# Sitzungsberichte

der

# mathematisch-naturwissenschaftlichen Abteilung

der

## Bayerischen Akademie der Wissenschaften zu München

---

**1941. Heft I**

Sitzungen Januar-Juni

---

München 1941
Verlag der Bayerischen Akademie der Wissenschaften
In Kommission bei der C. H. Beck'schen Verlagsbuchhandlung

# Über die Erweiterung des Definitionsbereiches mehrmals differenzierbarer Funktionen.

Von Karl Seebach in München.

Vorgelegt von Herrn H. Tietze am 1. März 1941.

## Einleitung.

**1.** In einer früheren Arbeit[1] (im folgenden bei Hinweisen kurz mit [1] zitiert) wurde die Frage nach der Erweiterung des Definitionsbereiches von Funktionen behandelt, die auf einer gegebenen linearen abgeschlossenen Menge differenzierbar sind. Im folgenden soll das analoge Problem für mehrmals differenzierbare Funktionen erörtert werden. Gegeben sei eine lineare abgeschlossene Menge $\mathfrak{M}$ und eine Funktion $f(x)$, die auf $\mathfrak{M}$ erklärt ist. Die Menge der Häufungspunkte von $\mathfrak{M}$ bezeichnen wir, wie üblich, mit $\mathfrak{M}'$. Von der Funktion $f(x)$ setzen wir voraus, daß sie auf $\mathfrak{M}$ $k$-mal $(k > 1)$ differenzierbar sei; dabei definieren wir die Ableitungen von $f(x)$ auf $\mathfrak{M}$, wie folgt: Es seien $k+1$ Funktionen $f(x) = f^{(0)}(x);\ f^{(1)}(x);\ \ldots\ldots f^{(k)}(x)$ vorhanden, die alle auf $\mathfrak{M}$ erklärt sind und für $x \varepsilon \mathfrak{M}$ und jedes $x_0 \varepsilon \mathfrak{M}'$ den Relationen genügen[2]:

$$\text{(E; 1)} \qquad \begin{gathered} f^{(\nu-1)}(x) = f^{(\nu-1)}(x_0) + (x - x_0) \cdot f^{(\nu)}(x_0) + o(x - x_0) \\ \nu = 1, 2, \ldots\ldots k;\ x \varepsilon \mathfrak{M};\ x_0 \varepsilon \mathfrak{M}'. \end{gathered}$$

Das Problem, das wir uns stellen, ist folgendes: Gibt es eine für alle $x$ definierte, $k$-mal differenzierbare Funktion $F(x)$, die, ebenso wie ihre $k$-Ableitungen $F^{(1)}(x), \ldots F^{(k)}(x)$, auf der gegebenen Menge $\mathfrak{M}$ mit den entsprechenden Funktionswerten $f(x), f^{(1)}(x), \ldots f^{(k)}(x)$ übereinstimmt? Also:

$$\text{(E; 2)} \qquad F^{(\nu)}(x) = f^{(\nu)}(x);\ x \varepsilon \mathfrak{M};\ \nu = 0, 1, \ldots\ldots k.$$

---

[1] Math. Ann. 116 (1939); p. 701–718.

[2] Unter $o(x)$ verstehen wir in üblicher Weise eine Funktion mit der Eigenschaft: $\lim\limits_{x \to 0} \frac{o(x)}{x} = 0$.

Wenn es so eine Funktion $F(x)$ gibt, werden wir sie als „Fortsetzung von $f(x)$" bezeichnen.

Der Weg, auf dem wir zur Lösung dieses Problems gelangen werden, ist folgender: Im ersten Teil (I) wird die Aufgabe auf eine äquivalente zurückgeführt, für deren Lösung im zweiten Teil (II) gewisse notwendige und hinreichende Bedingungen aufgestellt werden. Im dritten Teil (III) soll schließlich an einem Beispiel gezeigt werden, daß die genannten Bedingungen nicht immer erfüllt sind, also tatsächlich eine Einschränkung bedeuten.

## I.

**2.** Die gegebene Menge $\mathfrak{M}$ können wir ohne Einschränkung der Allgemeinheit als beschränkt voraussetzen[3]. Sei $\mathfrak{J}$ das kleinste abgeschlossene Intervall, das $\mathfrak{M}$ enthält, dann läßt sich $\mathfrak{M}$ darstellen in der Gestalt:

$$\mathfrak{M} = \mathfrak{J} - \Sigma\, i, \tag{1; 1}$$

wobei die $i$ höchstens abzählbar viele, offene, untereinander punktfremde Intervalle sind, die wir im folgenden kurz „Lückenintervalle" nennen wollen.

Wir nehmen nun an, $F(x)$ sei eine Lösung unseres Problems. Da $F^{(k-1)}(x)$ eine mindestens einmal differenzierbare Funktion ist, die eine „Fortsetzung von $f^{(k-1)}(x)$" darstellt, muß sich $F^{(k-1)}(x)$ in den Lückenintervallen sehr eng an die Funktion anschließen, die man erhalten würde, wenn man $f^{(k-1)}(x)$ in den Lückenintervallen linear fortsetzen würde[4]. Wir tragen dem Rechnung, indem wir $F^{(k-1)}(x)$ für jedes Lückenintervall einschließlich seiner Endpunkte $\underline{x}$, $\bar{x}$ $(\underline{x} < \bar{x})$ in die Form setzen:

$$\begin{gathered} F^{(k-1)}(x) = l(x) + h(x), \\ l(x) = f^{(k-1)}(\underline{x}) + \frac{f^{(k-1)}(\bar{x}) - f^{(k-1)}(\underline{x})}{\bar{x} - \underline{x}} \cdot (x - \underline{x}); \quad \underline{x} \leqq x \leqq \bar{x}. \end{gathered} \tag{1; 2}$$

Bei der Darstellung von $l(x)$, die die „lineare Fortsetzung von $f^{(k-1)}(x)$" darstellt, ist die Stelle $\underline{x}$ ausgezeichnet, was im fol-

---

[3] Vgl. [1]; p. 703 (Nr. 2).

[4] Vgl. [1]; p. 703 (Nr. 4); p. 704 (Nr. 5).

genden zu einer Unsymmetrie Veranlassung geben würde. Wir führen aus diesem Grunde für die späteren Rechnungen folgende Abkürzungen ein:

$$(1;3)\qquad \frac{f^{(p)}(\bar{x})+f^{(p)}(\underline{x})}{2}=M^{(p)};\ \frac{f^{(p-1)}(\bar{x})-f^{(p-1)}(\underline{x})}{\bar{x}-\underline{x}}=D^{(p)};$$
$$\frac{\underline{x}+\bar{x}}{2}=x_m.$$

Mit diesen Bezeichnungen läßt sich $l(x)$ von (1; 2) in der symmetrischen Gestalt schreiben:

$$(1;4)\qquad l(x)=M^{(k-1)}+(x-x_m)\cdot D^{(k)};\quad \underline{x}\leqq x\leqq \bar{x}.$$

**3.** Vermöge (1; 2) ist durch $F(x)$ für jedes $\mathfrak{i}$ einschließlich seiner Endpunkte eine Funktion $h(x)$ erklärt, welche die Abweichung von der linearen Fortsetzung von $f^{(k-1)}(x)$ darstellt. Auf Grund der vorausgesetzten Eigenschaften von $F(x)$ werden sich für $h(x)$ gewisse notwendige Bedingungen ergeben, wir wollen sie $(H_1)$; $(H_2)$; .... $(H_5)$ nennen, von denen wir dann auch zeigen werden, daß sie hinreichend sind.

