

Sitzungsberichte
der
mathematisch-naturwissenschaftlichen
Abteilung
der
Bayerischen Akademie der Wissenschaften
zu München

1941. Heft I
Sitzungen Januar-Juni

München 1941

Verlag der Bayerischen Akademie der Wissenschaften
In Kommission bei der C. H. Beck'schen Verlagsbuchhandlung



Vollständigkeitsprobleme bei geometrischen Ordnungen.

Von Otto Haupt in Erlangen.

Vorgelegt von H. Tietze am 1. Februar 1941.

1. Allgemeine Fragestellung.

1. Bei geometrischen Ordnungen¹ ergeben sich, unter anderem, Aufgaben der folgenden Art: Es soll der Ordnungswert oder eine obere Schranke des Ordnungswertes für den Limes einer konvergenten Folge von Gebilden² bestimmt werden, wenn die Ordnungswerte der einzelnen Gebilde der Folge vorgegeben sind oder eine obere Schranke besitzen. Etwas anders gewendet kann man Aufgaben dieser Art so formulieren: Im System Γ aller in Betracht zu ziehenden Gebilde sei ein geeigneter Konvergenzbegriff erklärt mit Hilfe einer Metrik, die man dem System Γ aufgeprägt hat.³ Es wird gefragt, ob das System Γ *vollständig*⁴ ist.

Die vorstehend formulierte Frage gewinnt ein näheres Interesse natürlich erst für spezielle Γ oder vielmehr bei Bezugnahme auf bestimmte geometrische Ordnungen. Daher soll im folgenden die genannte Frage an einigen Beispielen erörtert werden. Auf Beweise für die dabei aufzustellenden weitergehenden Behauptun-

¹ Vgl. Geometrische Ordnungen, Jahresber. d. d. Math. Ver. 49 (1939), S. 190 ff. Zum Begriffe der geometrischen Ordnung vgl. auch oben im Text Nr. 2. 1. 1.

² Unter einem *Gebilde* ist im Folgenden immer eine Punktmenge des betrachteten Raumes zu verstehen, welcher ein Ordnungswert im jeweils erklärten Sinne zukommt und welcher unter Umständen noch gewisse andere Forderungen auferlegt sind.

³ Sind die Gebilde von Γ Teilmengen eines metrischen Raumes, so läßt sich Γ (genauer das System der abgeschlossenen Hüllen der Gebilde) metrisieren. Vgl. z. B. P. Alexandroff und H. Hopf, Topologie I, Berlin 1935, S. 112 ff. Diese Metrik wird im Text oben zugrunde gelegt.

⁴ Im Sinne der festgelegten Metrik.

gen (vgl. vor allem Nr. 3. 1. ff.) muß hier verzichtet werden; diese Beweise werden an anderer Stelle⁵ gegeben.

2. Ordnungen im weiteren Sinne. Schwache Ordnungen.

2. 1. Als nächstliegende Beispiele von Systemen Γ bieten sich dar die Systeme von gleichmäßig beschränkten konvexen Körpern im euklidischen E_3 . Die konvexen Körper sind nämlich gekennzeichnet als die Punktmengen vom Werte Zwei der starken Komponentenordnung bezüglich der Geraden.⁶ Man erklärt dabei für eine beliebige Punktmenge $\mathfrak{P}$ des E_3 die starke Komponentenordnung (kürzer: starke K-Ordnung) *bezüglich der Geraden* als die maximale Anzahl (falls dieses Maximum existiert) der Komponenten des Durchschnittes von $\mathfrak{P}$ mit jeder Geraden. Es sei nun Γ das System aller, etwa in einer festen Kugel enthaltenen konvexen Körper; dabei rechnen wir zu Γ die konvexen Körper von jeder Dimension $t \leq 3$. Nach dem bekannten Blaschkeschen Satze⁷ ist dann Γ vollständig.

Alles gilt entsprechend für den E_n mit $n \geq 4$.

