

# Sitzungsberichte

der

mathematisch-physikalischen Klasse

der

**Bayerischen Akademie der Wissenschaften**

zu München

---

1923. Heft II

Mai- bis Dezembersitzung

---

München 1923

Verlag der Bayerischen Akademie der Wissenschaften  
in Kommission des G. Franz'schen Verlags (J. Roth)



Beweis, dass unter allen homogenen Membranen von gleicher Fläche und gleicher Spannung die kreisförmige den tiefsten Grundton gibt.<sup>1)</sup>

Von Georg Faber.

Vorgelegt in der Sitzung am 7. Juli 1923.

$G$  sei ein einfach zusammenhängender abgeschlossener Bereich mit der Randkurve  $C$  und dem Flächenelement  $dw$ .  $U$  sei unter den in  $G$  stetig differenzierbaren und den zwei Nebenbedingungen:

$$1) \quad U = 0 \text{ auf } C,$$

$$2) \quad \iint_G U^2 dw = 1$$

genügenden Funktionen diejenige, für die der Integralwert

$$3) \quad \iint_G (\text{grad } U)^2 dw \text{ möglichst klein wird.}$$

Der Maximalwert von  $U$  in  $G$  sei  $c$  ( $> 0$ ). Ferner sei, falls  $0 < \gamma \leq c$ ,  $G_\gamma$  sei das Teilgebiet von  $G$ , für das  $U \leq \gamma$  gilt;  $G$  ist also mit  $G_c$  identisch.  $F_\gamma$  sei der Flächeninhalt von  $G_\gamma$ ,  $C_\gamma$  bilde zusammen mit  $C$  den Rand von  $G_\gamma$ ,  $C_0$  und  $G_0$  bedeuten das nämliche wie  $C$ ,  $s_\gamma$  sei (im Falle  $\gamma < c$ ) die Bogenlänge von  $C_\gamma$ .

<sup>1)</sup> Es ist das meines Wissens der erste Beweis für diesen vermutungsweise häufig ausgesprochenen Satz (vgl. Lord Rayleigh, *The Theory of Sound*, London 1894, Bd. I, S. 339—340). Ein ähnlich lautender, von Herrn Courant (*Math. Zeitschrift*, Bd. I (1918), S. 321) bewiesener Satz, bei dem die Membrane vom nämlichen Umfang statt, wie oben, die vom nämlichen Flächeninhalt in Vergleich gezogen werden, folgt leicht aus dem obigen, während das Umgekehrte nicht gilt.

Endlich sei

$$4) \quad J_\gamma = \iint_{G_\gamma} (\text{grad } U)^2 dw,$$

sodaß also das Integral (3) soviel ist wie  $J_c$ .

Ich betrachte weiter für  $0 < \gamma < c$  ein System konzentrischer Kreisringflächen  $K_\gamma$  mit den inneren Radien  $r_\gamma$  und dem gemeinsamen äußeren Radius  $r_0$ . Diese Radien werden bestimmt durch die Bedingung:

$$5) \text{ Flächeninhalt } (r_0^2 - r_\gamma^2) \pi \text{ von } K_\gamma = \text{Flächeninhalt } F_\gamma \text{ von } G_\gamma,$$

$$6) \text{ Flächeninhalt } r_0^2 \pi \text{ des äußeren Kreises } K_c \text{ (vom Radius } r_0) \\ = \text{Flächeninhalt } F_c \text{ von } G.$$

Die Kreislinie vom Radius  $r_\gamma$  heiße  $k_\gamma$ ;  $K_0$  ist soviel wie  $k_0$ .  $k_c$  ist der gemeinsame Mittelpunkt aller Kreise. In  $K_c$  werde eine Funktion  $V$  definiert durch die Gleichung:

$$7) \quad V = \gamma \text{ auf } k_\gamma \quad (0 \leq \gamma < c).$$

Dann wird

$$8) \quad \iint_{K_c} V^2 dw = \iint_{G_c} U^2 dw = 1.$$

Ich setze noch

$$9) \quad i_\gamma = \iint_{K_\gamma} (\text{grad } V)^2 dw \quad (0 < \gamma \leq c; i_0 = 0).$$

Der mathematische Nachweis des in der Überschrift behaupteten Satzes besteht nun darin, daß gezeigt wird: es ist

$$10) \quad J_c \geq i_c,$$

und das Gleichheitszeichen gilt nur, wenn  $G$  mit  $K_c$  kongruent ist. Den Beitrag  $\Delta J_\gamma$  des zwischen  $G_\gamma$  und  $G_{\gamma+\Delta\gamma}$  gelegenen Gebietes  $G_{\gamma+\Delta\gamma} - G_\gamma$  zu dem Integrale  $J_c$  vergleiche ich mit dem Beitrage  $\Delta i_\gamma$  des zwischen  $k_\gamma$  und  $k_{\gamma+\Delta\gamma}$  gelegenen gleich großen Kreisringgebiets  $K_{\gamma+\Delta\gamma} - K_\gamma$  zu dem Integrale  $i_c$  ( $0 \leq \gamma < \gamma + \Delta\gamma < c$ ).