Aus

$$F^{(k-1)}(\underline{x})=f^{(k-1)}(\underline{x});\quad F^{(k-1)}(\bar{x})=f^{(k-1)}(\bar{x})$$

folgt:

$$(\mathbf{H_1})\qquad h(\underline{x})=h(\bar{x})=0.$$

Aus der Existenz von $F^{(k)}(x)$ schließen wir auf das Vorhandensein von $h'(x)$ im Inneren jedes $\mathfrak{i}$; also

$$(\mathbf{H_2})\qquad h'(x)\text{ vorhanden für } \underline{x}<x<\bar{x}.$$

Für die Randpunkte entnehmen wir aus (1; 2) und (1; 4)

$$(\mathbf{H_3})\quad h'(\underline{x}+0)=f^{(k)}(\underline{x})-D^{(k)};\ h'(\bar{x}-0)=f^{(k)}(\bar{x})-D^{(k)}.$$

**4.** Sei nun $x_0$ ein Häufungspunkt von Lückenintervallen $\mathfrak{i}$; aus den vorausgesetzten Eigenschaften von $F(x)$ und (E; 2) folgt für beliebige $x$:

$$(1;5)\quad F^{(k-1)}(x)-f^{(k-1)}(x_0)-(x-x_0)\cdot f^{(k)}(x_0)=o(x-x_0).$$

Ist $x$ speziell ein Punkt im Inneren eines Lückenintervalles, so können wir wegen (1; 2) die linke Seite von (1; 5) so schreiben:

$$(1;6)\qquad l(x) - f^{(k-1)}(x_0) - (x - x_0)\cdot f^{(k)}(x_0) + h(x).$$

Für das folgende bezeichnen wir das einzige eventuell vorhandene Lückenintervall, von dem $x_0$ ein Endpunkt ist, mit $\mathfrak{i}_0$[5]. In [1] wurde nun gezeigt[6], daß bei linearer Ausfüllung der Lückenintervalle die Differenzierbarkeit in den Intervallhäufungspunkten nicht gestört wird, d. h. daß die Relation besteht:

$$(1;7)\ l(x) - f^{(k-1)}(x_0) - (x - x_0) f^{(k)}(x_0) = o(x - x_0);\ x\,\varepsilon\,(\Sigma\mathfrak{i} - \mathfrak{i}_0).$$

Aus (1; 5), (1; 6), (1; 7) entnehmen wir daher:

$$(\mathbf{H_4})\qquad h(x) = o(x - x_0) \text{ für jedes } x_0;\quad x\,\varepsilon\,(\Sigma\mathfrak{i} - \mathfrak{i}_0).$$

**5.** Schließlich bekommen wir für $h(x)$ noch Bedingungen aus den Gleichungen:

$$(1;8)\qquad \begin{array}{l} \text{a)}\ F^{(\mu)}(\underline{x}) = f^{(\mu)}(\underline{x}) \\ \text{b)}\ F^{(\mu)}(\bar{x}) = f^{(\mu)}(\bar{x}) \end{array}\qquad 0 \leqq \mu \leqq k-2.$$

(Für $\mu = k - 1$ und $\mu = k$ laufen diese Forderungen auf $(H_1)$ und $(H_3)$ hinaus.) Wir gehen aus von (1; 2), indem wir für $\underline{x} \leqq x \leqq \bar{x}$ schreiben:

$$(1;9)\quad F^{(k-1)}(x) = f^{(k-1)}(\underline{x}) + (x - \underline{x})\cdot D^{(k)} + h(x).$$

Durch $(\mu + 1)$-malige Integration dieser Gleichung erhalten wir:

$$(1;10)\qquad \begin{aligned} F^{(k-\mu-2)}(x) &= f^{(k-\mu-2)}(\underline{x}) + (x - \underline{x})\cdot f^{(k-\mu-1)}(\underline{x}) + \dots \\ &\dots + \frac{(x-\underline{x})^{\mu+1}}{(\mu+1)!}\cdot f^{(k-1)}(\underline{x}) + \frac{(x-\underline{x})^{\mu+2}}{(\mu+2)!}\cdot D^{(k)} + \\ &+ \int_{\underline{x}}^{x} h(t)\frac{(x-t)^{\mu}}{\mu!}\,dt;\ \underline{x} \leqq x \leqq \bar{x};\ 0 \leqq \mu \leqq k-2. \end{aligned}$$

---

[5] Wenn kein solches Intervall vorhanden ist, verstehen wir unter $\mathfrak{i}_0$ die Nullmenge.

[6] Vgl. [1]; p. 704 (Nr. 4).

Die Integrationskonstanten sind dabei so gewählt, daß (1; 8a) für jedes $\mu$ $(0 \leqq \mu \leqq k-2)$ erfüllt ist. Setzen wir in (1; 10) $x = \bar{x}$, so muß sich für $F^{(k-\mu-2)}(x)$ der Wert $f^{(k-\mu-2)}(\bar{x})$ ergeben. Die so entstehenden Bedingungsgleichungen sind aber unsymmetrisch, da die Stelle $\underline{x}$ bevorzugt ist. Um zu symmetrischen Gleichungen zu gelangen, schlagen wir folgenden Weg ein: Vertauscht man in (1; 10) $\underline{x}$ mit $\bar{x}$, so erhält man eine Darstellung von $F^{(k-\mu-2)}(x)$, bei der die Stelle $\bar{x}$ ausgezeichnet ist und welche der Relation (1; 8b), nicht aber identisch (1; 8a) genügt. Zur Abkürzung führen wir jetzt die Bezeichnungen ein:

$$(1;11)\qquad \begin{aligned} \underline{A}_\mu(x) &= f^{(k-\mu-2)}(\underline{x}) + (x-\underline{x}) \cdot f^{(k-\mu-1)}(\underline{x}) + \cdots \\ &\quad \cdots + \frac{(x-\underline{x})^{\mu+1}}{(\mu+1)!} f^{(k-1)}(\underline{x}) + \frac{(x-\underline{x})^{\mu+2}}{(\mu+2)!} \cdot D^{(k)}; \\ \bar{A}_\mu(x) &= f^{(k-\mu-2)}(\bar{x}) + (x-\bar{x}) \cdot f^{(k-\mu-1)}(\bar{x}) + \cdots \\ &\quad \cdots + \frac{(x-\bar{x})^{\mu+1}}{(\mu+1)!} f^{(k-1)}(\bar{x}) + \frac{(x-\bar{x})^{\mu+2}}{(\mu+2)!} \cdot D^{(k)}. \end{aligned}$$

Setzen wir nun die Darstellung von $F^{(k-\mu-2)}(x)$ in (1; 10) mit der anderen Darstellung gleich, die sich aus (1; 10) durch Vertauschung von $\underline{x}$ mit $\bar{x}$ ergibt, so bekommen wir mit Benützung von (1; 11):

$$\underline{A}_\mu(x) + \int_{\underline{x}}^{x} h(t) \frac{(x-t)^\mu}{\mu!}\, dt = \bar{A}_\mu(x) + \int_{\bar{x}}^{x} h(t) \frac{(x-t)^\mu}{\mu!}\, dt,$$

oder anders geschrieben:

$$(1;12)\qquad \int_{\underline{x}}^{\bar{x}} h(t) \frac{(x-t)^\mu}{\mu!}\, dt = \bar{A}_\mu(x) - \underline{A}_\mu(x);\quad 0 \leqq \mu \leqq k-2.$$

Diese $(k-1)$ Bedingungsgleichungen, denen $h(x)$ genügen muß lassen sich noch bedeutend vereinfachen. Für $\mu = 0$ nimmt (1; 12), wie man leicht nachrechnet, folgende Form an

$$(1;13)\qquad \int_{\underline{x}}^{\bar{x}} h(t)\, dt = D^{(k-1)} - M^{(k-1)},$$

also eine Gestalt, in der $x$ nicht mehr vorkommt. Für $\mu > 0$ folgt aus (1; 12) durch Differentiation nach $x$:

$$(1;14)\quad \int_{\underline{x}}^{\bar{x}} h(t)\frac{(x-t)^{\mu-1}}{(\mu-1)!}\,dt = \bar{A}_{\mu-1}(x) - \underline{A}_{\mu-1}(x);\ 1 \leqq \mu \leqq k-2.$$

Also folgt aus dem Bestehen von (1; 12) für den Index $(\mu - 1)$ die Richtigkeit auch für den Index $\mu$, wenn letztere Beziehung für ein spezielles $x = x_\mu$ erfüllt ist. Das System der Bedingungen (1; 12) reduziert sich also auf ein äquivalentes System, bei dem in jeder der $(k-1)$ Gleichungen die Variable $x$ durch einen speziellen Wert $x = x_\mu$ ersetzt ist. Aus Symmetriegründen wählen wir für alle Gleichungen den Mittelwert $x = x_m$ und erhalten so:

$$\int_{\underline{x}}^{\bar{x}} h(t)\frac{(x_m-t)^{\mu}}{\mu!}\,dt = \bar{A}_\mu(x_m) - \underline{A}_\mu(x_m).$$

Führen wir für die rechte Seite dieses Ausdruckes die folgende, später immer wiederkehrende Abkürzung ein

$$(1;15)\qquad \bar{A}_\mu(x_m) - \underline{A}_\mu(x_m) = \frac{\bar{x}-\underline{x}}{\mu!}\cdot A_\mu,$$

so nehmen unsere Bedingungsgleichungen schließlich die einfache Gestalt an:

$$(\mathbf{H_5})\qquad \frac{1}{\bar{x}-\underline{x}}\int_{\underline{x}}^{\bar{x}} h(t)(x_m-t)^\mu\,dt = A_\mu;\ 0 \leqq \mu \leqq k-2.$$