2. 1. 1. Es muß hervorgehoben werden, daß die soeben (Nr. 2. 1.) benutzte Komponentenordnung keine geometrische Ordnung (schlechthin oder) im engeren, d. h. im bisher erklärten⁸ Sinne ist. Um dies zu erläutern, wollen wir unter einer geometrischen Ordnung im weiteren Sinne eine Funktion $f(\mathfrak{M})$ verstehen, deren Definitionsbereich ein System Σ von Teilmengen $\mathfrak{M}$, der „Gebilde“, eines topologischen⁹ Raumes R ist und deren Werte $f(\mathfrak{M})$ wohlgeordnet sind, also o. B. d. A. als Ordnungszahlen angenommen werden können.^{9a} Die geometrischen Ordnungen im

⁵ Journal f. d. r. u. angew. Math.

⁶ Vgl. die Definition bei T. Bonnesen und W. Fenchel, Theorie der konvexen Körper, Ergebnisse d. Math. u. ihrer Grenzgebiete, 3. Bd., Berlin 1934, § 1, 1.

⁷ W. Blaschke, Kreis und Kugel, Leipzig 1916, S. 62 ff.

⁸ Zum Verteilungssatz der Strukturtheorie reeller Gebilde, Monatsh. f. Math. u. Phys. 46 (1937), S. 84 ff.

⁹ Im Sinne von C. Kuratowski. In Σ sollen die Umgebungen aus R enthalten sein. (Vgl. a. a. O.⁸).

^{9a} In Nr. 2. 2. ff. sollen die Ordnungswerte ausschließlich natürliche Zahlen sein.

engeren Sinne sind unter den geometrischen Ordnungen im weiteren Sinne dadurch gekennzeichnet, daß sie *monoton* sind, d. h. daß $f(\mathfrak{M}_1) \leq f(\mathfrak{M}_2)$ für $\mathfrak{M}_1 \subset \mathfrak{M}_2$ mit $\mathfrak{M}_j \in \Sigma$, $j = 1, 2$. Die obige Komponentenordnung ist nun nicht monoton, wenn wir unter Gebilde jede beliebige Punktmenge des E_3 verstehen. Die Monotonie fehlt sogar bei weitgehender Einschränkung des Gebildebegriffes, z. B. bei Einschränkung auf die zusammenhängenden offenen Mengen; denn eine Vollkugel V besitzt den Wert Eins der Komponentenordnung bezüglich der Geraden, während die aus V durch Wegnahme einer Vollkugel entstehende offene Menge den Komponentenordnungswert Zwei hat. Bei geometrischen Ordnungen im weiteren Sinne verfügt man nicht mehr über die, für Ordnungen im engeren Sinne geltenden Struktursätze, vor allem nicht über den Satz von der Darstellbarkeit eines Gebildes als Summe von ordnungshomogenen Teilen (die übrigens nicht notwendig selbst Gebilde zu sein brauchen) und (nirgends dichten) singulären Punkten;⁸ denn all dies gründet sich auf die Monotonie der Ordnung.

2. 2. Man kann indes die konvexen Körper auch mit einer geometrischen Ordnung im *engeren* Sinne in Verbindung bringen, nämlich mit der sogenannten schwachen Punktordnung bezüglich der Geraden. Zu dem Zwecke betrachte man lediglich die Begrenzung $\mathfrak{K}$ eines konvexen Körpers im E_3 . Von jeder Geraden, welche keine auf $\mathfrak{K}$ gelegene Strecken enthält, wird $\mathfrak{K}$ in höchstens zwei Punkten getroffen. Und die übrigen Geraden (welche also mit $\mathfrak{K}$ mehr als zwei Punkte gemeinsam haben) bilden eine, im Raum¹⁰ aller Geraden nirgends dichte Menge. Dementsprechend erklären wir als Wert der schwachen Punktordnung (kürzer: schwachen P-Ordnung) einer Punktmenge $\mathfrak{F}$ des E_3 *bezüglich der Geraden* die kleinste Zahl k (falls sie existiert) derart, daß die Menge derjenigen Geraden im Geradenraume nirgends dicht liegt, welche mit $\mathfrak{F}$ mindestens $(k + 1)$ Punkte gemeinsam haben. (Diese schwache P-Ordnung besitzt die Monotonieeigenschaft, ist also eine geometrische Ordnung im engeren Sinne.)

¹⁰ Der Geradenraum sei in üblicher Weise metrisiert. Vgl. auch Fußn. 3.