Zu diesem Zweck teile ich den Umfang  $s_\gamma$  von  $G_\gamma$  durch  $n$  Punkte:  $P_1, P_2, \dots, P_n$  in  $n$  Teile, die entweder alle einander gleich sind oder doch wenigstens die Bedingung erfüllen, daß der Quotient irgend zweier Teilbögen für  $n \rightarrow \infty$  gegen 1 strebt.

In den Teilpunkten errichte ich die Normalen auf  $C_\gamma$  und nenne deren zwischen  $C_\gamma$  und  $C_{\gamma+\Delta\gamma}$  gelegenen Stücke:  $\Delta v_1, \Delta v_2, \dots, \Delta v_n$ .  $\Delta\gamma$  sei gleich  $s_\gamma : n$  (was zur Voraussetzung hat, daß  $n$  auf Werte  $> s_\gamma : (c - \gamma)$  beschränkt wird),  $\varepsilon_n$  sei eine Zahl, die für  $n \rightarrow \infty$  gegen Null konvergiert, nicht jedesmal die nämliche, und  $\Delta r$  werde zur Abkürzung für  $r_\gamma - r_{\gamma+\Delta\gamma}$  geschrieben.

Dann ist

$$11) \quad \Delta J_\gamma = \sum_1^n \left( \frac{\Delta\gamma}{\Delta v_i} \right)^2 \frac{s_\gamma}{n} \Delta v_i (1 + \varepsilon_n),$$

$$12) \quad \Delta i_\gamma = \left( \frac{\Delta\gamma}{\Delta r} \right)^2 2\pi r_\gamma \Delta r (1 + \varepsilon_n),$$

$$13) \quad \frac{\Delta J_\gamma}{\Delta i_\gamma} = \frac{s_\gamma \Delta r (1 + \varepsilon_n)}{n 2\pi r_\gamma} \sum_1^n \frac{1}{\Delta v_i}.$$

Nun gilt bekanntlich folgender Satz (den man noch einfacher als mittels Differentialrechnung durch den Schluß von  $n$  auf  $n + 1$  beweist): Falls die Summe  $s$  der positiven Veränderlichen  $x_1, x_2, \dots, x_n$  gegeben ist, nimmt für  $x_1 = x_2 = \dots = x_n = s : n$  die Summe

$$14) \quad \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \dots + \frac{1}{x_n} \text{ ihren Minimalwert } \frac{n^2}{s} \text{ an.}$$

Da aber nach Voraussetzung

$$15) \quad \frac{s_\gamma}{n} \sum_1^n \Delta v_i = 2\pi r_\gamma \Delta r (1 + \varepsilon_n)$$

ist, folgt aus (14):

$$16) \quad \sum_1^n \frac{1}{\Delta v_i} \geq \frac{n s_\gamma}{2\pi r_\gamma \Delta r} (1 + \varepsilon_n).$$

Setzt man diesen Wert in (13) ein, so findet man:

$$17) \quad \frac{\Delta J_\gamma}{\Delta i_\gamma} \geq \left( \frac{s_\gamma}{2\pi r_\gamma} \right)^2 (1 + \varepsilon_n).$$

Nun umschließt aber die Kurve  $C_\gamma$  ein ebenso großes Gebiet wie die Kreislinie  $k_\gamma$ ; es ist daher  $s_\gamma \geq 2\pi r_\gamma$ , also nach (17), wenn man  $n$  über alle Grenzen wachsen läßt:

$$18) \quad \frac{dJ_\gamma}{d\gamma} \geq \frac{di_\gamma}{d\gamma},$$

und daher, weil ja

$$19) \quad J_c = \int_0^c \frac{dJ_\gamma}{d\gamma} d\gamma \quad \text{und} \quad i_c = \int_0^c \frac{di_\gamma}{d\gamma} d\gamma \quad \text{ist,}$$

$$20) \quad J_c \geq i_c;$$

hier aber kann das Gleichheitszeichen nur dann gelten, wenn stets  $s_\gamma = 2\pi r_\gamma$  ist, d. h. wenn alle Kurven  $C_\gamma$  Kreise sind.

Zusatz bei der Korrektur: Das im Vorstehenden benutzte Verfahren läßt sich auch bei anderen Aufgaben verwerten, z. B. beim Beweise des Satzes, daß von allen Körpern gleichen Volumens die Kugel die kleinste elektrostatische Kapazität besitzt. Auch hier handelt es sich mathematisch darum, eine Funktion  $U$  so zu bestimmen, daß ein Integral wie (3) möglichst klein ausfällt. Doch ist es jetzt ein dreifaches Integral, das über den Raum außerhalb des Körpers zu erstrecken ist; statt (1) und (2) hat man folgende Nebenbedingungen zu beachten: Auf der Oberfläche des Körpers soll  $U$  überall den nämlichen Wert annehmen, und es soll

$$\lim_{r \rightarrow \infty} r U(x, y, z) = 1$$

sein, wo

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}.$$