Dabei bemerken wir, daß die Größen $A_\mu$ die Funktionswerte $f^{(\nu)}(\underline{x})$, $f^{(\nu)}(\bar{x})$ $(0 \leqq \nu \leqq k)$ enthalten, also nur Größen, die durch das Problem gegeben sind und somit vollständig berechnet werden können. Die explizite Darstellung der $A_\mu$ ergibt sich aus (1; 11) und (1; 15):

$\mu$ gerade:

$$\frac{A_\mu}{\mu!}=\left[\frac{D^{(k-\mu-1)}}{0!}-\frac{M^{(k-\mu-1)}}{1!}\right]+\left[\frac{D^{(k-\mu+1)}}{2!}-\frac{M^{(k-\mu+1)}}{3!}\right]\left(\frac{\bar{x}-\underline{x}}{2}\right)^2+$$
$$+\ldots+\left[\frac{D^{(k-1)}}{\mu!}-\frac{M^{(k-1)}}{(\mu+1)!}\right]\left(\frac{\bar{x}-\underline{x}}{2}\right)^\mu;$$

(1; 16) $\mu$ ungerade:

$$\frac{A_\mu}{\mu!}=\left[\frac{D^{(k-\mu-1)}}{0!}-\frac{M^{(k-\mu-1)}}{1!}\right]+\left[\frac{D^{(k-\mu+1)}}{2!}-\frac{M^{(k-\mu+1)}}{3!}\right]\left(\frac{\bar{x}-\underline{x}}{2}\right)^2+$$
$$+\ldots+\left[\frac{D^{(k-2)}}{(\mu-1)!}-\frac{M^{(k-2)}}{\mu!}\right]\left(\frac{\bar{x}-\underline{x}}{2}\right)^{\mu-1}+$$
$$+\frac{D^{(k)}}{(\mu+1)!}\left(\frac{\bar{x}-\underline{x}}{2}\right)^{\mu+1}\cdot\left(1-\frac{\bar{x}-\underline{x}}{\mu+2}\right).$$

Das Ergebnis der bisherigen Untersuchungen können wir zusammenfassen in dem Satz:

**Satz I:** Notwendig für die Möglichkeit einer „Fortsetzung von $f(x)$" ist die Existenz einer Funktion $h(x)$, die den Bedingungen $(H_1)$, $(H_2)$, .... $(H_5)$ genügt.

**6.** Wir wollen nun zeigen, daß die in Satz I ausgesprochene notwendige Bedingung auch hinreichend ist. Wir setzen demgemäß voraus, es existiere eine Funktion $h(x)$, welche die Bedingungen $(H_1)$, $(H_2)$, .... $(H_5)$ erfüllen möge. Mit diesem $h(x)$ definieren wir eine Funktion $F(x)$ durch den Ansatz:

$$(1;17)\begin{cases} F(x)=f(\underline{x})+(x-\underline{x})f'(\underline{x})+\ldots+\dfrac{(x-\underline{x})^{k-1}}{(k-1)!}f^{(k-1)}(\underline{x})+ \\ \qquad +\dfrac{(x-\underline{x})^k}{k!}\cdot D^{(k)}+\displaystyle\int_{\underline{x}}^{x}h(t)\frac{(x-t)^{k-2}}{(k-2)!}\,dt \quad \text{für } \underline{x}\leqq x\leqq \bar{x}; \\ F(x)=f(x) \quad \text{für die übrigen Punkte von } \mathfrak{M}. \end{cases}$$

Bei dieser Darstellung von $F(x)$ ist die Stelle $\underline{x}$ ausgezeichnet; wegen $(H_5)$ oder dem damit äquivalenten Gleichungssystem (1; 12) gilt aber auch die andere Darstellung, bei der $\underline{x}$ mit $\bar{x}$ vertauscht ist. Daraus entnehmen wir sofort

$$F(x)=f(x);\quad x\,\varepsilon\,\mathfrak{M}.$$

Wie man weiter sieht, ist $F(x)$ wegen ($H_2$) im Inneren jedes Lückenintervalles mindestens $k$-mal differenzierbar; für die Randpunkte erhalten wir unter Benützung von ($H_1$) und ($H_3$):

$$F^{(\nu)}(\underline{x}+0)=f^{(\nu)}(\underline{x});\quad F^{(\nu)}(\bar{x}-0)=f^{(\nu)}(\bar{x});\quad 1\leqq\nu\leqq k.$$

Damit bleibt nur noch zu zeigen, daß die Differenzierbarkeit auch in den Intervallhäufungspunkten gewahrt ist. Um dies zu zeigen, gehen wir aus von folgender Identität:

$$(1;18)\quad F^{(\nu)}(x)-f^{(\nu)}(x_0)-(x-x_0)f^{(\nu+1)}(x_0)=D_1+D_2+D_3,$$

wobei

$$(1;19)\quad \begin{aligned} D_1&=f^{(\nu)}(\underline{x})-f^{(\nu)}(x_0)-(\underline{x}-x_0)f^{(\nu+1)}(x_0),\\ D_2&=(x-\underline{x})\,[f^{(\nu+1)}(\underline{x})-f^{(\nu+1)}(x_0)],\\ D_3&=F^{(\nu)}(x)-f^{(\nu)}(\underline{x})-(x-\underline{x})\cdot f^{(\nu+1)}(\underline{x})\end{aligned}$$

gesetzt ist.

Sei nun $x_0$ ein Häufungspunkt von Lückenintervallen, die rechts von $x_0$ liegen, $x$ ein Punkt im Inneren eines dieser Intervalle und $0\leqq\nu\leqq k-2$; dann gilt:

$$(1;20)\quad 0<\frac{\underline{x}-x_0}{x-x_0}<1;\quad 0<\frac{x-\underline{x}}{x-x_0}<1;\quad 0<\frac{x-\underline{x}}{\bar{x}-\underline{x}}<1.$$

Also folgt aus (E; 1)

$$(1;21)\qquad D_1=o(x-x_0).$$

Weiter ergibt sich mit Benützung von (1; 20) und der Stetigkeit von $f^{(\nu+1)}(x)$ auf $\mathfrak{M}$ für $0\leqq\nu\leqq k-2$:

$$(1;22)\qquad D_2=o(x-x_0).$$

Der Ausdruck $D_3$ läßt sich nach (1; 17) so schreiben:

$$D_3=\left\{\frac{(x-\underline{x})^2}{2!}f^{(\nu+2)}(\underline{x})+\ldots+\frac{(x-\underline{x})^{k-\nu-1}}{(k-\nu-1)!}f^{(k-1)}(\underline{x})\right\}+$$

$$+\frac{(x-\underline{x})^{k-\nu}}{(k-\nu)!}\cdot D^{(h)}+\int_{\underline{x}}^{x}h(t)\,\frac{(x-t)^{k-\nu-2}}{(k-\nu-2)!}\,dt,$$

wobei der erste Klammerausdruck für $\nu = k - 2$ durch Null zu ersetzen ist. Nach leichter Umformung ergibt sich:

$$\frac{D_3}{x - x_0} = (x - \underline{x}) \cdot \frac{x - \underline{x}}{x - x_0} \cdot \left\{ \frac{1}{2!} f^{(\nu+2)}(\underline{x}) + \dots + \right.$$
$$\left. + \frac{(x - \underline{x})^{k-\nu-3}}{(k - \nu - 1)!} f^{(k-1)}(\underline{x}) \right\} + \frac{x - \underline{x}}{x - x_0} \cdot \frac{x - \underline{x}}{\bar{x} - \underline{x}} \cdot \frac{(x - \underline{x})^{k-\nu-2}}{(k - \nu)!} \cdot$$
$$\cdot \left\{ [f^{(k-1)}(\bar{x}) - f^{(k-1)}(x_0)] - [f^{(k-1)}(\underline{x}) - f^{(k-1)}(x_0)] \right\} +$$
$$+ \int_{\underline{x}}^{x} \frac{h(t)}{x - x_0} \cdot \frac{(x - t)^{k-\nu-2}}{(k - \nu - 2)!} \, dt.$$

Wegen $\lim\limits_{x \to x_0} (x - \underline{x}) = 0$, (1; 20), ($H_4$) und der oben erwähnten Stetigkeit von $f^{(\nu+1)}(x)$ auf $\mathfrak{M}$ für $0 \leqq \nu \leqq k - 2$ schließen wir daraus

$$D_3 = o(x - x_0). \tag{1; 23}$$

Für jeden Intervallhäufungspunkt $x_0$ und beliebige $x$ aus Lückenintervallen rechts von $x_0$ ergibt sich somit nach (1; 18), (1; 21), (1; 22) und (1; 23):

$$\begin{aligned} F^{(\nu)}(x) - f^{(\nu)}(x_0) - (x - x_0) f^{(\nu+1)}(x_0) = \\ = o(x - x_0); \quad 0 \leqq \nu \leqq k - 2. \end{aligned} \tag{1; 24}$$

Damit ist die Differenzierbarkeit von $F^{(\nu)}(x)$ für $0 \leqq \nu \leqq k - 2$ und den Fall bewiesen, daß sich die Intervalle von rechts her gegen $x_0$ häufen. Im anderen Fall führt eine ganz analoge Rechnung zum Ziel, bei der die Stelle $\bar{x}$ ausgezeichnet ist. Die Gleichung (1; 24) gilt also bei beliebiger Annäherung an den Häufungspunkt $x_0$.