Die Begrenzungen der konvexen Körper, deren offener Kern nicht leer ist, m. a. W. die konvexen Flächen,¹¹ besitzen mithin den schwachen P-Ordnungswert Zwei bezüglich der Geraden; und sie sind dadurch, wenigstens unter den Flächen, auch gekennzeichnet. (Um letzteres einzusehen, nehmen wir an, eine Fläche $\mathfrak{F}$ vom Ordnungswert Zwei sei nicht konvex. Dann müßte es zwei Punkte P_1 und P_2 im Innern von $\mathfrak{F}$ geben derart, daß auf der Verbindungsgeraden g von P_1 und P_2 diese beiden Punkte getrennt werden durch Punkte im Äußern von $\mathfrak{F}$. Folglich hätten alle Geraden, welche einer gewissen Umgebung von g im Geradenraum angehören, mit $\mathfrak{F}$ mindestens vier Punkte gemeinsam.)

Die vorstehenden Bemerkungen gelten allgemein für konvexe (Hyper-) Flächen im E_n .

2. 3. Auf eine *schwache* Ordnung wird man auch geführt bei Verfolgung des Vollständigkeitsproblems für die K-Ordnung bezüglich der Geraden über den bisher (Nr. 2. 1.) allein betrachteten Fall der konvexen Körper hinaus. Fragen wir nämlich zunächst nach den Punktmengen (im E_3) von vorgegebenem Werte $k \geq 2$ der starken K-Ordnung, so zeigt sich: Während für $k = 1$ nur die konvexen Körper (bis zur Dimension Drei) sich ergaben, ist das System der Gebilde mit $k = 2$ schon außerordentlich umfassend, selbst bei Beschränkung der zu betrachtenden Gebilde auf Kontinua. Beispielsweise ist $k = 2$ für jeden einfachen Bogen $\mathfrak{B}$, welcher auf der Begrenzung $\mathfrak{F}$ seiner konvexen Hülle liegt und dessen Durchschnitt mit jeder auf $\mathfrak{F}$ gelegenen Strecke höchstens zwei Komponenten besitzt; speziell kann $\mathfrak{F}$ der keine ebenen Teile enthaltende Mantel eines konvexen Kegels sein. Beispiele für Flächenstücke¹¹ mit $k = 2$ erhält man, wenn man einen der vorstehend beschriebenen Bogen zu einem hinreichend schmalen, auf $\mathfrak{F}$ gelegenen „Streifen“ ausweitet. Beispiele zusammenhängender, offener Mengen mit $k = 2$ bzw. $k \geq 3$ erhält man, in-

¹¹ Unter einer *Fläche* bzw. einem *Flächenstück* (im E_3) werde hier der Einfachheit wegen ein topologisches Bild der Kugeloberfläche bzw. der Kreisscheibe verstanden. Soweit es sich in Nr. 2. 3. des Textes um Vollständigkeitsbetrachtungen handelt, werden zu den jeweils betrachteten Gebilden (z. B. Bogen, Flächenstücken usw.) natürlich auch diejenigen Ausartungen stillschweigend hinzugerechnet, welche bei den in Betracht kommenden Limesbildungen etwa auftreten.

dem man aus einer Vollkugel eine bzw. beliebig viele Vollkugeln herausbohrt, von denen höchstens je $(k - 1)$ von der gleichen Geraden getroffen werden.

