende Überlegung zeigt: Die Drehvektoren aller von einem Punkt in einer und derselben Richtung mit derselben Geschwindigkeit fortschreitenden, normalenfesten Begleitkörper einer Fläche unterscheiden sich nur in ihrer Normalkomponente, der geodätischen Krümmung, voneinander; diese kommt aber in der Formel, die wir ins Auge fassen, gar nicht vor. Um diese aufzustellen, können wir daher die Formel (30) auf eine Kongruenz von Begleitkörpern der Fläche anwenden, die durch eine beliebige integrable Richtungsübertragung auf der Fläche festgelegt ist; zum Überfluß kann man noch dafür sorgen, daß ihre Geschwindigkeitsschrauben in $\mathfrak{S}$ beschränkt sind. Alle diese Somenkongruenzen müssen zu dem gleichen Ergebnis führen.

[20] Gemeint ist die Formel (13) auf S. 172 der in Fußnote 14 angeführten Note. – Für die dort auf S. 173 stehende Formel (16) finden wir hier nicht ohne weiteres ein Analogon, weil es keinen dualen Vektor gibt, der dem in den Integranden der genannten Formel vorkommenden Ortsvektor $\mathfrak{r}$ des Flächenpunktes entspräche.