Nachträglich können wir für $\nu$ auch noch den Wert $\nu = k - 1$ zulassen; denn in diesem Fall ist (1; 24) identisch mit (1; 5), eine Gleichung, durch die wir gerade zur Bedingung ($H_4$) geführt wurden, die also nach Voraussetzung erfüllt ist. Damit haben wir das Ergebnis:

**Satz II:** Die in Satz I aufgestellte notwendige Bedingung ist auch hinreichend.

## II.

**7.** In der vorausgehenden Untersuchung wurde gezeigt, daß das ursprüngliche Problem — nennen wir es $P_1$ — äquivalent ist mit folgendem Problem $P_2$: Existiert eine Funktion $h(x)$, die in jedem (abgeschlossenen) Lückenintervall definiert ist und die außerdem den Bedingungen $(H_1)$, $(H_2)$, .... $(H_5)$ genügt? Es gilt also

$$(2;1) \qquad P_1 \sim P_2.$$

Wir werden nun sehen, daß für die Lösbarkeit von $P_1$ eine gewisse Bedingung $(B_1)$ notwendig ist, ebenso für die Lösbarkeit von $P_2$ eine Bedingung $(B_2)$, was wir so schreiben können:

$$(2;2) \qquad P_1 \rightarrow (B_1); \quad P_2 \rightarrow (B_2).$$

Umgekehrt wird sich zeigen, daß aus $(B_1)$ und $(B_2)$ zusammen $P_2$ folgt und daraus wegen (2; 1) auch $P_1$; also:

$$(2;3) \qquad (B_1) \;\&\; (B_2) \rightarrow P_2 \rightarrow P_1.$$

Aus (2; 1), (2; 2), (2; 3) werden wir dann schließen können: $(B_1)$ und $(B_2)$ sind notwendige und hinreichende Bedingungen für die Lösbarkeit von $P_1$. Das ist kurz zusammengefaßt der Inhalt der folgenden Untersuchung.

**8.** Zunächst befassen wir uns mit (2; 2): Ist $P_1$ lösbar, gibt es also eine Funktion $F(x)$, so ist $F^{(k-1)}(x)$ eine „Fortsetzung von $f^{(k-1)}(x)$", wobei $f^{(k-1)}(x)$ auf $\mathfrak{M}$ (mindestens) noch einmal differenzierbar ist, die Ableitung $f^{(k)}(x)$ dagegen auf $\mathfrak{M}$ nicht mehr stetig zu sein braucht. Für $f^{(k-1)}(x)$ liegt demnach gerade die Problemstellung vor, die in [1] untersucht wurde. Die Frage, ob es stets eine „Fortsetzung" einer (einmal) differenzierbaren Funktion gibt, konnte in [1] nicht allgemein beantwortet werden, doch wurde dort unter anderem gezeigt, daß dies stets möglich ist, wenn die Ableitung auf der betrachteten Menge stetig ist [7]. Diese (hinreichende) Bedingung ist aber gerade für die Ableitung von

[7] Vgl. [1]; p. 713, Satz IV.

$f^{(k-1)}(x)$ nicht gesichert, während sie für die vorausgehenden Funktionen $f^{(\nu)}(x)$ $(0 \leqq \nu \leqq k-2)$ durch (E; 1) erfüllt wird. In [1] sind nun Bedingungen angegeben, die notwendig und hinreichend sind dafür, daß sich eine auf einer abgeschlossenen Menge differenzierbare Funktion fortsetzen läßt[8]; wir wollen indessen diese etwas weitläufigen Sätze hier nicht im einzelnen anführen, sondern für das folgende als notwendig die summarische Forderung $(B_1)$ stellen:

**$(B_1)$** Es existiert eine Funktion $F^{(k-1)}(x)$, die eine „Fortsetzung von $f^{(k-1)}(x)$" ist.

**9.** Wie oben schon erwähnt, können wir eine weitere notwendige Bedingung $(B_2)$ aus $P_2$ folgern: Nach $P_2$ existiert ja eine Funktion $h(x)$, die den Bedingungen $(H_1)$, $(H_2)$, ...., $(H_5)$ genügt. Nun können wir aus $(H_5)$ nach dem Mittelwertsatz der Integralrechnung folgern: In jedem Lückenintervall $i$ gibt es $(k-1)$ Zahlen $\xi_\mu$ mit der Eigenschaft

$$(2;4) \qquad h(\xi_\mu)\,(x_m-\xi_\mu)^\mu = A_\mu;\ \underline{x} < \xi_\mu < \bar{x};\ 0 \leqq \mu \leqq k-2.$$

Ist nun $A_\mu \neq 0$, so ist auch $x_m - \xi_\mu \neq 0$ und wir können schreiben:

$$(2;5) \qquad h(\xi_\mu) = \frac{A_\mu}{(x_m-\xi_\mu)^\mu};\quad A_\mu \neq 0.$$

Nach $(H_4)$ gilt aber:

$$(2;6) \qquad h(\xi_\mu) = o\,(\xi_\mu - x_0) \text{ für jedes feste } x_0.$$

Wegen

$$\left|\frac{A_\mu}{(x_m-\xi_\mu)^\mu}\right| > \frac{|A_\mu|}{(\bar{x}-\underline{x})^\mu} \geqq 0$$

folgt somit aus (2; 5) und (2; 6) für jedes feste $x_0$ und $0 \leqq \mu \leqq k-2$[9]:

$$(2;7) \qquad \frac{A_\mu}{(\bar{x}-\underline{x})^\mu} = o\,(\xi_\mu - x_0);\ A_\mu \neq 0.$$

---

[8] Vgl. [1]; p. 706, Satz I; p. 712, Satz III; p. 718, Satz VI.

[9] Die Zusatzforderung, daß $\xi_\mu$ nicht in $i_0$ (vgl. Nr. 4) liegen soll, können wir hier natürlich streichen.

Zur Vereinfachung der Darstellung können wir die Forderung $A_\mu \neq 0$ nachträglich wieder fallen lassen; denn die Gleichung (2; 7) wird gewiß bestehen bleiben, wenn wir bei der Limesbildung auch die $A_\mu = 0$ zulassen und ihnen z. B. den Wert $\xi_\mu = x_m$ zuordnen.

**10.** Nun erklären wir $(k-1)$ Funktionen $\varphi_\mu(x)$ $(0 \leqq \mu \leqq k-2)$, deren gemeinsamer Definitionsbereich die Menge aller Intervallmittelpunkte $x_m$ sei; jedem $x_m$ entspricht eindeutig ein Lückenintervall, diesem sind $(k-1)$ Zahlen $\frac{A_\mu}{(\bar{x}-\underline{x})^\mu}$ zugeordnet, die sich aus den gegebenen Größen berechnen lassen (vgl. (1; 16)). Also hat folgende Definition einen Sinn:

$$(2;8) \qquad \varphi_\mu(x_m) = \frac{A_\mu}{(\bar{x}-\underline{x})^\mu}; \quad 0 \leqq \mu \leqq k-2.$$

Wir werden jetzt zeigen, daß aus (2; 7) folgt:

$$(2;9) \qquad \varphi_\mu(x_m) = o(x_m - x_0) \text{ für jedes } x_0.$$

Nach (2; 7) gibt es nämlich in jedem Intervall eine Zahl $\xi_\mu$ mit der Eigenschaft:

$$(2;10) \qquad \varphi_\mu(x_m) = o(\xi_\mu - x_0) \text{ für jedes } x_0.$$

Wegen

$$\frac{\varphi_\mu(x_m)}{x_m - x_0} = \frac{\varphi_\mu(x_m)}{\xi_\mu - x_0} \cdot \frac{\xi_\mu - x_0}{x_m - x_0}; \quad 0 < \frac{\xi_\mu - x_0}{x_m - x_0} < 2$$

folgt daraus sofort (2; 9). Wir haben somit die weitere notwendige Bedingung $(B_2)$:

$$\mathbf{(B_2)} \qquad \varphi_\mu(x_m) = \frac{A_\mu}{(\bar{x}-\underline{x})^\mu} = o(x_m - x_0)$$
$$\text{für jedes feste } x_0 \text{ und } 0 \leqq \mu \leqq k-2.$$