Mit Hilfe der eben angegebenen Beispiele ergibt sich, daß z.B. schon das System der Bogen vom starken K-Ordnungswert $k = 2$ nicht vollständig ist. Um dies einzusehen, konstruieren wir eine Folge $\{\mathfrak{B}_\varrho\}$ solcher Bogen, welche gegen einen (ebenen) Bogen vom Ordnungswerte $t_0 \geq 3$ konvergiert. Zu dem Zweck denken wir uns eine feste Ebene E und in E eine feste Kreisscheibe $\mathfrak{k}$ gegeben, ferner innerhalb $\mathfrak{k}$ einen (ebenen) Bogen $\mathfrak{B}_0$ vom starken P-Ordnungswert $t_0 \geq 3$ bezüglich der Geraden (in E_3). Der Mantel des zu E senkrechten Zylinders mit $\mathfrak{B}_0$ als Leitlinie sei $\mathfrak{Z}$. Schließlich sei gegeben eine gegen $\mathfrak{k}$ konvergierende Folge von konvexen Flächenstücken $\mathfrak{F}_\varrho$, wobei die Kreisscheibe $\mathfrak{k}$ durch die senkrechte Projektion von $\mathfrak{F}_\varrho$ auf E schlicht und vollständig überdeckt wird. Enthält $\mathfrak{F}_\varrho$ keine Strecken, so ist der Durchschnitt $\mathfrak{B}_\varrho = \mathfrak{Z} \cdot \mathfrak{F}_\varrho$ ein einfacher Bogen, dessen starke P-Ordnung bezüglich der Geraden den Wert $t = 2$ besitzt; und $\mathfrak{B}_0 = \lim_{\varrho \rightarrow \infty} \mathfrak{B}_\varrho$ hat den starken P-Ordnungswert $t_0 \geq 3$. Ersetzt man die $\mathfrak{F}_\varrho$ durch geeignete andere Flächenstücke, welche sich wieder ein-eindeutig auf $\mathfrak{k}$ projizieren, so erhält man konvergente Folgen von einfachen Bogen, deren jeder den beliebig vorgeschriebenen starken P-Ordnungswert t bezüglich der Geraden besitzt, während der Limes einen beliebig vorgegebenen Ordnungswert $> t$ hat. (Man wähle z. B. $\mathfrak{B}_0$ so, daß $\mathfrak{B}_0$ mit jeder Geraden eines Bündels $\mathfrak{b}$ von zu E parallelen Geraden (im E_3) höchstens einen Punkt gemeinsam hat, und wähle überdies $\mathfrak{F}_\varrho$ als Mantelstück eines Zylinders, dessen Mantellinien zu $\mathfrak{b}$ gehören und dessen Leitlinie ein passend gewählter (ebener) Bogen ist.) Durch ähnliche Konstruktionen beweist man, daß auch das System der Flächenstücke bzw. das System z. B. der abgeschlossenen Hüllen zusammenhängender, im E_3 offener Mengen von beschränktem¹⁴ starken K-Ordnungswert nicht vollständig ist. Dabei ergibt sich bei den für Bogen und Flächenstücke konstruierten Beispielen die Unvollständigkeit sogar für den Fall der starken P-Ordnung (nicht nur der starken K-Ordnung) bezüglich der Geraden.

Dagegen besagen unsere Beispiele noch nichts hinsichtlich der Unvollständigkeit für *schwache* K- oder P-Ordnung bezüglich

der Geraden. Denn in unseren Beispielen ist der Limes eine (beschränkte) ebene Punktmenge, besitzt also den schwachen K- und P-Ordnungswert Null.¹²

3. Vollständigkeitssätze.

3. 1. Die Vollständigkeitsfrage für *schwache* K- und P-Ordnung bezüglich der Geraden, auf welche die vorstehenden Betrachtungen hinführten, ist unseres Wissens noch nicht beantwortet; wenigstens nicht für eine hinreichend allgemeine Klasse von Gebilden (vgl. auch weiter unten Nr. 4. 1.; 4. 2.). Hingegen gelingt die Beantwortung, und zwar für (beliebige) *Kontinua*¹³ als *Ge-*