**11.** Nun gehen wir dazu über, die Umkehrung zu beweisen: Aus $(B_1)$ und $(B_2)$ folgt $P_2$. Wir setzen zu diesem Zweck die Funktion $h(x)$ in jedem Lückenintervall $(\underline{x} \leqq x \leqq \bar{x})$ in die Gestalt:

$$(2;11) \qquad h(x) = u(x) + v(x),$$

wobei wir $u(x)$ und $v(x)$ folgenden Bedingungen unterwerfen, die wir zusammenfassend, soweit sie sich auf $u(x)$ beziehen, mit (U), soweit sie sich auf $v(x)$ beziehen, mit (V) bezeichnen wollen[10]:

$$
(\mathrm{U})\left\{\begin{array}{l}
1)\ u(\underline{x}) = u(\bar{x}) = 0; \\
2)\ u'(x) \text{ vorhanden in } \underline{x} < x < \bar{x}; \\
3)\ u'(\underline{x}+0) = f^{(k)}(\underline{x}) - D^{(k)};\ u'(\bar{x}-0) = f^{(k)}(\bar{x}) - D^{(k)}; \\
4)\ u(x) = o(x - x_0) \text{ für jedes feste } x_0;\ x \varepsilon (\Sigma\mathfrak{i} - \mathfrak{i}_0); \\
5)\ |u(x)| < (\bar{x} - \underline{x})^2.
\end{array}\right.
$$

$$
(\mathrm{V})\left\{\begin{array}{l}
1)\ v(\underline{x}) = v(\bar{x}) = 0; \\
2)\ v'(x) \text{ vorhanden in } \underline{x} < x < \bar{x}; \\
3)\ v'(\underline{x}+0) = v'(\bar{x}-0) = 0; \\
4)\ \dfrac{1}{\bar{x}-\underline{x}} \displaystyle\int_{\underline{x}}^{\bar{x}} v(x)\,(x_m - x)^{\mu}\,dx = \\
\qquad = A_{\mu} - \dfrac{1}{\bar{x}-\underline{x}} \displaystyle\int_{\underline{x}}^{\bar{x}} u(x)\,(x_m - x)^{\mu}\,dx;\ 0 \leqq \mu \leqq k-2; \\
5)\ v(x) = o(x - x_0) \text{ für jedes feste } x_0;\ x \varepsilon (\Sigma\mathfrak{i} - \mathfrak{i}_0).
\end{array}\right.
$$

Man sieht sofort: Wenn die Funktionen $u(x)$ bzw. $v(x)$ den Bedingungen (U) bzw. (V) genügen, so definieren sie nach (2; 11) eine Funktion $h(x)$, die $(H_1)$, $(H_2)$, ...., $(H_5)$ erfüllt. Im folgenden werden wir unter der Voraussetzung, daß $(B_1)$ und $(B_2)$ gelten, die Existenz solcher Funktionen $u(x)$ und $v(x)$ nachweisen.

**12.** Zuerst konstruieren wir $u(x)$. Nach $(B_1)$ gibt es eine differenzierbare Funktion $F^{(k-1)}(x)$, die eine „Fortsetzung von $f^{(k-1)}(x)$" darstellt. Nun wurde in [1] folgender Satz bewiesen[11], den wir hier zur Anwendung bringen wollen[12]:

**Satz III:** Sei $\underline{\xi}$ ein Punkt im ersten Drittel, $\bar{\xi}$ ein Punkt im letzten Drittel jedes Lückenintervalles $\mathfrak{i}$ (gegeben

---

[10] Die einzelnen Nummern von (U) bzw. (V) seien im folgenden kurz durch $(U_1)$, ...., $(U_5)$ bzw. $(V_1)$, ...., $(V_5)$ charakterisiert.

[11] Vgl. [1]; p. 706, Satz I und p. 707, Satz II.

[12] Die Bezeichnungen sind natürlich dem vorliegenden Fall angepaßt.

durch $\underline{x} < x < \bar{x}$) und seien $f^{(k-1)}(\underline{\xi})$ bzw. $f^{(k-1)}(\bar{\xi})$ definiert durch

$$(2;12) \qquad \begin{aligned} f^{(k-1)}(\underline{\xi}) &= f^{(k-1)}(\underline{x}) + (\underline{\xi} - \underline{x}) \cdot f^{(k)}(\underline{x}); \\ f^{(k-1)}(\bar{\xi}) &= f^{(k-1)}(\bar{x}) + (\bar{\xi} - \bar{x}) \cdot f^{(k)}(\bar{x}). \end{aligned}$$

$\mathfrak{M}^*$ sei die Vereinigungsmenge der Menge $\mathfrak{M}$ (des ursprünglichen Definitionsbereiches von $f^{(k-1)}(x)$ mit der Menge dieser „Zwischenpunkte" $\underline{\xi}$, $\bar{\xi}$. Für die Existenz einer Funktion $F^{(k-1)}(x)$, die eine „Fortsetzung von $f^{(k-1)}(x)$" darstellt, ist es dann notwendig (und hinreichend), daß sich diese Punkte $\underline{\xi}$, $\bar{\xi}$ so wählen lassen, daß $f^{(k-1)}(x)$ auch auf $\mathfrak{M}^*$ differenzierbar ist.

Nach diesem Satz gibt es in jedem Lückenintervall zwei „Zwischenpunkte" $\underline{\xi}$, $\bar{\xi}$, die — falls $f^{(k-1)}(\underline{\xi})$ bzw. $f^{(k-1)}(\bar{\xi})$ nach (2; 12) erklärt sind — folgenden Relationen genügen:

$$(2;13) \qquad \begin{aligned} f^{(k-1)}(\underline{\xi}) &= f^{(k-1)}(x_0) + (\underline{\xi} - x_0) f^{(k)}(x_0) + o(\underline{\xi} - x_0) \\ f^{(k-1)}(\bar{\xi}) &= f^{(k-1)}(x_0) + (\bar{\xi} - x_0) f^{(k)}(x_0) + o(\bar{\xi} - x_0) \end{aligned}$$

für jedes feste $x_0$.

Dabei ist zu beachten, daß diese Gleichungen erst recht bestehen bleiben, wenn man die $\underline{\xi}$ bzw. $\bar{\xi}$ noch näher an die Randpunkte $\underline{x}$ bzw. $\bar{x}$ heranrückt. Wir wollen die $\bar{\xi}$, $\underline{\xi}$ so wählen, daß außerdem gilt:

$$(2;14) \qquad \begin{aligned} (\underline{\xi} - \underline{x}) \cdot |f^{(k)}(\underline{x}) - D^{(k)}| &< \frac{(\bar{x} - \underline{x})^2}{2}; \\ (\bar{x} - \bar{\xi}) \cdot |f^{(k)}(\bar{x}) - D^{(k)}| &< \frac{(\bar{x} - \underline{x})^2}{2}. \end{aligned}$$

Nach dieser Wahl der $\underline{\xi}$, $\bar{\xi}$ definieren wir eine Funktion $u^*(x)$ durch einen gebrochenen Streckenzug, der — nachdem wir seine Ecken abgerundet haben werden — die Funktion $u(x)$ darstellen soll:

$$(2;15)\quad \begin{aligned} u^*(x) &= (x-\underline{x})\cdot(f^{(k)}(\underline{x})-D^{(k)}); \quad \underline{x}\leqq x\leqq \underline{\xi};\\ u^*(x) &= (x-\bar{x})\cdot(f^{(k)}(\bar{x})-D^{(k)}); \quad \bar{\xi}\leqq x\leqq \bar{x};\\ u^*(x) &= u^*(\underline{\xi})+(x-\underline{\xi})\cdot\frac{u^*(\bar{\xi})-u^*(\underline{\xi})}{\bar{\xi}-\underline{\xi}}; \quad \underline{\xi}\leqq x\leqq \bar{\xi}. \end{aligned}$$