¹² In diesem Zusammenhange möge erwähnt werden, daß es einfache Bogen im E_3 (und entsprechend im E_n) gibt, für welche sogar der schwache P-Ordnungswert bezüglich der Geraden als Ordnungscharakteristiken von Null verschieden ist. Einen solchen Bogen kann man nach einer freundlichen Mitteilung von Herrn G. Nöbeling folgendermaßen erhalten. Da man zu jeder kompakten (abgeschlossenen) nulldimensionalen Menge N des E_3 einen sie enthaltenden Bogen im E_3 finden kann (G. T. Whyburn, Concerning the proposition that every closed, compact and totally disconnected set of points is a subset of an arc, Fundam. math. 18 (1932), S. 57), genügt es, eine kompakte nulldimensionale Menge N zu finden, welche einen von Null verschiedenen schwachen P-Ordnungswert bezüglich der Geraden besitzt. Ein solches N läßt sich in folgender Weise konstruieren. Es sei K die (abgeschlossene) Einheitskugel im E_3 und ρ die Zahl 1. Dann existieren eine positive Zahl $\rho^{(1)}$ und endlich viele, in K enthaltene, paarweise fremde Kugeln K_μ mit Durchmessern $< \frac{1}{2}$ derart, daß jede Gerade des E_3 , die mit K eine Strecke mit einer Länge $\geq \rho$ gemein hat, mit mindestens einer der Kugeln K_μ eine Strecke mit einer Länge $\geq \rho^{(1)}$ gemein hat. Sodann existieren eine positive Zahl $\rho^{(2)}$ und in jeder Kugel K_μ endlich viele, paarweise fremde Kugeln $K_{\mu\nu}$ mit Durchmessern $< \frac{1}{4}$ derart, daß jede Gerade des E_3 , die mit K_μ eine Strecke mit einer Länge $\geq \rho^{(1)}$ gemein hat, mit mindestens einer Kugel $K_{\mu\nu}$ eine Strecke mit einer Länge $\geq \rho^{(2)}$ gemein hat. Usw. Die Menge $N = K \cdot (\Sigma K_\mu) \cdot (\Sigma K_{\mu\nu}) \dots$ ist kompakt und nulldimensional; die orthogonale Parallelprojektion von N in eine Ebene enthält eine Kreisscheibe mit dem Radius $\frac{\sqrt{3}}{2}$. Also hat N die verlangten Eigenschaften. – Diese Konstruktion wurde von Herrn G. Nöbeling angegeben in Beantwortung einer Frage von Herrn Chr. Papakyriakopoulos an Herrn C. Carathéodory nach (einfachen) Bogen, deren Parallelprojektionen auf Ebenen Gebiete enthalten.

¹³ Unter einem Kontinuum sei hier ein zusammenhängendes Kompaktum verstanden.

bilde, falls man, in Abänderung des Ordnungsbegriffes, als Ordnungscharakteristiken (statt der Geraden) die Ebenen benutzt. Es gelten nämlich, übrigens allgemein für den E_n mit $n \geq 2$ und mit den $(n-1)$ -dimensionalen Ebenen (kürzer: $(n-1)$ -Ebenen, Hyperebenen) als Ordnungscharakteristiken, die beiden Vollständigkeitsätze:

3. 1. 1. *Es sei $\mathfrak{K}$ der Limes einer konvergenten Folge von Kontinuen $\mathfrak{K}_\nu$ des E_n , für deren jedes die schwache Komponentenordnung bezüglich der $(n-1)$ -Ebenen einen Wert $\leq k$ besitzt.^{9a} Dann besitzt auch die schwache Komponentenordnung des Limes $\mathfrak{K}$ einen Wert $\leq k$. (Der Limes ist bekanntlich selbst ein Kontinuum.)*

3. 1. 2. *Der Satz 3. 1. 1. bleibt sogar dann richtig, wenn überall in ihm an Stelle der schwachen Komponentenordnung die schwache Punktordnung (bezüglich der $(n-1)$ -Ebenen) tritt.*

Zusatz: Besitzt in einer konvergenten Folge von Kontinuen $\mathfrak{K}_\nu$ zwar jedes $\mathfrak{K}_\nu$ einen beschränkten¹⁴ Ordnungswert k_ν , ist aber die Folge der k_ν nicht beschränkt, so kann der Ordnungswert des Limes unendlich sein. Dies zeigen einfachste Beispiele schon im E_2 (vgl. etwa Nr. 3. 4., letzter Absatz).

3. 2. Unser, hier zu übergehender, Beweis des Satzes 3. 1. 1. erfordert vor allem eine Untersuchung des Verhaltens eines Kontinuums von beschränktem,¹⁴ schwachem K-Ordnungswert in der Umgebung seines Durchschnittes mit einer Hyperebene. Daneben benützen wir die folgende Tatsache: Es sei $\mathfrak{K}$ der Limes einer konvergenten Folge von Kontinuen $\mathfrak{K}_\nu$, für deren jedes die schwache K-Ordnung (bezüglich der $(n-1)$ -Ebenen) einen Wert $\leq k$ besitzt. Dann hat die starke K-Ordnung sowohl des $\mathfrak{K}$ als eines jeden $\mathfrak{K}_\nu$ einen Wert $< 2k + 1$.