Wie man sofort sieht, erfüllt diese Funktion $u^*(x)$ die Bedingungen $(U_1)$, $(U_3)$ und wegen (2; 14) auch $(U_5)$. Zum Beweis von $(U_4)$ gehen wir von folgender Gleichung aus, die aus (2; 12) und (2; 13) folgt:

$$(2;16)\quad \begin{aligned} &f^{(k-1)}(\underline{x})+(\underline{\xi}-\underline{x})f^{(k)}(\underline{x}) =\\ &=f^{(k-1)}(x_0)+(\underline{\xi}-x_0)f^{(k)}(x_0)+o(\underline{\xi}-x_0). \end{aligned}$$

Anderseits stellt der Ausdruck $f^{(k-1)}(\underline{x})+(x-\underline{x})D^{(k)}$ die lineare Fortsetzung von $f^{(k-1)}(x)$ im Inneren des Lückenintervalles dar. Nach dem in Nr. **4** zitierten Satz aus [1] bleibt bei einer solchen linearen Fortsetzung die Differenzierbarkeit in den Intervallhäufungspunkten gewahrt, wenn man das eine eventuell vorhandene Intervall $\mathfrak{i}_0$ mit $x_0$ als Endpunkt ausschließt. Wir haben daher:

$$(2;17)\quad \begin{aligned} &f^{(k-1)}(\underline{x})+(\underline{\xi}-\underline{x})\cdot D^{(k)} =\\ &=f^{(k-1)}(x_0)+(\underline{\xi}-x_0)f^{(k)}(x_0)+o(\underline{\xi}-x_0). \end{aligned}$$

Ziehen wir (2; 17) von (2; 16) ab, so erhalten wir:

$$)2;18)\quad u^*(\underline{\xi})=(\underline{\xi}-\underline{x})\,[f^{(k)}(\underline{x})-D^{(k)}]=o(\underline{\xi}-x_0).$$

Durch eine ganz ähnliche Betrachtung ergibt sich:

$$(2;19)\quad u^*(\bar{\xi})=(\bar{\xi}-\bar{x})\,[f^{(k)}(\bar{x})-D^{(k)}]=o(\bar{\xi}-x_0).$$

Die Gleichungen (2; 18) und (2; 19) können wir im Zusammenhang mit $(U_1)$ so deuten: Die Funktion $u^*(x)$ mit der Menge $\mathfrak{M}^*$ (vgl. Satz III) als Definitionsbereich ist in jedem Intervallhäufungspunkt $x_0$ differenzierbar mit der Ableitung Null. Wenden wir daher nochmals den in Nr. **4** erwähnten Satz aus [1] an, so folgt: Füllen wir die Lückenintervalle von $\mathfrak{M}^*$ linear aus, d. h. legen wir für $u^*(x)$ die Definition (2; 15) zugrunde, so bleibt die Differenzierbarkeit in den Intervallhäufungspunkten erhalten, wobei wieder von dem eventuell unmittelbar an $x_0$ angrenzenden Intervall $\mathfrak{i}_0$ abzusehen ist. Also gilt für jedes feste $x_0$

$$u^*(x) = o(x - x_0); \quad x \varepsilon (\Sigma \mathfrak{i} - \mathfrak{i}_0),$$

womit $(U_4)$ bewiesen ist.

**13.** Nun ist klar, daß $u^*(x)$ als gebrochener Streckenzug im Inneren jedes Lückenintervalles Ecken aufweisen kann. Um auch $(U_2)$ Genüge zu leisten, wollen wir diese Ecken so abrunden, daß die übrigen Forderungen $(U_1)$, $(U_3)$, $(U_4)$, $(U_5)$ nicht mehr verletzt werden. Die auf diese Weise dargestellte Funktion nennen wir dann $u(x)$. Denken wir uns $u^*(x)$ in üblicher Weise in einem $(x; y)$-Koordinatensystem dargestellt, so haben die kritischen Punkte die Koordinaten $(\underline{\xi}; u^*(\underline{\xi}))$; $(\overline{\xi}; u^*(\overline{\xi}))$. Um jeden dieser Punkte als Mittelpunkt möge ein Kreis beschrieben werden mit dem Radius

$$(2;20) \qquad r = \mathrm{Min}\left[(\underline{\xi} - \underline{x})^2; (\overline{\xi} - \overline{x})^2; \frac{1}{9}\right].$$

Ist nun $\underline{\xi} - \underline{x} \leqq \overline{x} - \overline{\xi}$, so gilt wegen

$$\underline{\xi} - \underline{x} < \frac{\overline{x} - \underline{x}}{3}; \quad \overline{x} - \overline{\xi} < \frac{\overline{x} - \underline{x}}{3}$$

für $\underline{\xi} - \underline{x} \leqq \frac{1}{3}$:

$$r = (\underline{\xi} - \underline{x})^2 \leqq \frac{\underline{\xi} - \underline{x}}{3} \leqq \frac{\overline{x} - \overline{\xi}}{3} \leqq \frac{\overline{x} - \underline{x}}{9};$$

für $\underline{\xi} - \underline{x} > \frac{1}{3}$:

$$r = \frac{1}{9} < \frac{\underline{\xi} - \underline{x}}{3} \leqq \frac{\overline{x} - \overline{\xi}}{3} \leqq \frac{\overline{x} - \underline{x}}{9}.$$

Aus den analogen Ungleichungen für den Fall $\underline{\xi} - \underline{x} > \overline{x} - \overline{\xi}$ erhalten wir zusammenfassend:

$$r \leqq \mathrm{Min}\left(\frac{\underline{\xi} - \underline{x}}{3}; \frac{\overline{x} - \overline{\xi}}{3}\right) \leqq \frac{\overline{x} - \underline{x}}{9}.$$

Die einzelnen Kreise können sich also weder überdecken noch über den durch das zugehörige Intervall definierten Vertikalstreifen hinausragen. Das Innere eines solchen Kreises läßt sich darstellen in der Form:

$$(2;21)\qquad \mathfrak{K}:\begin{array}{l} x = \underline{\xi} + \rho\cdot\cos\varphi;\quad 0 \leqq \rho < r;\\ y = u^*(\underline{\xi}) + \rho\cdot\sin\varphi;\quad 0 \leqq \varphi < 2\pi. \end{array}$$

Genau das Entsprechende gilt natürlich für $\bar{\xi}$, $u^*(\bar{\xi})$, möge aber der Kürze halber unterdrückt werden. Wir wollen jetzt zeigen, daß für alle Punkte $(x; y)$ aus $\mathfrak{K}$ die Relation besteht[13]:

$$(2;22)\qquad y = o(x - x_0);\quad (x;y)\,\varepsilon\,\mathfrak{K}.$$

Das bedeutet: Wir können die im Mittelpunkt von $\mathfrak{K}$ eventuell vorhandene Ecke durch einen differenzierbaren Kurvenbogen überbrücken, ohne $(U_4)$ zu verletzen. Die so definierte Funktion $u(x)$ genügt dann auch $(U_2)$. Daß bei diesem Verfahren $(U_1)$ und $(U_3)$ gewahrt bleiben, ist unmittelbar klar; wegen (2; 14) und (2; 20) gilt außerdem

$$\left|u(x)\right| < \frac{(\bar{x} - \underline{x})^2}{2} + \left(\frac{\bar{x} - \underline{x}}{3}\right)^2 < (\bar{x} - \underline{x})^2,$$

sodaß auch $(U_5)$ erfüllt ist. Wir sind also fertig, wenn (2; 22) bewiesen ist. Dazu setzen wir (2; 21) in (2; 22) ein und erhalten:

$$\frac{u^*(\underline{\xi}) + \rho\cdot\sin\varphi}{\underline{\xi} + \rho\cdot\cos\varphi - x_0} = \frac{u^*(\underline{\xi})}{\underline{\xi} - x_0} : \left\{1 + \frac{\rho\cdot\cos\varphi}{\underline{\xi} - x_0}\right\} + $$
$$+ \frac{\rho\cdot\sin\varphi}{\underline{\xi} - x_0} : \left\{1 + \frac{\rho\cdot\cos\varphi}{\underline{\xi} - x_0}\right\}.$$

Aus (2; 20) entnehmen wir:

$$\left|\frac{\rho\cdot\begin{Bmatrix}\sin\varphi\\ \cos\varphi\end{Bmatrix}}{\underline{\xi} - x_0}\right| < \frac{r}{\underline{\xi} - \underline{x}} < (\underline{\xi} - \underline{x}) < \frac{\bar{x} - \underline{x}}{3},$$

[13] Die Einschränkung $x\,\varepsilon\,(\Sigma\mathfrak{i} - \mathfrak{i}_0)$ kann hier wieder weggelassen werden.

woraus nach (2; 18) sofort die Behauptung folgt, da $(\bar{x} - \underline{x})$ als Intervallänge bei Annäherung an einen Häufungspunkt $x_0$ gegen Null konvergiert.