3. 2. 2. Unser Beweis des, wie es scheint wesentlich tiefer liegenden, Vollständigkeitsatzes 3. 1. 2. für schwache P-Ordnung erfordert umfangreichere Betrachtungen. Es erweist sich dabei als zweckmäßig, zunächst die Struktur der Kontinua von beschränktem, schwachem P-Ordnungswert aufzuklären. Dies geschieht durch den Nachweis, daß jedes solche Kontinuum einen be-

¹⁴ d. h. der Ordnungswert ist nicht größer als eine feste natürliche Zahl.

schränkten starken P-Ordnungswert besitzt bezüglich der $(n-1)$ -Ebenen eines¹⁵ Büschels, dessen $((n-2)$ -dimensionale) Achse fremd ist zum Kontinuum. Ein solches Kontinuum ist aber¹⁶ eine *reguläre Kurve* und überdies darstellbar als *Bogensumme* (d. h. als Summe abzählbar vieler einfacher Bogen, die paarweise nur Endpunkte gemeinsam haben).

3.3.1. Anmerkung: Bekanntlich¹⁷ gilt sogar folgender Struktursatz: Es sei $\mathfrak{K}$ ein Kontinuum von beschränkter (oder auch nur von endlicher) *schwacher* P-Ordnung bezüglich eines Hyper ebenenbüschels mit zu $\mathfrak{K}$ fremder Achse; ferner sei für alle Büschelhyperebenen, deren Durchschnitt mit $\mathfrak{K}$ nicht endlich ist (und die also *im Büschel nirgends dicht* liegen), der Durchschnitt mit $\mathfrak{K}$ nulldimensional. Dann ist $\mathfrak{K}$ darstellbar als Summe aus einem (höchstens) nulldimensionalen $\mathfrak{F}_\alpha$ und aus einer Bogensumme. Man beachte den folgenden Unterschied im soeben erwähnten Satze gegenüber dem oben angegebenen Struktursatze für Kontinua von beschränkter schwacher P-Ordnung bezüglich *aller* Hyperebenen des E_n : Bei letzterem kann die Ausnahmemenge von Hyperebenen ganze Büschel und Mengen solcher Büschel umfassen, gleichzeitig ist die Menge aller Ordnungscharakteristiken viel größer als beim erstgenannten Satze.

¹⁵ Sogar unendlich vieler solcher Büschel.

¹⁶ Dies gilt sogar für Kontinua $\mathfrak{K}$ von *endlichem* starkem P-Ordnungswert bezüglich eines (einzigen) Hyper ebenenbüschels mit zu $\mathfrak{K}$ fremder Achse („Endlicher P-Ordnungswert“ besagt: Der Durchschnitt der Büschelebenen mit $\mathfrak{K}$ ist endlich). Vgl. Über Kontinua von endlicher Relativordnung, Journ. f. d. r. u. angew. Math. 167 (1932), S. 21, sowie Über die Struktur gewisser abgeschlossener Mengen, Sitz.-Ber. d. bayer. Akad. d. Wiss., math.-naturw. Abt., Jahrg. 1932, S. 71 ff. – Verallgemeinerungen dieser Sätze in topologischer Richtung bei M. Linsman, Introduction à une théorie abstraite usw., Mémoires Acad. Royale Belgique (Classe des sciences) 17 (1938), und Chr. Pauc, Sur les continus distanciables usw., C. R. Acad. Sci., Paris 208 (1939), S. 489 ff.

¹⁷ G. Nöbeling, Über die topologische Struktur der Mengen endlicher Ordnung, Journ. f. d. r. u. angew. Math. 180 (1939), S. 129ff. Dort werden entsprechende Sätze auch für den Fall bewiesen, daß das System der Ordnungscharakteristiken eine (den E_n einfach überdeckende) Parallelschar von k -dimensionalen Ebenen ist; zugleich werden weitgehende Verallgemeinerungen dieser Sätze sowohl hinsichtlich der Gebilde als der Ordnungscharakteristiken gewonnen.

3. 3. 2. Zusatz. Man weiß, daß ein Kontinuum des E_n , welches den Wert n der *starken* P-Ordnung bezüglich aller $(n - 1)$ -Ebenen besitzt, ein einfacher Bogen oder eine einfache Kurve sein muß.¹⁸ Im Falle *schwacher* P-Ordnung können die *Kontinua des Ordnungswertes n* auch Verzweigungspunkte besitzen, wie das Beispiel eines von n , von einem Punkte ausgehenden, Strecken gebildeten n -Beins zeigt. Es erhebt sich die, ebenfalls an anderer Stelle zu beantwortende, Frage nach einer vollständigen Aufzählung aller solcher Kontinua.