**14.** Es bleibt nun noch übrig, eine Funktion $v(x)$ anzugeben, die (V) genügt. Zu diesem Zweck betrachten wir eine im Intervall $-1 \leqq x \leqq 1$ differenzierbare Funktion $w(x)$, die folgende Eigenschaften hat[14]:

$$\text{(W)}\qquad \begin{aligned} &1)\ w(-1) = w(1) = w'(-1) = w'(1) = 0;\\ &2)\ \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} w(x) \cdot x^{\mu}\, dx = C_{\mu}; \quad 0 \leqq \mu \leqq k-2;\\ &3)\ |w'(x)| \leqq c \cdot \sum_{\mu=0}^{k-2} |C_{\mu}|. \end{aligned}$$

Dabei mögen die $C_{\mu}$ irgendwelche gegebenen Größen sein und $c$ eine Konstante, die von den $C_{\mu}$ unabhängig ist. Daß es tatsächlich solche Funktionen gibt, werden wir am Schlusse dieses Abschnittes (vgl. Nr. **15**) beweisen; es wird sich zeigen, daß es sogar Polynome gibt, die das Verlangte leisten.

Jetzt schreiben wir

$$(2; 23) \qquad v(x) = w\left(2 \cdot \frac{x - x_m}{\bar{x} - \underline{x}}\right),$$

dann genügt $v(x)$ den Bedingungen (V). Für $(V_1)$, $(V_2)$ und $(V_3)$ ist das unmittelbar klar. Wegen

$$(2; 24) \qquad \frac{1}{\bar{x} - \underline{x}} \int_{\underline{x}}^{\bar{x}} v(x)\,(x_m - x)^{\mu}\, dx = \frac{(-1)^{\mu}\,(\bar{x} - \underline{x})^{\mu}}{2^{\mu}} \cdot C_{\mu}$$

ist auch $(V_4)$ erfüllt, wenn wir setzen:

$$(2; 25) \quad C_{\mu} = \frac{(-1)^{\mu} \cdot 2^{\mu} \cdot A_m}{(\bar{x} - \underline{x})^{\mu}} + \frac{(-1)^{\mu+1} \cdot 2^{\mu}}{(\bar{x} - \underline{x})^{\mu+1}} \int_{\underline{x}}^{\bar{x}} u(x)\,(x_m - x)^{\mu}\, dx.$$

---

[14] Die einzelnen Gleichungen bezeichnen wir in der Folge wieder mit $(W_1)$, ... $(W_3)$.

Die Richtigkeit von ($V_5$) ergibt sich schließlich aus folgender Rechnung, bei der wir voraussetzen, daß das betrachtete Intervall rechts von $x_0$ liegt; im anderen Fall ist $\underline{x}$ durch $\bar{x}$ zu ersetzen, sonst verläuft alles analog:

$$\frac{v(x)}{x-x_0} = \frac{v(x)}{x-\underline{x}} \cdot \frac{x-\underline{x}}{x-x_0};$$

$$\left|\frac{v(x)}{x-\underline{x}}\right| = \left|v'(\underline{x}+\vartheta(x-\underline{x}))\right| \leqq \frac{2c}{\bar{x}-\underline{x}} \cdot \sum_{\mu=0}^{k-2} |C_\mu|;\quad 0<\vartheta<1.$$

Nach (2; 25) folgt also:

$$\left|\frac{v(x)}{x-\underline{x}}\right| \leqq \frac{2c}{\bar{x}-\underline{x}} \sum_{\mu=0}^{k-2} \frac{2^\mu |A_\mu|}{(\bar{x}-\underline{x})^\mu} +$$

$$+ \frac{2c}{\bar{x}-\underline{x}} \sum_{\mu=0}^{k-2} \frac{2^\mu}{(\bar{x}-\underline{x})^{\mu+1}} \left| \int_{\underline{x}}^{\bar{x}} u(x)\,(x_m-x)^\mu\,dx \right|.$$

Das Integral auf der rechten Seite können wir nach ($U_5$) abschätzen

$$\left| \frac{2^\mu}{(\bar{x}-\underline{x})^{\mu+1}} \int_{\underline{x}}^{\bar{x}} u(x)\,(x_m-x)^\mu\,dx \right| \leqq (\bar{x}-\underline{x})^2,$$

sodaß wir bekommen:

$$\left|\frac{v(x)}{x-x_0}\right| \leqq 2c\,\frac{(x-\underline{x})\,(x_m-x_0)}{(x-x_0)\,(\bar{x}-\underline{x})} \cdot \sum_{\mu=0}^{k-2} \frac{2^\mu |A_\mu|}{(\bar{x}-\underline{x})^\mu\,(x_m-x_0)} +$$

$$+\, 2c \cdot (k-1)\,\frac{x-\underline{x}}{x-x_0} \cdot (\bar{x}-\underline{x}).$$

Aus der Bedingung ($B_2$), deren Gültigkeit wir ja vorausgesetzt haben, folgt nun:

$$\lim_{x\to x_0} \sum_{\mu=0}^{k-2} \frac{2^\mu |A_\mu|}{(\bar{x}-\underline{x})^\mu\,(x_m-x_0)} = 0;\quad x\,\varepsilon\,(\Sigma\mathfrak{i}-\mathfrak{i}_0).$$

Also gilt wegen

$$\frac{(x-\underline{x})(x_m-x_0)}{(x-x_0)(\bar{x}-\underline{x})} = \frac{(x_m-\underline{x})\cdot(x-\underline{x})}{(\bar{x}-\underline{x})\cdot(x-x_0)} + \frac{(\underline{x}-x_0)\cdot(x-\underline{x})}{(x-x_0)\,(\bar{x}-\underline{x})} < \frac{3}{2};$$

$$\lim_{x\to x_0} (\bar{x}-\underline{x}) = 0; \quad x\,\varepsilon\,(\Sigma\mathfrak{i}-\mathfrak{i}_0)$$

die Behauptung:

$$v(x) = o(x-x_0); \quad x\,\varepsilon\,(\Sigma\mathfrak{i}-\mathfrak{i}_0).$$

**15.** Wie oben schon erwähnt, haben wir jetzt noch zu zeigen, daß es Funktionen gibt, die (W) erfüllen. Wir sehen zunächst von $(W_1)$ ab und setzen

$$w^*(x) = \sum_{n=0}^{k-2} a_n \cdot P_n(x), \tag{2; 26}$$

wobei unter den $P_n(x)$ die Legendreschen Polynome zu verstehen sind. $P_n(x)$ ist ein Polynom $n$-ten Grades in $x$, das, wie bekannt, die Eigenschaft hat:

$$\int_{-1}^{1} P_n(x)\cdot x^\mu\,dx = 0 \text{ für } 0 \leqq \mu < n; \quad \int_{-1}^{1} P_n(x)\,x^n\,dx \neq 0. \tag{2; 27}$$

Setzen wir $w^*(x)$ in $(W_2)$ ein, so ergeben sich für die Koeffizienten $a_n$ die Bedingungsgleichungen

$$\begin{aligned}
&a_0\cdot\frac{1}{2}\int_{-1}^{1} P_0\,dx && = C_0;\\
&a_0\cdot\frac{1}{2}\int_{-1}^{1} P_0\cdot x\,dx + a_1\cdot\frac{1}{2}\int_{-1}^{1} P_1\cdot x\,dx && = C_1;\\
&\text{— — — — — — — — — — — — — — — — — —} && \qquad (2; 28)\\
&a_0\cdot\frac{1}{2}\int_{-1}^{1} P_0\cdot x^{k-2}\,dx + a_1\cdot\frac{1}{2}\int_{-1}^{1} P_1\cdot x^{k-2}\,dx + \dots\\
&\qquad \dots + a_{k-2}\cdot\frac{1}{2}\int_{-1}^{1} P_{k-2}\cdot x^{k-2}\,dx && = C_{k-2}.
\end{aligned}$$