3. 4. Die in Nr. **3. 2. 2.** erwähnte Ordnung, bei welcher die Ordnungscharakteristiken beschränkt wurden auf die Hyperebenen eines Büschels¹⁹ (dessen Achse zum Gebilde fremd ist), sei kurz als Relativordnung bezeichnet. Stellt man für diese Relativordnung die Vollständigkeitsfrage, so wird man, entsprechend den früheren Betrachtungen (vgl. Nr. **2. 2. ff.**), wiederum nicht starke, sondern schwache Ordnung zugrunde legen. Für den Fall der Komponenten-Relativordnung gilt nun unser Beweis des Vollständigkeitsatzes **3. 1. 1.** im wesentlichen unverändert. Wir erhalten daher den

Vollständigkeitsatz: *Der Limes einer konvergenten Folge von Kontinuen, deren jedes einen schwachen Komponenten-Relativordnungswert $\leq k$ besitzt, hat selbst einen Komponenten-Relativordnungswert $\leq k$.*

Dagegen gilt der Vollständigkeitsatz *nicht mehr für Kontinua von schwacher Punkt-Relativordnung*. Dies zeigen einfachste Beispiele schon im E_2 (etwa: Es sei S_n ein im Quadrat $\mathfrak{Q} = (0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1)$ gelegener Streckenzug, dessen Strecken abwechselnd zur x - und y -Achse parallel sind; und zwar sollen die zur y -Achse parallelen Strecken sein: $x = \nu : n$, $0 \leq y \leq 1$, $\nu = 1, \dots, n$, und der Anfangspunkt von S_n soll in $x = y = 0$ liegen. Es besitzt S_n den schwachen Punkt-Relativordnungswert Eins bezüglich des Büschels der Parallelen zur y -Achse, hingegen der Limes $\mathfrak{Q}$ der S_n den schwachen Punkt-Relativordnungswert Unendlich).

¹⁸ A. Marchaud, Sur les continus d'ordre borné, Acta math. 55 (1930), S. 98.

¹⁹ Dieses Büschel soll für alle, jetzt zu betrachtenden Gebilde (Kontinua) das gleiche sein.

4. Verallgemeinerungen.

4. 1. Die Sätze **3. 1. 1.**, **3. 1. 2.**, **3. 4.** sind, wie dies schon ihr topologischer Charakter wahrscheinlich macht, der Verallgemeinerung fähig, sowohl hinsichtlich des Raumes, in welchen die betrachteten Gebilde eingebettet sind, als hinsichtlich der Ordnungscharakteristiken. Tatsächlich werden bei unseren Beweisen nur verhältnismäßig einfache Eigenschaften des E_n bzw. der Hyperebenen benutzt, vor allem die, daß der E_n durch jede Hyperebene in zwei Halbräume zerspalten wird und daß jede Hyperebene einer Schar von Hyperebenen (nämlich einem Parallelenbüschel) angehört, welche eine stetige Zerlegung des E_n liefert.

4. 2. Es ist vor allem das Wegfallen der soeben (Nr. **4. 1.**) hervorgehobenen Zerspaltungseigenschaft der Hyperebenen, wodurch die Übertragung unserer Beweise der Vollständigkeitsätze auf den früher (Nr. **2. 3.**) betrachteten Fall der Geraden als Ordnungscharakteristiken im E_n verhindert oder doch erschwert wird, allgemein auf den Fall der k -dimensionalen Ebenen (kürzer: k -Ebenen) als Ordnungscharakteristiken ($1 \leq k \leq n - 2$). Darüber hinaus zeigen aber die Beispiele in Nr. **2. 3.**, daß – wenigstens für den Fall der Geraden als Ordnungscharakteristiken – die Kontinua von beschränktem (schwachem) Ordnungswert keine ähnlich einheitliche Klasse von Gebilden liefern wie (gemäß Nr. **3. 2. 2.**) im Falle der Hyperebenen. Mindestens erscheint für Gerade bzw. k -Ebenen als Ordnungscharakteristiken eine zusätzliche Forderung bezüglich der Dimension des Gebildes notwendig. Ein näheres Eingehen auf diese Fragen sei ebenfalls späterer Gelegenheit vorbehalten.