Da die Determinante dieses Gleichungssystems

$$\prod_{\mu=0}^{k-2} \frac{1}{2} \int_{-1}^{1} P_\mu \cdot x^\mu \, dx$$

nach (2; 27) von Null verschieden ist, lassen sich die Größen $a_n$ eindeutig aus den gegebenen Zahlen $C_0, \ldots C_{k-2}$ berechnen. Die so bestimmte Funktion $w^*(x)$ genügt nun ($W_2$), aber nicht ($W_1$). Um auch ($W_1$) zu erzwingen, schreiben wir:

$$w(x) = w^*(x) + \sum_{n=k-1}^{k+2} a_n \cdot P_n(x). \tag{2; 29}$$

Die Bedingung ($W_2$) bleibt dann wegen (2; 27) auch für $w(x)$ erhalten, die Bedingung ($W_1$) liefert die Bestimmungsgleichungen:

$$\sum_{n=k-1}^{k+2} a_n P_n(1) = -w^*(1); \quad \sum_{n=k-1}^{k+2} a_n P_n(-1) = -w^*(-1);$$

$$\sum_{n=k-1}^{k+2} a_n P_n'(1) = -\left[\frac{dw^*}{dx}\right]_{x=1}; \tag{2; 30}$$

$$\sum_{n=k-1}^{k+2} a_n P_n'(-1) = -\left[\frac{dw^*}{dx}\right]_{x=-1}.$$

Wegen

$$P_n(1) = 1; \quad P_n(-1) = (-1)^n; \quad P_n'(-1) = (-1)^{n+1} P_n'(1)$$

läßt sich die Determinante dieses linearen Gleichungssystems so umformen:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ (-1)^{k-1} & (-1)^k & (-1)^{k+1} & (-1)^{k+2} \\ P'_{k-1}(1) & P'_k(1) & P'_{k+1}(1) & P'_{k+2}(1) \\ P'_{k-1}(-1) & P'_k(-1) & P'_{k+1}(-1) & P'_{k+2}(-1) \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 & 1 \\ P'_{k-1}(1) & P'_k(1) & P'_{k+1}(1) & P'_{k+2}(1) \\ P'_{k-1}(1) & -P'_k(1) & P'_{k+1}(1) & -P'_{k+2}(1) \end{vmatrix} =$$

$$= 4 \cdot [P'_{k+1}(1) - P'_{k-1}(1)] \cdot [P'_k(1) - P'_{k+2}(1)] \neq 0.$$

Die Koeffizienten $a_{k-1} \ldots . a_{k+2}$ können also aus (2; 30) eindeutig berechnet werden. Die Funktion $w(x)$ genügt dann ($W_1$) und ($W_2$). Durch Differentiation von (2; 29) ergibt sich schließlich mit Berücksichtigung von (2; 26)

$$w'(x) = \sum_{n=0}^{k+2} a_n \cdot P'_n(x). \tag{2; 31}$$

Rechnet man die $a_n$ als Lösungen von (2; 28) bzw. (2; 30) aus, so erhält man Ausdrücke von der Form

$$a_n = \sum_{\mu=0}^{k-2} b_\mu^{(n)} C_\mu,$$

wobei die $b_\mu^{(n)}$ irgendwelche feste Zahlen sind, die aus den Koeffizienten der linken Seiten der Gleichungssysteme gebildet werden, also jedenfalls von den $C_\mu$ unabhängig sind. Wir ererhalten somit

$$w'(x) = \sum_{n=0}^{k+2} \sum_{\mu=0}^{k-2} b_\mu^{(n)} C_\mu P'_n(x) = \sum_{\mu=0}^{k-2} \Big(\sum_{n=0}^{k+2} b_\mu^{(n)} P'_n(x)\Big) C_\mu;$$

$$|w'(x)| \leqq c \cdot \sum_{\mu=0}^{k-2} |C_\mu|; \quad c = \operatorname*{Max}_{\substack{\mu \\ -1 \leqq x \leqq 1}} \sum_{n=0}^{k+2} |b_\mu^{(n)} P'_n(x)|;$$

damit ist auch ($W_3$) nachgewiesen. Es gibt also jedenfalls Funktionen $w(x)$, sogar Polynome, die das System (W) erfüllen.

Wir haben somit das Ziel, das in Gleichung (2; 3) angegeben ist, erreicht. Zusammenfassend ergibt sich:

**Satz IV:** Für die Existenz einer „Fortsetzung" $F(x)$ von $f(x)$ sind die beiden folgenden Bedingungen ($B_1$) und ($B_2$) notwendig und hinreichend:

($B_1$) $f^{(k-1)}(x)$ ist fortsetzbar (vgl. Nr. **8**);

($B_2$) $\dfrac{A_\mu}{(\bar{x} - \underline{x})^\mu} = o(x_m - x_0)$ für jedes feste $x_0$;

$0 \leqq \mu \leqq k - 2$ (vgl. Nr. **10**).

Dabei bedeuten die $A_\mu$ Zahlen, die sich aus den gegebenen Größen berechnen lassen (vgl. Nr. **5**), $x_0$ ist ein beliebiger Intervallhäufungspunkt und $x_m$ der Mittelpunkt eines Lückenintervalles, gegeben durch $\underline{x} < x < \bar{x}$.

## III.

**16.** Es soll jetzt an einem Beispiel gezeigt werden, daß zum mindesten die eine der beiden Bedingungen von Satz IV, nämlich ($B_2$) nicht immer erfüllt ist, letztere also tatsächlich eine Einschränkung bedeutet. Von ($B_1$) läßt sich etwas Ähnliches nicht sagen, da nicht bekannt ist, ob jede (einmal) differenzierbare Funktion eine Fortsetzung hat. Wie schon erwähnt wurde (vgl. Nr. **8**), sind in [1] für diesen Fall zwar hinreichende, ebenso notwendige und hinreichende Bedingungen angegeben[15], doch sieht man gerade letzteren nicht an, ob sie vielleicht auf Grund der Voraussetzungen a priori gelten.

Wir wählen als Menge $\mathfrak{M}$ die perfekte Menge, die sich als Vereinigungsmenge des Punktes $x = 0$ und folgender abgeschlossener Intervalle ergibt, die $x = 0$ als einzigen Häufungspunkt haben:

$$(3;1)\quad \mathfrak{M}:\ x=0;\ \frac{1}{n} \leqq x \leqq \frac{1}{n-1} - \left[\frac{1}{(n-1)^2} - \frac{1}{n^2}\right],\ n = 1;2;3;\ldots$$

Die Funktion $f(x)$ erklären wir auf $\mathfrak{M}$, wie folgt:

$$(3;2)\quad f(0) = 0;\ f(x) = \frac{1}{n^2} \text{ für } \frac{1}{n} \leqq x \leqq \frac{1}{n-1} - \left[\frac{1}{(n-1)^2} - \frac{1}{n^2}\right],$$
$$n = 1;2;3;\ldots$$

Da $f(x)$ in den einzelnen abgeschlossenen Intervallen, aus denen sich $\mathfrak{M}$ zusammensetzt, konstant ist, folgt:

$$(3;3)\qquad f'(x) = 0,\quad x \varepsilon \mathfrak{M}$$

---

[15] Vgl. [1]; Satz I bis Satz VI.

und zwar gilt diese Gleichung, wie man sofort sieht, auch für $x = 0$. $f(x)$ ist also auf $\mathfrak{M}$ beliebig oft differenzierbar, die Ableitungen jeder Ordnung sind auf $\mathfrak{M}$ identisch Null. Wir werden nun zeigen: Es gibt keine zweimal differenzierbare Funktion $F(x)$, die eine Fortsetzung von $f(x)$ darstellt. Nach der Bedingung $(B_2)$, die nach Satz IV für die Existenz einer solchen Fortsetzung notwendig ist, müßte nämlich gelten:

$$(3;4) \qquad A_0 = o(x_m - x_0) \quad \text{für } x_0 = 0.$$

Berechnen wir $A_0$ nach (1; 16), so finden wir

$$(3;5) \quad A_0 = D^{(1)} - M^{(1)} = \frac{f(\bar{x}) - f(\underline{x})}{\bar{x} - \underline{x}} - \frac{f'(\bar{x}) + f'(\underline{x})}{2}.$$

In unserem Beispiel haben wir demnach wegen (3; 2) und (3; 3) für jedes Lückenintervall:

$$(3;6) \qquad D^{(1)} = 1; \quad M^{(1)} = 0; \quad A_0 = 1.$$

(3; 4) ist also sicher nicht erfüllt. Obwohl also $f(x)$ auf $\mathfrak{M}$ Ableitungen jeder Ordnung besitzt, gibt es keine zweimal — und damit auch keine mehr als zweimal — differenzierbare Funktion, die eine Fortsetzung von $f(x)$ wäre. Man kann übrigens in diesem elementaren Beispiel das Nichtvorhandensein einer zweimal differenzierbaren Funktion auch geometrisch einsehen, wenn man bedenkt, daß nach dem Mittelwertsatz der Differentialrechnung in jedem Lückenintervall Steigungen vom Wert 1 vorkommen müssen, im Intervallhäufungspunkt $x_0 = 0$ also nicht der Grenzwert Null erreicht werden kann.